Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лебедев, О равномерной сходимости рядов Фурье,
Матем. заметки, 2012, том 91, выпуск 6, 946–949

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9165>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:32:21

О равномерной сходимости рядов Фурье

В. В. Лебедев

Для произвольной интегрируемой функции f на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (где $\mathbb{R}$ – вещественная прямая и $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел) рассмотрим ее ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt}, \quad \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Пусть $C(\mathbb{T})$ – пространство непрерывных функций f на $\mathbb{T}$ с обычной нормой $\|f\|_{C(\mathbb{T})} = \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|$. Пусть $U(\mathbb{T})$ – пространство всех функций $f \in C(\mathbb{T})$, ряд Фурье которых равномерно сходится, т.е. $\|S_N(f) - f\|_{C(\mathbb{T})} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, где $S_N(f)$ есть N -я частичная сумма ряда Фурье функции f :

$$S_N(f)(t) = \sum_{|k| \leq N} \widehat{f}(k) e^{ikt}.$$

Снабженное естественной нормой

$$\|f\|_{U(\mathbb{T})} = \sup_N \|S_N(f)\|_{C(\mathbb{T})},$$

пространство $U(\mathbb{T})$ является банаховым пространством.

Рассмотрим также пространство $A(\mathbb{T})$ функций $f \in C(\mathbb{T})$, имеющих абсолютно сходящийся ряд Фурье. Положим

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \|\widehat{f}\|_{l^1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|.$$

Пространство $A(\mathbb{T})$ банахово. Имеем $A(\mathbb{T}) \subset U(\mathbb{T})$ и $\|\cdot\|_{U(\mathbb{T})} \leq \|\cdot\|_{A(\mathbb{T})}$.

Пусть φ – непрерывное отображение окружности $\mathbb{T}$ в себя, т.е. непрерывная функция $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) \pmod{2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$. Согласно известной теореме Берлинга–Хелсона [1] (см. также [2], [3]), если $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1)$, $n \rightarrow \infty$, то функция φ линейна. Вместе с тем известно, что существуют нетривиальные отображения $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ такие, что $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} = O(1)$. Обзор ряда результатов об отображениях окружности и пространствах $A(\mathbb{T})$, $U(\mathbb{T})$ имеется в работах [3], [4]. Более поздние результаты получены в [5].

Кахану принадлежит следующее утверждение [2; гл. IV]. Если нелинейное непрерывное отображение $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ кусочно линейно (т.е. таково, что $[0, 2\pi]$ является конечным объединением интервалов, на каждом из которых функция φ линейна), то $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq \log |n|$. (Знак $\simeq$ означает, что при всех достаточно больших $n \in \mathbb{Z}$ отношение соответствующих величин заключено между двумя положительными константами.) Здесь мы получим аналог этого утверждения для пространства $U(\mathbb{T})$.

ТЕОРЕМА. Пусть φ – кусочно линейное, но нелинейное непрерывное отображение окружности $\mathbb{T}$ в себя. Тогда

$$\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} \simeq \log |n|, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что нетривиальные кусочно линейные замены переменной, вообще говоря, разрушают равномерную сходимость рядов Фурье. Более того, они не действуют из $A(\mathbb{T})$ в $U(\mathbb{T})$. В самом деле, предположив, что для любой функции $f \in A(\mathbb{T})$ суперпозиция $f \circ \varphi$ принадлежит $U(\mathbb{T})$, мы имели бы $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} = O(1)$ (достаточно применить теорему о замкнутом графике к оператору $f \rightarrow f \circ \varphi$).

Для доказательства теоремы надо лишь доказать $(\log |n|)$ -оценку снизу; оценка сверху $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} = O(\log |n|)$ следует из неравенства $\|\cdot\|_{U(\mathbb{T})} \leq \|\cdot\|_{A(\mathbb{T})}$ и указанного выше результата Кахана.

ЛЕММА. Пусть $m \in C(\mathbb{T})$ – функция такая, что

$$\|m\|_* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{m}(n)| \log(|n| + 2) < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in U(\mathbb{T})$ имеем $mf \in U(\mathbb{T})$ и

$$\|mf\|_{U(\mathbb{T})} \leq c \|m\|_* \|f\|_{U(\mathbb{T})},$$

где константа $c > 0$ не зависит от f и m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in U(\mathbb{T})$. При $n \in \mathbb{Z}$ положим $e_n(t) = e^{int}$. Пусть $n > 0$. Тогда

$$S_N(e_n f) = e_n S_{N+n}(f) + e_n \widehat{f}(N - n) - e_{N+n} S_n(e_{-N} f). \quad (1)$$

Легко увидеть, что отсюда следует включение $e_n f \in U(\mathbb{T})$.

