Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Беспалов, Перестановки системы Уолша, сохраняющие константы Лебега, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 36–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm917>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 09:42:01

УДК 517.518.3

ПЕРЕСТАНОВКИ СИСТЕМЫ УОЛША, СОХРАНЯЮЩИЕ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА

М. С. Беспалов

Выделен класс перестановок системы Уолша–Пэли, сохраняющих константы Лебега и L^p -нормы ядра Дирихле. Тем самым, в частности, доказано, что формулы Файна для оценок и вычисления констант Лебега системы Уолша–Пэли справедливы для систем Уолша в нумерациях Уолша и Качмажа. Предложен третий, отличный от полученных Файном, алгоритм вычисления констант Лебега, позволяющий вычислять также L^p -нормы ядер Дирихле. Установлено, что не все перестановки системы Уолша даже внутри пачек сохраняют константы Лебега. В выделенном классе перестановок содержатся TW -системы Шиппа, не являющиеся в общем случае перестановками внутри пачек.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. В литературе под названием система Уолша встречаются три различные системы, отличающиеся нумерацией функций.

Наиболее подробно изучена система Уолша в нумерации Пэли [1]. В [2] Файн получил явную формулу для констант Лебега

$$L_n = \nu - \sum_{n_i < n_j} 2^{n_i - n_j},$$

где $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_\nu}$, $n_i < n_{i+1}$, формулы, задающие алгоритм вычисления констант Лебега $L_{2n} = L_n$ и $L_{2n+1} = (1 + L_n + L_{n+1})/2$ и другие оценки констант Лебега для системы Уолша–Пэли.

Введенная Уолшем [3] ортонормированная система функций, которую будем называть системой Уолша–Уолша, встречается в основном в технических приложениях. Отметим результат [4] о единственности этой системы относительно ее характеристического свойства. В обзорах и монографиях [5]–[8] результаты, относящиеся к сходимости рядов по системе Уолша–Уолша, не приводятся. В [9] доказано, что система Уолша–Уолша является системой сходимости.

Система Уолша в нумерации Качмажа интересна хотя бы тем, что ряды с монотонными коэффициентами по этой системе могут расходиться почти всюду [10], [11] в отличие от рядов по тригонометрической системе и по системе Уолша–Пэли, для которых требование монотонности коэффициентов гарантировало сходимость почти всюду ряда для функций из L^2 . Отмечалось [5], что для констант Лебега системы Уолша–Качмажа также справедлива логарифмическая мажоранта.

В данной статье выделен класс перестановок системы Уолша–Пэли, включающий в себя системы Уолша–Качмажа и Уолша–Уолша, для которых нормы в L^p ($p \geq 1$) ядра Дирихле (для $p = 1$ это константы Лебега) совпадают для всех n . Следовательно, упомянутые выше результаты Файна и следствия, которые из них можно вывести, справедливы для данного класса систем. Примечательно, что в этом классе присутствуют TW -системы, введенные в [9], которые в общем случае не являются перестановкой функций Уолша внутри пачки. В статье приведен пример перестановки системы Уолша внутри пачки, не сохраняющей константу Лебега.

2. Определения. Используем обозначения, принятые в [9], сдвинув на единицу нумерацию. Для системы Уолша–Пэли естественной областью определения служит группа $X = \{x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), x_i \in \mathbb{Z}_2\}$ двоичных последовательностей с поординатным сложением по модулю 2, т.е. над полем $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Группа X изоморфна модифицированному отрезку $[0, 1]^*$, который получается добавлением к $[0, 1]$ счетного числа двоично-рациональных точек. Изоморфизм осуществляется формулой

$$x \in X \rightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} \in [0, 1]^*.$$

Элементы изоморфных групп X и $[0, 1]^*$ обозначаем одинаковыми символами x .

В группе X задана система окрестностей нуля $\{\Delta_n\}$, где $\Delta_n = \{x \in X \mid x = (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots), x_i \in \mathbb{Z}_2\}$; X является линейным пространством над полем $\mathbb{Z}_2$. Определим его собственные подгруппы и подпространства X_n и X_∞ .

Положим $X_n = \{x \in X \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots), x_i \in \mathbb{Z}_2\}$, $X_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Множество финитных двоичных последовательностей X_∞ изоморфно множеству $\mathbb{N}_0$ неотрицательных целых чисел. Изоморфизм осуществляется формулой

$$X_\infty \ni n = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) \rightarrow n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k 2^{k-1} \in \mathbb{N}_0$$

и позволяет занумеровать элементы группы X_∞ (элементы групп X_∞ и $\mathbb{N}_0$ обозначаем одинаковым символом n). Множество $X_{n+1} \setminus X_n$, которое соответствует натуральным числам от 2^n до $2^{n+1} - 1$, назовем n -й пачкой; X_∞ – линейное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$ с основным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$, а 1 стоит на i -м месте.

Для фиксированных $k \in X_n$, $\Delta_n \subset X$ k -м интервалом n -го ранга назовем $\Delta_n^k = k + \Delta_n \subset X$, т.е. множество двоичных последовательностей, у которых первые n координат фиксированы, а остальные – произвольные элементы поля $\mathbb{Z}_2$.

Введем меру Хаара, инвариантную относительно сдвига: $|X| = 1$, $|\Delta_n| = 2^{-n}$, и для любого $k \in X_n$ имеем $|\Delta_n^k| = 2^{-n}$. Данная мера Хаара соответствует [6] мере Лебега на $[0, 1]^*$. Для функции $f(x)$, заданной на X , интеграл по данной мере будем обозначать $\int_X f(x) dx$.

