Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Сгибнев, Об условиях обратимости элементов банаховых алгебр мер, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 772–774

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9169>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:48:49

Об условиях обратимости элементов банаховых алгебр мер

М. С. Сгибнев

Обобщаются классические теоремы об условиях обратимости элементов банаховых алгебр мер.

Библиография: 3 названия.

DOI: 10.4213/mzm9169

1. В разнообразных приложениях часто приходится прибегать к обращению элементов банаховых алгебр мер. Хорошо известны достаточные условия для того, чтобы элемент такой алгебры имел обратный (см. [1; теорема 4.18.5] и [2; § 32, теорема 4]). В настоящей заметке мы обобщаем указанные теоремы.

Пусть $\varphi(x)$ – конечная положительная функция, определенная на $\mathbb{R}$ (или на $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$), такая, что $\varphi(x)$ измерима по Борелю, $\varphi(x+y) \leq \varphi(x)\varphi(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$) и $\varphi(0) = 1$. Функции, удовлетворяющие перечисленным условиям, назовем *полумультипликативными*. Если функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, полумультипликативна, то [1; теорема 7.6.2]

$$\infty > \omega_0 := \inf_{x>0} \frac{\ln \varphi(x)}{x} \geq \sup_{x<0} \frac{\ln \varphi(x)}{x} =: \omega_1 > -\infty. \quad (1)$$

Если функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, полумультипликативна, то $-\infty \leq \omega_0 < \infty$ [1; теорема 7.6.1]. Пусть $S(\varphi)$ ($S_0(\varphi)$) – совокупность комплексных мер ν , определенных и σ -аддитивных на всех ограниченных борелевских подмножествах $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$), таких, что $\|\nu\|_\varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) |\nu|(dx) < \infty$, где $|\nu|$ – полная вариация меры ν . *Сверткой* мер ν и $\varkappa$ называется мера

$$\nu * \varkappa(A) := \iint_{\{x+y \in A\}} \nu(dx) \varkappa(dy) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A-y) \varkappa(dy) = \int_{\mathbb{R}} \varkappa(A-y) \nu(dy);$$

здесь A – произвольное ограниченное борелевское подмножество $\mathbb{R}$ и множество $A-y$ определяется как $\{x \in \mathbb{R} : x+y \in A\}$. Совокупность $S(\varphi)$ ($S_0(\varphi)$) – коммутативная комплексная банахова алгебра относительно нормы $\|\cdot\|_\varphi$ и свертки мер в качестве операции умножения, единицей в $S(\varphi)$ ($S_0(\varphi)$) служит атомическая мера δ_0 массы 1, сосредоточенная в нуле (см. [1; § 4.16]). Обозначим через $\widehat{\nu}(s)$ преобразование Лапласа меры $\nu \in S(\varphi)$ ($S_0(\varphi)$):

$$\widehat{\nu}(s) := \int_{\mathbb{R}} \exp(sx) \nu(dx).$$

Из соотношений (1) вытекает, что $\widehat{\nu}(s)$ абсолютно сходится в полосе (полуплоскости)

$$\Pi := \{s \in \mathbb{C} : \omega_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \omega_0\} \quad (\Pi_0 := \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \leq \omega_0\}),$$

а именно: $\int_{\mathbb{R}} \exp(\operatorname{Re} sx) |\nu|(dx) < \infty$ при всех $s \in \Pi$ (Π_0).

Если полумультимпликативная функция $\varphi(x)$ определена только на $[0, \infty)$ и $\omega_0 = -\infty$, то вопрос об обратимости элементов в $S_0(\varphi)$ полностью разрешен в [1; теорема 4.18.5], поэтому мы будем предполагать, что $\omega_0 > -\infty$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\nu = \nu_c + \nu_d + \nu_s$ – разложение элемента $\nu \in S(\varphi)$ на абсолютно непрерывную, дискретную и сингулярную компоненты. Элемент $\nu \in S(\varphi)$ имеет обратный, если $\widehat{\nu}(s) \neq 0$ для всех $s \in \Pi$ и если

$$\inf_{s \in \Pi} |\widehat{\nu}_d(s)| > \max_{i=0,1} \int_{\mathbb{R}} e^{\omega_i x} |\nu_s|(dx). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M}$ – пространство максимальных идеалов алгебры $S(\varphi)$. Из теории банаховых алгебр (нормированных колец) известны следующие факты [2]. Каждый максимальный идеал $M \in \mathcal{M}$ порождает некоторый гомоморфизм $h: S(\varphi) \rightarrow \mathbb{C}$ и M – ядро этого гомоморфизма. Обозначим через $\nu(M)$ значение h на $\nu \in S(\varphi)$. Элемент $\nu \in S(\varphi)$ имеет обратный тогда и только тогда, когда ν не принадлежит никакому максимальному идеалу $M \in \mathcal{M}$. Иными словами, ν обратим тогда и только тогда, когда $\nu(M) \neq 0$ при любом $M \in \mathcal{M}$. Пространство $\mathcal{M}$ разбивается на два множества: $\mathcal{M}_1$ – множество максимальных идеалов, не содержащих совокупности $L(\varphi)$ всех абсолютно непрерывных мер из $S(\varphi)$, и $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1$. Если $M \in \mathcal{M}_1$, то порожденный им гомоморфизм имеет вид $h(\nu) = \nu(M) = \widehat{\nu}(s_0)$, где $s_0 \in \Pi$. В этом случае $M = \{\nu \in S(\varphi) : \widehat{\nu}(s_0) = 0\}$ [1; гл. IV, § 4]. Если $M \in \mathcal{M}_2$, то $\nu(M) = 0$ для любого $\nu \in L(\varphi)$. Таким образом, если $M \in \mathcal{M}_1$, то по предположению $\nu(M) \neq 0$. Пусть $M \in \mathcal{M}_2$. Справедливо равенство

$$\nu(M) = \nu_d(M) + \nu_s(M). \quad (3)$$

Рассуждая как в доказательстве теоремы 4.18.5 [1], приходим к заключению, что

$$|\nu_d(M)| \geq \inf_{s \in \Pi} |\widehat{\nu}_d(s)|. \quad (4)$$

По теореме о строении произвольного гомоморфизма $h: S(\varphi) \rightarrow \mathbb{C}$ (см. [3; теорема 1])

$$h(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \chi(x, \nu) \exp(\beta x) \nu(dx), \quad \nu \in S(\varphi), \quad (5)$$