Для любой функции $g \in U(\mathbb{T})$ мы имеем $\|g\|_{C(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{U(\mathbb{T})}$. Вместе с тем (как хорошо известно) для любой функции $g \in C(\mathbb{T})$ имеем

$$\|S_n(g)\|_{C(\mathbb{T})} \leq c \|g\|_{C(\mathbb{T})} \log(n + 2)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от n и g . Поэтому (1) дает

$$\begin{aligned} \|S_N(e_n f)\|_{C(\mathbb{T})} &\leq \|S_{N+n}(f)\|_{C(\mathbb{T})} + \|f\|_{C(\mathbb{T})} + \|S_n(e_{-N} f)\|_{C(\mathbb{T})} \\ &\leq \|f\|_{U(\mathbb{T})} + \|f\|_{C(\mathbb{T})} + c \|f\|_{C(\mathbb{T})} \log(n + 2) \leq c_1 \|f\|_{U(\mathbb{T})} \log(n + 2). \end{aligned}$$

Таким образом, $\|e_n f\|_{U(\mathbb{T})} \leq c_1 \|f\|_{U(\mathbb{T})} \log(|n| + 2)$. Такое же соотношение верно при $n < 0$ (комплексное сопряжение не меняет норму функции в $U(\mathbb{T})$). Отсюда немедленно получаем утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Стандартным образом будем отождествлять функции на $\mathbb{T}$ и функции на отрезке $[-\pi, \pi]$. При $v \in \mathbb{R}$ определим функции e_v на $[-\pi, \pi]$, полагая $e_v(t) = e^{ivt}$. Для произвольного интервала $I \subseteq [-\pi, \pi]$ пусть 1_I – его характеристическая функция: $1_I(t) = 1$ при $t \in I$, $1_I(t) = 0$ при $t \in [-\pi, \pi] \setminus I$. При $0 < \varepsilon < \pi$ пусть Δ_ε – “треугольная” функция, сосредоточенная на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, т.е. функция на $[-\pi, \pi]$, определенная соотношением $\Delta_\varepsilon(t) = \max(0, 1 - |t|/\varepsilon)$.

Пусть t_0 – такая точка, что функция φ линейна в некоторой левой полуокрестности точки t_0 и линейна в некоторой правой полуокрестности точки t_0 , но не линейна ни в какой ее окрестности. Заменяя (при необходимости) функцию $\varphi(t)$ на $\varphi(t + t_0) - \varphi(t_0)$, можем считать, что $t_0 = 0$ и $\varphi(0) = 0$; таким образом, можем считать, что для некоторого ε , $0 < \varepsilon < \pi$, имеем $\varphi(t) = \alpha t$ при $t \in (-\varepsilon, 0]$ и $\varphi(t) = \beta t$ при $t \in [0, \varepsilon)$, где $\alpha \neq \beta$.

Непосредственное вычисление дает при $k \neq n\alpha, n\beta$

$$\widehat{\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}}(k) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{n\alpha - k} - \frac{1}{n\beta - k} \right) - \frac{1}{i\varepsilon} \left(\frac{1}{n\alpha - k} \widehat{e_{n\alpha} 1_{(-\varepsilon, 0)}}(k) - \frac{1}{n\beta - k} \widehat{e_{n\beta} 1_{(0, \varepsilon)}}(k) \right). \quad (2)$$

При $\lambda \in \mathbb{R}$ пусть

$$Q(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}: |k - \lambda| \geq 1} \frac{1}{(k - \lambda)^2}.$$

Легко проверить, что

$$Q(\lambda) \leq 4, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Покажем сначала, что при $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, мы имеем

$$\|\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} \geq \frac{1}{2\pi} \log |n| + c(\varphi), \quad (4)$$

где $c(\varphi)$ не зависит от n .

Если $g \in U(\mathbb{T})$, то функция $g(-t)$ и функция $\overline{g(t)}$ (полученная комплексным сопряжением) принадлежат $U(\mathbb{T})$ и имеют ту же норму, что и g . Поэтому при доказательстве оценки (4) мы можем считать, что $\alpha > 0$ и рассматривать лишь следующие три случая:

- 1) $|\beta| > \alpha$;
- 2) $\beta = -\alpha$;
- 3) $\beta = 0$.

Мы можем также считать, что n положительно и настолько велико, что $n\alpha \geq 2$. Всюду далее мы полагаем $N = [n\alpha] - 1$, где $[x]$ означает целую часть числа x .