Определим бинарную операцию $X_\infty \times X \rightarrow \mathbb{Z}_2$ скалярного произведения над $\mathbb{Z}_2$ по формуле $\langle n, x \rangle = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k + \dots$. Тогда функции системы Уолша–Пэли $\{w_n(x)\}$ определяются равенством $w_n(x) = (-1)^{\langle n, x \rangle}$ для $x \in X$, $n \in X_\infty$.

Для сравнения напомним определение через функции Радемахера (см. [5]) $r_{m-1}(x) = \text{sign}(\sin(2^m \pi x))$:

$$w_n(x) = \prod_{m=1}^{\infty} r_{m-1}^{n_m}(x), \quad \text{где } n = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) \in X_\infty, \quad x \in [0, 1]^*. \quad (1)$$

Ядром Дирихле для системы Уолша–Пэли называется

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x), \quad (2)$$

где сумма обычная и $D_n: X \rightarrow \mathbb{Z}$.

Константы Лебега системы Уолша–Пэли равны

$$L_n = \int_X |D_n(x)| dx. \quad (3)$$

Аналогично обозначим p -ю степень L^p -нормы отображения $D_n: X \rightarrow \mathbb{Z}$

$$L_n^p = \int_X |D_n(x)|^p dx. \quad (4)$$

Для системы функций $\{\varphi_n(x)\}$, которая является некоторой перестановкой системы Уолша–Пэли, выражения, аналогичные (2)–(4), обозначим $H_n(x)$, Λ_n , Λ_n^p соответственно.

3. Ядро Дирихле и константы Лебега системы Уолша–Пэли. Напомним основные свойства ядра Дирихле

$$D_{2^m}(x) = \begin{cases} 2^m, & \text{если } x \in \Delta_m^0, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus \Delta_m^0, \end{cases} \quad (5)$$

$$D_{2^m+k}(x) = D_{2^m}(x) + w_{2^m}(x)D_k(x), \quad \text{если } 0 \leq k < 2^m, \quad (6)$$

и, следовательно, $L_{2^m} = 1$.

ЛЕММА 1. *Константы Лебега симметричны внутри пачки $L_{2^m+k} = L_{2^m+1-k}$, где $0 \leq k < 2^m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом математической индукции. В качестве базы индукции приведем значения констант Лебега от L_1 до L_8 : $1, 1, 3/2, 1, 7/4, 3/2, 7/4, 1$.

Шаг индукции. Полагаем, что $L_{2^{m-1}+k_1} = L_{2^m-k_1}$ для всех $0 \leq k_1 < 2^{m-1}$. Если k четное, то $k = 2k_1$ и по формуле Файна $L_{2n} = L_n$ имеем

$$L_{2^m+k} = L_{2^{m-1}+k_1} = L_{2^m-k_1} = L_{2^{m+1}-k}.$$

Если k нечетное, то $k = 2k_1 + 1$ и по формуле Файна $L_{2n+1} = (1 + L_n + L_{n+1})/2$ имеем

$$\begin{aligned} L_{2^m+k} &= L_{2(2^{m-1}+k_1)+1} = \frac{1}{2}(1 + L_{2^{m-1}+k_1} + L_{2^{m-1}+k_1+1}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + L_{2^m-k_1} + L_{2^m-k_1-1}) = L_{(2^m-k_1-1)+(2^m-k_1)} = L_{2^{m+1}-k}. \end{aligned}$$

Формулы (5), (6) позволяют получить алгоритм вычисления модулей ядер Дирихле m -й пачки на интервалах m -го ранга. Для наглядности интервалы Δ_n^k будем представлять как интервалы вида $[k/2^m, (k+1)/2^m]$ модифицированного отрезка $[0, 1]^*$. Как

следствие (5), (6) получаем отмеченное в [5] свойство ядер Дирихле m -й пачки: если $2^m \leq n < 2^{m+1}$, то, представив $n = 2^m + k$, имеем

$$D_{2^m+k}(x) = \begin{cases} 2^m + k, & \text{если } x \in \Delta_{m+1}^0, \\ 2^m - k, & \text{если } x \in \Delta_{m+1}^1, \end{cases} \quad (7)$$

$$|D_{2^m+k}(x)| = |D_k(x)|, \text{ если } x \in \Delta_{m+1}^j, 2 \leq j < 2^{m+1}. \quad (8)$$

Так как $\Delta_m^i = \Delta_{m+1}^{2i} \cup \Delta_{m+1}^{2i+1}$ и $|D_k(x)|$ при $k \leq 2^m$ постоянен на интервалах m -го ранга, то формулу (8) понимаем как следующее свойство самоподобия: при фиксированном i ($1 \leq i < 2^m$) выражение $|D_{2^m+k}(x)|$ при изменении k от 0 до 2^m на интервалах как Δ_{m+1}^{2i} , так и Δ_{m+1}^{2i+1} пробегает те же значения, что и $|D_k(x)|$ на интервале Δ_m^i .

Обозначим $\alpha_n^i = |D_n(x)|$ для $x \in \Delta_m^i$, где m удовлетворяет условию $2^{m-1} \leq n \leq 2^m$, и $\alpha_n = (\alpha_n^0, \dots, \alpha_n^{2^m-1})$. Заметим, что при описании алгоритма вычисления α_n рассматриваем расширенные пачки (от 2^{m-1} до 2^m включительно). Значения при $n = 2^m$ (в точках “раздвоения”) имеют два представления: $\alpha_{2^m} = (\underbrace{2^m, 0, \dots, 0}_{2^m})$, соответству-

ющий концу предшествующего цикла, и $\alpha_{2^m} = (\underbrace{2^m, 2^m, 0, \dots, 0}_{2^{m+1}})$ – вектор начала нового

цикла. Описание алгоритма сформулируем в следующей лемме.

