Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский, Об относительных поперечниках эллипсоидов в гильбертовом пространстве, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 473–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9163>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:25:39

Об относительных поперечниках эллипсоидов в гильбертовом пространстве

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский

Согласно восходящему к Коновалову [1] определению для центрально симметричных множеств W и V банахова пространства X *относительным поперечником порядка n множества W относительно V* называется величина

$$K_n(W, V, X) := \inf_{l_n} \sup_{f \in W} \inf_{g \in V \cap l_n} \|f - g\|_X,$$

где нижняя грань берется по всем n -мерным подпространствам l_n пространства X .

Если $V = X$, получаем колмогоровские поперечники $d_n(W, X)$. Поэтому для любых множеств W и V справедливо неравенство

$$K_n(W, V, X) \geq d_n(W, X). \quad (1)$$

В [1] и ряде последовавших затем работ рассматривался случай, когда X является пространством C периодических функций, а в качестве множеств W и V брались классы W_C^r , $r = 1, 2, \dots$, дифференцируемых функций f с ограниченной производной $f^{(r)}$.

Изучались вопросы, когда поперечники $K_n(W, V, X)$ и $d_n(W, X)$ имеют одинаковый порядок убывания при $n \rightarrow \infty$ и когда в (1) имеет место равенство. Обзор результатов в этом направлении имеется в [2].

Работа [3] посвящена задаче о равенстве в (1), когда X является пространством L^2 , а W – классом $W_{L^2}^r$ периодических функций f с ограниченной в L^2 производной $f^{(r)}$, $r = 1, 2, \dots$.

Для величин $d_n(W_{L^2}^r, L^2)$ Колмогоровым в работе [4], в которой понятие поперечника множеств было введено впервые, установлены равенства

$$d_{2m-1}(W_{L^2}^r, L^2) = d_{2m}(W_{L^2}^r, L^2) = m^{-r}, \quad m = 1, 2, \dots$$

В [3] показано, что наименьшее значение множителя M , при котором справедливы равенства

$$K_{2m-1}(W_{L^2}^r, MW_{L^2}^r, L^2) = K_{2m}(W_{L^2}^r, MW_{L^2}^r, L^2) = m^{-r}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

равно $1 - m^{-r}$.

В [5] это утверждение распространено на поперечники эллипсоидов W в гильбертовом пространстве, когда в качестве V берутся эллипсоиды MW .

В настоящей заметке рассматривается вопрос о равенстве

$$K_n(W, MV, X) = d_n(W, X),$$

когда W и V – произвольные центрально симметричные эллипсоиды гильбертова пространства H .

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и $\{e_k\}$ – ортонормированный базис пространства H .

Для возрастающей (не обязательно строго) последовательности чисел $\{\alpha_k\}$, $\alpha_1 = 1$, определим эллипсоид W как множество элементов

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00347, 11-01-00417).

для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 a_k^2 \leq 1. \quad (3)$$

Известно (см. [6; с. 240]), что для n -мерного колмогоровского поперечника эллипсоида W справедливо равенство

$$d_n(W, H) = \frac{1}{\alpha_{n+1}}.$$

Фактически это равенство было обосновано уже в [4].

Определим еще эллипсоид V как множество элементов (2), для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 a_k^2 \leq 1,$$

где $\{\beta_k\}$ – некоторая последовательность неотрицательных чисел.

Как было сказано выше, нас интересует вопрос о наименьшем значении множителя M , при котором справедливо равенство относительных и колмогоровских поперечников

$$K_n(W, MV, H) = d_n(W, H). \quad (4)$$

Положим

$$M_n := \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\beta_k}{\alpha_k} \left(1 - \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}} \right). \quad (5)$$

ТЕОРЕМА. *Наименьшее значение множителя M , при котором справедливо равенство (4), равно M_n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что

$$K_n(W, M_n V, H) = \frac{1}{\alpha_{n+1}}. \quad (6)$$

Для этого каждый элемент (2) из W будем приближать полиномом

$$t_n(x) := \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}} \right) a_k e_k.$$