Случай 1). Имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{n\alpha - k} \right| &= \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{n\alpha - k} \geq \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{N + 2 - k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2N + 2} \geq \log(N + 1) \geq \log \frac{n\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Вместе с тем, при $|k| \leq N$ имеем $|n\beta - k| \geq |n\beta| - |n\alpha| = n(|\beta| - \alpha)$, поэтому

$$\left| \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{n\beta - k} \right| \leq \frac{2N + 1}{n(|\beta| - \alpha)} \leq \frac{3n\alpha}{n(|\beta| - \alpha)} = \frac{3\alpha}{|\beta| - \alpha}. \quad (6)$$

Заметим далее, что, пользуясь неравенством Коши и равенством Парсеваля, получаем (см. (3))

$$\left| \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{n\alpha - k} \widehat{e_{n\alpha} 1_{(-\varepsilon, 0)}}(k) \right| \leq (Q(n\alpha))^{1/2} \|e_{n\alpha} 1_{(-\varepsilon, 0)}\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq 2\varepsilon^{1/2}, \quad (7)$$

и аналогично

$$\left| \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{n\beta - k} \widehat{e_{n\beta} 1_{(0, \varepsilon)}}(k) \right| \leq (Q(n\beta))^{1/2} \|e_{n\beta} 1_{(0, \varepsilon)}\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq 2\varepsilon^{1/2}. \quad (8)$$

Вместе соотношения (5)–(8) влекут (см. (2))

$$|S_N(\Delta_\varepsilon e^{in\varphi})(0)| = \left| \sum_{|k| \leq N} \widehat{\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}}(k) \right| \geq \frac{1}{2\pi} \left(\log \frac{n\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{|\beta| - \alpha} \right) - 4\varepsilon^{-1/2},$$

и мы получаем (4).

Случай 2). Имеем

$$\left| \sum_{|k| \leq N} \left(\frac{1}{n\alpha - k} - \frac{1}{n\beta - k} \right) \right| = \left| \sum_{|k| \leq N} \left(\frac{1}{n\alpha - k} + \frac{1}{n\alpha + k} \right) \right| = \left| 2 \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{n\alpha - k} \right| \geq \log \frac{n\alpha}{2}.$$

Вместе с оценками (7), (8), которые верны в случае 2), эта оценка дает

$$|S_N(\Delta_\varepsilon e^{in\varphi})(0)| \geq \frac{1}{2\pi} \log \frac{n\alpha}{2} - 4\varepsilon^{-1/2},$$

и мы опять получаем (4).

Случай 3). Имеем

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq N} \left(\frac{1}{n\alpha - k} - \frac{1}{n\beta - k} \right) \right| = \left| \sum_{1 \leq |k| \leq N} \left(\frac{1}{n\alpha - k} - \frac{1}{-k} \right) \right| = \left| \sum_{1 \leq |k| \leq N} \frac{1}{n\alpha - k} \right| \geq \log \frac{n\alpha}{2} - 1.$$

Заметим, что оценки (7), (8) верны в случае 3), если промежуток $|k| \leq N$ в суммах заменить на $1 \leq |k| \leq N$. Таким образом, видим, что

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq N} \widehat{\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}}(k) \right| \geq \frac{1}{2\pi} \left(\log \frac{n\alpha}{2} - 1 \right) - 4\varepsilon^{-1/2},$$

и, поскольку $|\widehat{\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}}(0)| \leq 1$, получаем

$$|S_N(\Delta_\varepsilon e^{in\varphi})(0)| \geq \frac{1}{2\pi} \left(\log \frac{n\alpha}{2} - 1 \right) - 4\varepsilon^{-1/2} - 1.$$

Оценка (4) доказана.

Заметим теперь, что $\widehat{\Delta_\varepsilon}(k) = O(1/|k|^2)$ при $|k| \rightarrow \infty$, поэтому

$$\|\Delta_\varepsilon\|_* = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\Delta_\varepsilon}(k)| \log(|k| + 2) = M(\varepsilon) < \infty,$$

и из (4), пользуясь леммой, получаем

$$c(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \log |n| \leq \|\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} \leq cM(\varepsilon) \|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Было бы интересно описать поточечные мультипликаторы пространства $U(\mathbb{T})$, т.е. такие непрерывные функции m на $\mathbb{T}$, что $mf \in U(\mathbb{T})$ для любой функции $f \in U(\mathbb{T})$. Согласно полученной выше лемме, условие

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{m}(k)| \log(|k| + 2) < \infty$$

является достаточным для того, чтобы функция m являлась мультипликатором. Автору не известно является ли это условие необходимым. Указанное условие нельзя заменить более слабым условием $m \in A(\mathbb{T})$ (см. [2; гл. I, § 6]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Beurling, H. Nelson, *Math. Scand.*, **1** (1953), 120–126. [2] Ж.-П. Кахан, *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976. [3] J.-P. Kahane, *Topics in Modern Harmonic Analysis*, Vol. II, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 955–990. [4] А. М. Олевский, *УМН*, **40:3** (1985), 157–193. [5] В. В. Лебедев, *Матем. сб.*, **201:12** (2010), 103–130.

В. В. Лебедев

Московский государственный институт электроники
и математики (технический университет)

E-mail: lebedevhome@gmail.com

Поступило

26.05.2011

Исправленный вариант

19.01.2012