ЛЕММА 2. *Координаты векторов α_n – целые положительные числа, причем четные для четных n и нечетные для нечетных n . Соответствующие координаты векторов α_n и α_{n+1} отличаются на 1. Всегда $\alpha_n^0 = n$. При изменении n от 2^m до 2^{m+1} с шагом 1: значения α_n^1 убывают от 2^m до 0; два значения α_n^2 и α_n^3 совершают простой цикл роста от 0 до 2^{m-1} и убывания до 0; четыре значения $\alpha_n^4, \alpha_n^5, \alpha_n^6$ и α_n^7 совершают два половинных цикла от 0 до 2^{m-2} и снова до 0; восемь значений $\alpha_n^8, \dots, \alpha_n^{15}$ совершают четыре четвертных цикла от 0 до 2^{m-3} и до 0; и т.д. до последнего набора, где 2^m значений $\alpha_n^{2^m}, \dots, \alpha_n^{2^{m+1}-1}$ совершают 2^{m-1} элементарных циклов – 0, 1, 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые утверждения леммы очевидны. Последнее предложение доказывается методом математической индукции с помощью фрактального свойства самоподобия, выраженного формулами (7), (8), и последующим пояснением. Предположив справедливость леммы 2 для произвольной расширенной пачки, получим ее выполнение для следующей расширенной пачки.

Натуральное n из m -й пачки имеет вид

$$n = 2^m + \sum_{j=1}^{m-1} n_j 2^{j-1}.$$

Для $i < m$ определим срезку числа n равенством

$$[n]_i = \sum_{j=1}^i n_j 2^{j-1}.$$

ЛЕММА 3. Если $2^m < n < 2^{m+1}$, $1 \leq p < \infty$, то

$$L_n^p = \frac{1}{2^{m+1}} \left(n^p + (2^{m+1} - n)^p + \sum_{i=1}^{m-1} 2^i (n_{m-i+1} 2^{m-i} + (-1)^{n_{m-i+1}} [n]_{m-i})^p + 2^m n_1^p \right), \quad (9)$$

в частности,

$$L_n = 1 + \frac{n_1}{2} + \sum_{k=2}^m \left(\frac{n_k}{2} + (-1)^{n_k} [n]_{k-1} 2^{-k} \right).$$

Формула (9), для случая $p = 1$ объявленная в [12], есть, по существу, описание алгоритма леммы 2. Поясним ее, считая $p = 1$. Первый множитель – это длина интервалов $(m+1)$ -го ранга. Первые два слагаемых – это α_n^0 и α_n^1 . В сумме по i от 1 до $m-1$ первый множитель – это количество следующих, подряд идущих, интервалов $(m+1)$ -го ранга, на которых значение модуля ядра Дирихле равно второму сомножителю. Второе утверждение леммы 3 – более короткая запись (9) при $p = 1$.

Обозначим $A_m = \max_{(2^m \leq n < 2^{m+1})} L_n$; t_m – точка максимума в пачке, т.е. $L_{t_m} = A_m$; а $c_m = A_m - A_{m-1}$. Согласно лемме 1 существуют две точки максимума: левая t'_m и правая t''_m .

ЛЕММА 4. Для всех натуральных m

$$A_m = \frac{1}{9}(3m + 10 + (-1)^{m+1} 2^{-m}), \quad c_m = - \sum_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^m \right),$$

$$t'_m = \frac{1}{3}(2^{m+2} + (-1)^{m+1}), \quad t''_m = \frac{1}{3}(5 \cdot 2^m + (-1)^m)$$

и t'_m единственна. Максимальный скачок констант Лебега внутри m -й пачки равен $L_{2^{m+1}} - L_{2^m} = 1 - 2^{-m}$ и достигается только на границе пачки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится комбинаторными методами с использованием формул Файна для L_{2n} и L_{2n+1} . Выражения для A_m и t'_m используются в [5] для вывода формулы

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(L_k - \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \log 3k \right) \right) = 0,$$

которую можно уточнить следующим образом:

$$L_k < \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \log 3k + \frac{1}{k}, \quad L_{t'_{2k+1}} > \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \log 3t'_{2k+1}.$$

Алгоритм, аналогичный алгоритму леммы 2, можно использовать для вычисления констант Лебега системы Крестенсона–Леви. Результаты для случая $p = 3$ сформулированы в [13].

4. Регулярные перестановки системы Уолша. Функции системы Уолша–Пэли $w_n(x)$ группируются по пачкам; m -я пачка состоит из функций с номерами от 2^m до $2^{m+1} - 1$. Выделим класс перестановок, которые получаются из системы Уолша–Пэли перестановкой функций только внутри пачек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Регулярной перестановкой системы Уолша (R -системой)* назовем систему функций $\{\varphi_n(x)\}$ такую, что $\varphi_0(x) \equiv 1$, $\varphi_1(x) = w_1(x)$ и множества функций $\{\varphi_{2^n}(x), \varphi_{2^n+1}(x), \dots, \varphi_{2^{n+1}-1}(x)\}$ и $\{w_{2^n}(x), w_{2^n+1}(x), \dots, w_{2^{n+1}-1}(x)\}$ совпадают для любого натурального n .