где β – вещественное число такое, что $\omega_1 \leq \beta \leq \omega_0$, а функция $\chi(x, \nu)$ двух переменных $x \in \mathbb{R}$ и $\nu \in S(\varphi)$ – обобщенный характер, из свойств которого нам требуется лишь следующее: $|\nu|$ -esssup $_{x \in \mathbb{R}} |\chi(x, \nu)| \leq 1$. (Для обычного характера $\chi(x)$ выполняется тождество $|\chi(x)| \equiv 1$.) Применяя (5) и используя свойство выпуклости преобразования Лапласа, видим, что

$$\begin{aligned} |\nu_s(M)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi(x, \nu_s) \exp(\beta x) \nu_s(dx) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \exp(\beta x) |\nu_s|(dx) \\ &\leq q \widehat{|\nu_s|}(\omega_0) + (1 - q) \widehat{|\nu_s|}(\omega_1) \leq \max_{i=0,1} \widehat{|\nu_s|}(\omega_i); \end{aligned} \quad (6)$$

здесь q выбрано так, чтобы $\beta = q\omega_0 + (1 - q)\omega_1$. Из соотношений (2)–(4) и (6) вытекает

$$|\nu(M)| \geq |\nu_{\mathfrak{d}}(M)| - |\nu_s(M)| \geq \inf_{s \in \Pi} |\widehat{\nu}_{\mathfrak{d}}(s)| - \max_{i=0,1} |\widehat{\nu_s}|(\omega_i) > 0.$$

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1 остается справедливой, если в ее формулировке заменить $S(\varphi)$ на $S_0(\varphi)$, Π на Π_0 , а правую часть (2) на $\int_0^\infty e^{\omega_0 x} |\nu_s|(dx)$; при этом вместо представления (5) следует воспользоваться его аналогом для алгебры $S_0(\varphi)$ (см. [3; теорема 1 и замечание 3]).

Сравним теорему 1 с результатами [1], [2]. Теорема 4 [2; § 32] вытекает из доказанной теоремы, если в последней положить $\varphi(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$. Теорема 4.18.5 [1] получается из теоремы 1 для $S_0(\varphi)$, если условие (2) заменить на более ограниченное: $\inf_{s \in \Pi_0} |\widehat{\nu}_{\mathfrak{d}}(s)| > \|\nu_s\|_\varphi$.

ПРИМЕР. Пусть F – распределение вероятностей в $\mathbb{R}$, имеющее положительное математическое ожидание $\mu = \int_{\mathbb{R}} x F(dx)$ и конечный второй момент. При изучении асимптотики меры восстановления в ряде случаев приходится обращать меру V с преобразованием Лапласа $\widehat{V}(s) = (s - 1)[\widehat{F}(s) - 1]/s$, $\operatorname{Re} s = 0$, в банаховой алгебре $S(\varphi)$, где $\varphi(x) = 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$; в этом случае $\omega_0 = \omega_1 = 0$. Имеем $V - F + \delta_0$ – вещественнозначная абсолютно непрерывная мера. Предположим также, что F имеет ненулевую абсолютно непрерывную компоненту и что $F_{\mathfrak{d}} = 0$. Покажем, что мера V обратима в $S(\varphi)$. Действительно, $\widehat{F}(s) \neq 1$ при $s \neq 0$ и $\operatorname{Re} s = 0$, поэтому при этих s справедливо неравенство $\widehat{V}(s) \neq 0$. По непрерывности $\widehat{V}(0) = -\mu \neq 0$. Проверим выполнение второго условия теоремы 1. Очевидно, что $\widehat{V}_{\mathfrak{d}}(s) = -\widehat{\delta}_0(s) \equiv -1$. Далее имеем

$$|\widehat{V_s}|(0) = F_s(\mathbb{R}) = 1 - F_c(\mathbb{R}) < 1.$$

Таким образом, выполнено и второе условие теоремы 1. Обратимость V в $S(\varphi)$ установлена, т.е. существует элемент V^{-1} такой, что

$$V * V^{-1} = \delta_0, \quad \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|) |V^{-1}|(dx) < \infty.$$

Отметим, что в данном случае применение теоремы 4 [2; § 32] позволяет утверждать только конечность меры V^{-1} : $|V^{-1}|(\mathbb{R}) < \infty$. Даже если F сосредоточено на $[0, \infty)$, применение теоремы 4.18.5 [1] к банаховой алгебре $S_0(\varphi)$, вообще говоря, невозможно, поскольку норма $\|V_s\|_\varphi$ может превосходить единицу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [2] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шиллов, *Коммутативные нормированные кольца*, Современные проблемы математики, Физматгиз, М., 1960.
- [3] Б. А. Рогозин, М. С. Сгибнев, “Банаховы алгебры мер на прямой”, *Сиб. матем. журн.*, **21:2** (1980), 160–169.

М. С. Сгибнев

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

г. Новосибирск

E-mail: sgibnev@math.nsc.ru

Поступило

08.06.2011

Исправленный вариант

03.05.2012