Эти полиномы принадлежат эллипсоиду $M_n V$, т.е. справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^n \beta_k^2 \left(1 - \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}} \right)^2 a_k^2 \leq M_n^2.$$

В самом деле, для $x \in W$ согласно (3) имеем

$$\sum_{k=1}^n \beta_k^2 \left(1 - \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}} \right)^2 a_k^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}} \right)^2 \alpha_k^2 a_k^2 \leq \sum_{k=1}^n M_n^2 \alpha_k^2 a_k^2 \leq M_n^2.$$

Оценим приближение элементов $x \in W$ полиномами $t_n(x)$:

$$\begin{aligned} \|x - t_n(x)\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}} a_k e_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k e_k \right\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}} \right)^2 a_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 = \frac{1}{\alpha_{n+1}^2} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 a_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_{n+1}^2 a_k^2 \right). \end{aligned}$$

Так как числа α_k монотонно возрастают, отсюда получаем

$$\|x - t_n(x)\|^2 \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}^2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 a_k^2 \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}^2}.$$

Таким образом, установлено равенство (6).

Покажем теперь, что число M , при котором выполняется равенство (4), не может быть меньше M_n .

Пусть $M \leq M_n$ и p – то значение k , при котором достигается максимум в (5), т.е.

$$M_n = \frac{\beta_p}{\alpha_p} \left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_{n+1}} \right).$$

Элемент $x_p := e_p / \alpha_p$ принадлежит эллипсоиду W , поэтому

$$K_n(W, MV, H) \geq \inf_{g \in MV} \|x_p - g\|,$$

и если

$$g = \sum_{k=1}^n b_k e_k,$$

то

$$K_n(W, MV, H) \geq \left| \frac{1}{\alpha_p} - b_p \right|.$$

Из условия $g \in MV$ следует, что $\beta_p b_p \leq M$; следовательно, если $\beta_p \neq 0$, то

$$b_p \leq \frac{M}{\beta_p} \leq \frac{M_n}{\beta_p} = \frac{1}{\alpha_p} - \frac{1}{\alpha_{n+1}} < \frac{1}{\alpha_p}.$$

Поэтому

$$K_n(W, MV, H) \geq \frac{1}{\alpha_p} - b_p \geq \frac{1}{\alpha_p} - \frac{M_n}{\beta_p} = \frac{1}{\alpha_p} - \frac{1}{\alpha_p} \left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_{n+1}} \right) = \frac{1}{\alpha_{n+1}}.$$

Таким образом, для любого числа $M \leq M_n$ имеем

$$K_n(W, MV, H) \geq \frac{1}{\alpha_{n+1}}.$$

Значит, при $\beta_p \neq 0$ наименьшее значение M , при котором справедливо равенство (4), равно M_n .

А если $\beta_p = 0$, то равны нулю все числа β_k и эллипсоид V представляет собой все пространство H . В этом случае относительные поперечники совпадают с комогоровскими по определению.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\beta_k \leq \alpha_k$ при всех k и $\beta_1 = 1$, то наименьшее значение множителя M , при котором справедливо равенство (4), равно

$$1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}}.$$

В самом деле, в силу условия $\beta_k \leq \alpha_k$ имеем

$$M_n \geq 1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}}.$$

Но при $\beta_k \leq \alpha_k$ первый множитель в правой части (5) не превосходит 1, а второй убывает с ростом k . Поэтому максимум в определении числа M_n достигается при $k = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Коновалов, *Матем. заметки*, **35**:3 (1984), 369–380. [2] Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский, *Матем. заметки*, **65**:6 (1999), 871–879. [3] Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский, *УМН*, **56**:4 (2001), 159–160. [4] А. Kolmogoroff, *Ann. of Math.* (2), **37**:1 (1936), 107–110. [5] В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, *Вестн. Днепропетровск. ун-та. Сер. матем.*, 2003, № 8, 8–11. [6] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976.

Ю. Н. Субботин

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

E-mail: Yurii.Subbotin@imm.uran.ru, yunsub@imm.uran.ru

Поступило

26.05.2011

С. А. Теляковский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва

E-mail: sergeyAltel@yandex.ru