Пусть τ_m – перестановка m чисел. Последовательность $\{\tau_m\}_{m=2}^\infty$ задает перестановку τ натуральных чисел по правилу; $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$, если $n = 2^m + n_m 2^{m-1} + \dots + n_1 2^0$, то $\tau(n) = 2^m + n_{\tau_m(m)} 2^{m-1} + \dots + n_{\tau_m(1)} 2^0$. В терминах последовательностей, если $n = (n_1, n_2, \dots, n_m, 1, 0, 0, \dots) \in X_{m+1} \setminus X_m$, то $\tau(n) = (\tau_m(n_1), \tau_m(n_2), \dots, \tau_m(n_m), 1, 0, 0, \dots) \in X_{m+1} \setminus X_m$. Если представить $X_{m+1} \setminus X_m = e_{m+1} + X_m$, то τ определяет биекцию основного базиса в каждой пачке. Следуя терминологии из [9], это частный случай кусочно-линейной перестановки, каждая матрица которой получается перестановкой τ_m столбцов единичной матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Систему функций $\{\phi_n(x)\}$, где $\phi_n(x) = w_{\tau(n)}(x)$, назовем B -системой. Систему функций $\{\phi_n(x)\}$ назовем BM -системой, если для каждого $m \geq 3$ выбрано число k_m , $0 \leq k_m < 2^m$, и $\phi_{2^m+k}(x) = w_{k_m} \varphi_{2^m+k}(x)$, где $k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, и $\{\varphi_n\}$ – B -система.

ЗАМЕЧАНИЕ. B -система, для которой каждая из перестановок имеет вид $\tau_m(n) = m - n + 1$, есть система Уолша–Качмажа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Систему функций $\{\phi_n(x)\}$ назовем P -системой, если $\phi_0(x) \equiv 1$, $\phi_1(x) = w_1(x)$, $\phi_{2^n}(x) = w_{2^n+k_n}(x)$, где k_n – любое число, удовлетворяющее условию $k_n < 2^n$, $\phi_{2^n+k}(x) = \phi_{2^n}(x) \phi_k(x)$, где $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, $n = 1, 2, \dots$. Систему функций $\{\phi_n(x)\}$ назовем PM -системой, если для каждого $m = 3, 4, \dots$ выбрано число k_m , $0 \leq k_m < 2^m$, и $\phi_{2^m+k}(x) = w_{k_m} \varphi_{2^m+k}(x)$, где $k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, и $\{\varphi_n\}$ – P -система.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функции $w_{2^n+k_n}$ играют роль образующих функций P -системы такую же, как и функции Радемахера r_n в определении (1) системы Уолша–Пэли. P -системы – это регулярные TW -системы ($P = RTW$), введенные в [9]. Система Уолша–Уолша – это P -система, у которой $w_{2^n+k_n} = r_{n-1} r_{n-2}$ для всех n , т.е. $k_n = 2^{n-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. P -системы, как и TW -системы Шиппа, в общем случае в каждой пачке наследуют структуру предшествующих функций системы. Различие PM - и P -систем состоит в том, что в PM -системах нарушается структура в предшествующих пачках.

Напомним, что для системы перестановок выражения, аналогичные (2)–(4), обозначены $H_n(x)$, Λ_n и Λ_n^p соответственно. По определению регулярных перестановок $H_{2^n}(x) = D_{2^n}(x)$ и выполнено (5).

ТЕОРЕМА 1. *Константы Лебега и нормы в L^p ($1 < p < \infty$) ядер Дирихле для BM - и PM -систем совпадают с константами Лебега и нормами в L^p ядер Дирихле системы Уолша–Пэли, т.е. для всех n как $L_n = \Lambda_n$, так и $L_n^p = \Lambda_n^p$. Существуют регулярные перестановки системы Уолша такие, что константы Лебега для них отличны от констант Лебега системы Уолша–Пэли.*

ЛЕММА 5. *Для любой регулярной перестановки системы Уолша имеем*

$$\Lambda_{2^m+1} = 2 - 2^{-m}, \quad \Lambda_{2^m+2} = 2 - 2^{-(m-1)}, \quad \Lambda_{2^m+3} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2^m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сформулируем два основных утверждения.

1. Если n_k различны и $2^m \leq n_k < 2^{m+1}$, то

$$\int_{\Delta_m} \left(H_{2^m}(x) + \sum_{k=1}^r \varphi_{n_k}(x) \right) dx = 1, \quad (10)$$

причем подынтегральное выражение положительно.

2. Для любых натуральных $i \neq j$ найдутся непересекающиеся множества E_0, E_1, E_2 такие, что

$$w_i(x) + w_j(x) = \begin{cases} 0, & x \in E_0, \\ 2, & x \in E_1, \\ -2, & x \in E_2, \end{cases} \quad (11)$$

$$E_0 \cup E_1 \cup E_2 = X, |E_0| = 1/2, |E_1| = |E_2| = 1/4.$$

Так как n_k различны, в первом утверждении $r \leq 2^m$. Из условия $2^m \leq n_k < 2^{m+1}$ вытекает, что $\varphi_{n_k}(x) = 1$ при $x \in \Delta_{m+1}^0$ и $\varphi_{n_k}(x) = -1$ при $x \in \Delta_{m+1}^1$. Согласно (5) левая часть в (10) равна

$$\int_{\Delta_{m+1}^0} (2^m + r) dx + \int_{\Delta_{m+1}^1} (2^m - r) dx,$$

что равняется 1.

Предположим, что $2^m \leq i < j < 2^{m+1}$. Представим $w_i + w_j = w_i(1 + w_k)$, где $0 < k < 2^m$. Тогда

$$1 + w_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in E_0, \\ 2, & x \in X \setminus E_0, \end{cases} \quad (12)$$

где $|E_0| = 1/2$ и как E_0 , так и $X \setminus E_0$ есть объединение интервалов m -го ранга.

Интервал m -го ранга представим в виде объединения двух интервалов $(m+1)$ -го ранга Δ_{m+1}^+ и Δ_{m+1}^- таких, что $w_i(x) = 1$ при $x \in \Delta_{m+1}^+$ и $w_i(x) = -1$ при $x \in \Delta_{m+1}^-$. Тогда $E_1 = \cup \Delta_{m+1}^+$, $E_2 = \cup \Delta_{m+1}^-$ (где объединение берется по всем интервалам m -го ранга из $X \setminus E_0$) и $|E_1| = |E_2|$.

Теперь докажем второе утверждение в случае, когда берутся функции Уолша из разных пачек: $0 < i < 2^m \leq j < 2^{m+1}$. Определим $E_3 = \{x \mid x \in X, w_i(x) = +1\}$, $E_4 = X \setminus E_3$. Так как $i < 2^m$, то E_3 (как и E_4) есть объединение интервалов m -го ранга. Каждый интервал m -го ранга состоит из двух интервалов $(m+1)$ -го ранга, где $w_j(x)$ имеет разные знаки. Если $E_3^+ = \{x \mid x \in E_3, w_j(x) = +1\}$, то, как и выше, $E_3 = E_3^+ \cup E_3^-$ ($E_3^+ \cap E_3^- = \emptyset$) и $|E_3^+| = |E_3^-|$. Аналогично — с E_4 . Тогда

$$w_i(x) + w_j(x) = \begin{cases} 1 + 1, & x \in E_3^+, \\ 1 - 1, & x \in E_3^-, \\ -1 + 1, & x \in E_4^+, \\ -1 - 1, & x \in E_4^-, \end{cases}$$

где $|E_3^+| = |E_3^-| = |E_4^+| = |E_4^-| = 1/4$, $E_3^+ \cup E_3^- \cup E_4^+ \cup E_4^- = X$, и множества не пересекаются.

Используя (10), получим

$$\begin{aligned}\Lambda_{2^m+1} &= \int_X |H_{2^m}(x) + \varphi_{n_1}(x)| dx \\ &= \int_{\Delta_m} (H_{2^m}(x) + \varphi_{n_1}(x)) dx + \int_{X \setminus \Delta_m} |\varphi_{n_1}(x)| dx = 2 - 2^{-m}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\Lambda_{2^m+2} &= \int_X |H_{2^m} + \varphi_{n_1} + \varphi_{n_2}| dx \\ &= \int_{\Delta_m} |H_{2^m} + \varphi_{n_1} + \varphi_{n_2}| dx + \int_{X \setminus \Delta_m} |\varphi_{n_1}| \cdot |1 + w_k| dx,\end{aligned}$$

где $k < 2^m$ (так как φ_{n_1} и φ_{n_2} — различные функции Уолша из одной m -й пачки, то $\varphi_{n_1} = \varphi_{n_2} \cdot w_k$). Применяя (10) и (12), получим $\Lambda_{2^m+2} = 1 + 2 \cdot (1/2 - 2^{-m}) = 2 - 2^{-(m-1)}$ (так как $w_k(x) = 1$ при $x \in \Delta_m$).

Рассмотрим

$$\Lambda_{2^m+3} = \int_{\Delta_m} |H_{2^m} + \varphi_{n_1} + \varphi_{n_2} + \varphi_{n_3}| dx + \int_{X \setminus \Delta_m} |\varphi_{n_1} + \varphi_{n_2} + \varphi_{n_3}| dx.$$

Так как $|\varphi_{n_1} + \varphi_{n_2} + \varphi_{n_3}| = |\varphi_{n_1}| \cdot |1 + w_i + w_j|$, согласно (10) и (11)

$$\Lambda_{2^m+3} = 1 + \int_{E_1 \setminus \Delta_m} (1 + 2) dx + \int_{E_0} (1 + 0) dx + \int_{E_2} |1 - 2| dx = \frac{5}{2} - \frac{3}{2^m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 начнем со второго утверждения. Согласно лемме 5 различие в константах Лебега имеет смысл искать начиная с четвертого элемента в пачке. Для системы Уолша–Пэли непосредственным вычислением получаем $L_{36} = L_{18} = L_9 = 15/8$. С другой стороны, для одной из R -систем имеем

$$\begin{aligned}\Lambda_{36} &= \int_X |H_{32}(x) + w_{33}(x) + w_{34}(x) + w_{36}(x) + w_{40}(x)| dx \\ &= \int_{\Delta_5} \left| H_{2^5} + \sum_{k=1}^4 \varphi_{n_k} \right| dx + \int_{X \setminus \{\Delta_5\}} |w_{32}| \cdot |w_1 + w_2 + w_4 + w_8| dx \\ &= 1 + \int_{\Delta_5^1} |w_1 + w_2 + w_4 + w_8| dx + \sum_{i=1}^{15} \int_{\Delta_4^i} |w_1 + w_2 + w_4 + w_8| dx \\ &= 1 + \frac{1}{32} \cdot 4 + \frac{1}{16} (2 + 2 + 0 + 2 + 0 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0 + 2 + 0 + 2 + 2 + 4) = \frac{19}{8}.\end{aligned}$$

Тем самым, второе утверждение теоремы доказано.

Первое утверждение теоремы 1 достаточно доказать для B -систем и P -систем. Действительно, пусть имеем R -систему, сохраняющую константы Лебега, и для нее временно (только в этом абзаце) используем L_n и $D_k(x)$ в качестве обозначений для констант

Лебега и ядер Дирихле соответственно. Тогда для соответствующей RM -системы аналогично формуле (6) получим $H_{2^m+r} = D_{2^m} + w_{2^m+k_m} \cdot D_r$, где $0 < r, k_m < 2^m$; и, рассуждая как в лемме 5,

$$\begin{aligned} \Lambda_{2^m+r} &= \int_{\Delta_m} \left(D_{2^m}(x) + \sum_{k=1}^r \varphi_{n_k}(x) \right) dx + \int_{X \setminus \Delta_m} |w_{2^m+k_m}(x)| \cdot |D_r(x)| dx \\ &= \int_{\Delta_m} D_{2^m+r}(x) dx + \int_{X \setminus \Delta_m} |D_r(x)| dx = L_{2^m+r}. \end{aligned}$$

Для L^p -норм – аналогично.

Вернемся к стандартным обозначениям. Пусть дана B -система $\{\varphi_n(x)\}$, заданная с помощью биекции $\tau: X_\infty \rightarrow X_\infty$ такой, что $\tau = \{\tau_m\}$. Множество X_∞ , изоморфное множеству натуральных чисел, распадается на объединение непересекающихся множеств $X_\infty = X_1 \cup (\bigcup_{m=1}^\infty X_{m+1} \setminus X_m)$, соответствующее разбиению на пачки натуральных чисел. В каждой пачке $X_{m+1} \setminus X_m = e_{m+1} + X_m$ биекция τ осуществляет перестановку основного базиса $\tau(e_{m+1} + X_m) = e_{m+1} + \tau_m(X_m)$. Существует обратное отображение $\tau^{-1} = \{\tau_m^{-1}\}$, где τ_m^{-1} – подстановка, обратная τ_m , которое в каждой пачке возвращает базис в прежний порядок.

Рассмотрим действие конкретной подстановки τ_m на произвольный фиксированный элемент $x = (x_1, \dots, x_m, \dots) \in X$. Представим его в виде $x = j + y$, где $j \in X_m$, $y \in \Delta_m$. Тогда $\tau_m(x) = \tau_m(j) + y$. Тем самым, определили действие подстановки τ_m на интервал m -го ранга по правилу $\tau_m(\Delta_m^j) = \Delta_m^{\tau_m(j)}$. Итак, для введенного в п. 2 скалярного произведения получили $\langle \tau_m(k), x \rangle = \langle k, \tau_m^{-1}(x) \rangle$ при $0 \leq k < 2^m$. Так как по определению для B -системы $\varphi_{2^m+k} = w_\tau(2^m+k) = w_{2^m} \cdot w_{\tau_m(k)}$, то

$$\varphi_{2^m+k}(x) = (-1)^{x_{m+1}} \cdot (-1)^{\langle \tau_m(k), x \rangle} = (-1)^{x_{m+1}} \cdot (-1)^{\langle k, \tau_m^{-1}(x) \rangle} = w_{2^m}(x) \cdot w_k(\tau_m^{-1}(x)).$$

Тогда

$$H_{2^m+k}(x) = H_{2^m}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_{2^m+i}(x) = D_{2^m}(x) + w_{2^m}(x) \sum_{i=0}^{k-1} w_i(\tau_m^{-1}(x)),$$

т.е.

$$H_{2^m+k}(x) = D_{2^m}(x) + w_{2^m}(x) \cdot D_k(\tau_m^{-1}(x)). \quad (13)$$

Функция $H_{2^m+k}(x)$ постоянна на интервалах $(m+1)$ -го ранга. Если $x \in \Delta_m^j$, то $x \in \Delta_{m+1}^{2^j+\varepsilon}$, где $\varepsilon = x_{m+1}$. Пусть j пробегает от 0 до $2^m - 1$, т.е. переберем все возможные интервалы m -го ранга, являющиеся интервалами знакопостоянства функций Уолша с номерами $i < 2^m$. Так как $\tau_m(\Delta_m^0) = \Delta_m^0$ всегда, то $H_{2^m+k}(\Delta_{m+1}^0) = 2^m + k$, $H_{2^m+k}(\Delta_{m+1}^1) = 2^m - k$. Если $j > 0$, то формула (13) примет вид

$$H_{2^m+k}(\Delta_{m+1}^{2^j+\varepsilon}) = 0 + (-1)^\varepsilon \cdot D_k(\Delta_m^{\tau_m^{-1}(j)}),$$

т.е. $|H_{2^m+k}(\Delta_m^j)|$ пробегает те же значения, что и $|D_k(\Delta_m^j)|$ при изменении j от 1 до $2^m - 1$, но в другом порядке.

Согласно формуле (9) первое утверждение теоремы справедливо для B -систем.

Пусть дана P -система $\{\varphi_n(x)\}$, заданная системой образующих функций $\{w_{2^m+k_m}\}$, где $0 \leq k_m < 2^m$. Тогда $\varphi_{2^m} = w_{2^m} \cdot w_{k_m}$ и

$$H_{2^m+r} = H_{2^m} + \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{2^m+i} = H_{2^m} + \varphi_{2^m} \cdot H_r$$

при $r < 2^m$. Так как $\varphi_{2^m}(x) = w_{2^m}(x)$ при $x \in \Delta_m^0$, то $H_{2^m+r}(\Delta_{m+1}^0) = 2^m + r$, $H_{2^m+r}(\Delta_{m+1}^1) = 2^m - r$. Если $x \in \Delta_m^j$, где $j > 0$, то $H_{2^m+r}(x) = \varphi_{2^m}(x) \cdot H_r(x)$ и при изменении j от 1 до $2^m - 1$ выражение $|H_{2^m+r}(\Delta_m^j)|$ пробегает те же значения, что и $|H_r(\Delta_m^j)|$. Сравнение с леммой 2 и формулой (9) завершает доказательство теоремы.

5. Основная теорема для TW -систем Шиппа. Примером нерегулярных систем перестановок системы Уолша, для которых справедлива теорема из предыдущего пункта, служат TW -системы. В [9] TW -система $\{\varphi_n(x)\}$ определяется с помощью взаимно-однозначного $\mathbb{Z}_2$ -линейного соответствия $T: X_\infty \rightarrow X_\infty$ через функции системы Уолша–Пэли равенством $\varphi_n(x) = w_{T(n)}(x)$. При этом отображение T задается матрицей бесконечного порядка из нулей и единиц, столбцы которой есть образ в X_∞ соответствующего вектора основного базиса. Далеко не каждая подобная матрица определяет биективное отображение. Примером матрицы T , задающей биективное отображение в X_∞ , является верхнетреугольная матрица, у которой все элементы главной диагонали – единицы, а ниже главной диагонали нули. Верхнетреугольная матрица определяет P -систему, и, наоборот, любая P -система задается верхнетреугольной матрицей. В [14] отмечено, что необходимое и достаточное условие биективности линейного отображения T является линейная независимость и полнота столбцов матрицы T .

Дадим другое, эквивалентное определение TW -систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Систему функций Уолша $\{\varphi_n(x)\}$ назовем TW -системой, если $\varphi_0(x) \equiv 1$; $\varphi_1(x) = w_{k_0}(x)$, где k_0 – любое натуральное число; для каждого натурального m определим $\varphi_{2^m}(x) = w_{k_m}(x)$, где k_m таково, что функция w_{k_m} не встречается среди набора функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{2^m-1}\}$, а $\varphi_{2^m+k}(x) = \varphi_{2^m}(x) \cdot \varphi_k(x)$ для всех $k = 1, 2, \dots, 2^m - 1$. Причем последовательность образующих функций $w_{k_m}(x)$ (аналогичная функциям Радемахера в определении (1) системы Уолша–Пэли) такова, что любая из функций Уолша присутствует в системе $\{\varphi_n(x)\}$.

В определении выделены два требования к числам k_m . Первое из них соответствует линейной независимости столбцов матрицы T , а второе – полноте. Числа k_m как элементы пространства X_∞ и есть столбцы матрицы T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Последовательность $\{k_m\}$ элементов пространства X_∞ называется *линейно независимой* в X_∞ , если сумма любого конечного набора элементов последовательности не равна 0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Последовательность $\{k_m\}$ элементов пространства X_∞ называется *полной* в X_∞ , если любой ненулевой $x \in X_\infty$ представим в виде конечной суммы элементов этой последовательности.

Если столбцы матрицы T – элементы пространства X_∞ , то строки – элементы X .

Для любой функции Уолша $w_k(x)$ существуют два множества I^0, I^1 такие, что $w_k(I^0) = +1$, $w_k(I^1) = -1$. Каждое множество есть объединение интервалов некоторого фиксированного ранга и $I^0 \cup I^1 = X$. Аналогично, для любого упорядоченного конечного набора $k_1, \dots, k_m$ элементов пространства X_∞ все пространство X разбивается на

2^m множеств $I^0, I^1, \dots, I^{2^m-1}$, упорядоченных следующим образом. Если номер множества (верхний индекс) запишем в виде $n = (n_1, n_2, \dots, n_m, 0, 0, \dots) \in X_m \subset X_\infty$, то $w_{k_i}(x) = (-1)^{n_i}$ при $x \in I^n$ для всех $1 \leq i \leq m$. Данные множества не пересекаются (возможно, отдельные множества пусты) и состоят из объединения интервалов некоторого фиксированного ранга.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Набор множеств $\{I^0, I^1, \dots, I^{2^m-1}\}$, упорядоченный сформулированным выше образом, назовем *совокупностью знакопостоянства*, порожденной (упорядоченным) набором $k_1, \dots, k_m$ элементов пространства X_∞ .

Запись n в виде элемента из X_∞ является как бы индикатором порождающего набора: 1 на i -м месте в n означает, что функция Уолша с номером k_i отрицательна на данном множестве.

ЛЕММА 6. Если набор $k_1, k_2, \dots, k_m$ линейно независим в X_∞ , то набор $k_1 + k_2, k_2, \dots, k_m$ тоже линейно независим в X_∞ и их совокупности знакопостоянства отличаются перестановкой элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение легко доказывается методом от противного.

Сумма $k_1 + k_2$ понимается как покоординатное сложение по модулю 2 элементов пространства X_∞ . Так как

$$w_{k_1+k_2}(x) = (-1)^{\langle k_1+k_2, x \rangle} = (-1)^{\langle k_1, x \rangle} \cdot (-1)^{\langle k_2, x \rangle} = w_{k_1}(x) \cdot w_{k_2}(x),$$

то $w_{k_1+k_2}(x) = w_{k_1}(x) \cdot (-1)^{n_2}$ при $x \in I^n$, где $n = (n_1, n_2, \dots, n_m, 0, 0, \dots) \in X_\infty$. Если $n_2 = 0$, то множества I^n остаются на месте при переходе от первого порождающего набора ко второму. Если $n_2 = 1$, то каждое из множеств I^n , у которых $n_1 = 0$ ($n_1 = 1$), меняется местами с множеством, у которого $n_1 = 1$ ($n_1 = 0$), а остальные координаты те же.

ЛЕММА 7. Меры Хаара элементов любой совокупности знакопостоянства $\{I^0, I^1, \dots, I^{2^m-1}\}$, порожденной линейно независимым набором $k_1, k_2, \dots, k_m \in X_\infty$, совпадают, т.е. $|I^n| = 2^{-m}$ для любого n ($0 \leq n < 2^m$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом математической индукции. База индукции для двух элементов, по существу, доказана в лемме 5. Предположим, что для любых порождающих наборов из m элементов лемма 7 верна. Рассмотрим произвольный линейно независимый набор $k_0, k_1, \dots, k_m \in X_\infty$. Для определенности положим (для некоторого j), что $k_0, k_1, \dots, k_l \in X_j \setminus X_{j-1}$, а $k_{l+1}, \dots, k_m \notin X_j$, т.е. отделены все элементы старшей пачки. По лемме 6 совокупности знакопостоянства, порожденные набором $k_0, k_1, \dots, k_m$ и набором $k_0, k_1 + k_0, \dots, k_l + k_0, k_{l+1}, \dots, k_m$, состоят из одинаковых элементов. Но в последнем порождающем наборе только одно число из старшей пачки. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что при переходе от набора $k_1, k_2, \dots, k_m$ к набору $k_0, k_1, k_2, \dots, k_m$ добавляем k_0 такое, что $k_0 \in X_j \setminus X_{j-1}$, а $k_1, k_2, \dots, k_m \in X_{j-1}$. Тогда каждое множество I^n , где $n = 0, \dots, 2^m - 1$, для которого верно предположение индукции, есть объединение интервалов $(j-1)$ -го ранга. Так как каждый интервал $(j-1)$ -го ранга есть объединение двух непересекающихся равновеликих интервалов j -го ранга, то для любого I^n , где $n = 0, \dots, 2^m - 1$, имеем $I^n = I_+^n \cup I_-^n$, где $|I_+^n| = |I_-^n|$, $I_+^n \cap I_-^n = \emptyset$, а $w_{k_0}(I_+^n) = +1$, $w_{k_0}(I_-^n) = -1$. Значит, утверждение леммы верно для $m+1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что упорядоченный набор интервалов m -го ранга $\{\Delta_m^0, \dots, \Delta_m^{2^m-1}\}$ является совокупностью знакопостоянства, порожденной упорядоченным набором $2^{m-1}, 2^{m-2}, \dots, 2^0$. В лемме 7 на самом деле доказано более сильное утверждение: для любой линейно независимой последовательности $\{k_m\}$ элементов X_∞ однозначно определяется последовательность, состоящая из совокупностей знакопостоянства вида $\{I_m^0, I_m^1, \dots, I_m^{2^m-1}\}$, порожденных упорядоченным набором $k_{m-1}, k_{m-2}, \dots, k_1, k_0$, удовлетворяющих лемме 7 и таких, что $I_m^j = I_{m+1}^{2j} \cup I_{m+1}^{2j+1}$.

ЛЕММА 8. Для TW -систем

$$H_{2^m}(x) = \prod_{k=0}^{m-1} (1 + \varphi_{2^k}(x))$$

и для каждого m существует множество $E_m \subset X$ такое, что $|E_m| = 2^{-m}$ и

$$H_{2^m}(x) = \begin{cases} 2^m, & \text{если } x \in E_m, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus E_m. \end{cases} \quad (5')$$

СЛЕДСТВИЕ. Имеем $\Lambda_{2^m} = 1$, $\Lambda_{2^m}^p = 2^{m(p-1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8. Первое утверждение доказывается по индукции аналогично (см. [7]) формуле

$$D_{2^m}(x) = \prod_{k=0}^{m-1} (1 + r_k(x))$$

для системы Уолша–Пэли. Множество E_m есть множество I^0 совокупности знакопостоянства, порожденной набором $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$, где $\varphi_{2^i}(x) = w_{k_i}(x)$. Для остальных множеств $I^1, \dots, I^{2^m-1}$ хотя бы один сомножитель $(1 + \varphi_{2^k}(x))$ обращается в 0 при $x \in I^n$.

ЛЕММА 9. Для TW -систем при $0 \leq k < 2^m$ имеем

$$H_{2^m+k}(x) = H_{2^m}(x) + \varphi_{2^m}(x) \cdot H_k(x). \quad (6')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично (см. [7]) доказательству формулы (6):

$$H_{2^m+k} = H_{2^m} + \sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{2^m+n} = H_{2^m} + \varphi_{2^m} \sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n = H_{2^m} + \varphi_{2^m} \cdot H_k.$$

ЛЕММА 10. Для TW -систем при $0 \leq k < 2^m$ имеем $|H_{2^m+k}(x)| = |D_{2^m+k}(y)|$, если $x \in I_{m+1}^j$, $y \in \Delta_{m+1}^j$, а I_{m+1}^j – множество совокупности знакопостоянства, порожденной набором $k_m, k_{m-1}, \dots, k_1, k_0$ таким, что $\varphi_{k_0}(x), \varphi_{k_1}(x), \dots, \varphi_{k_m}(x)$ – начальные образующие функции TW -системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как из (5), (6) получались формулы (7), (8), из (5'), (6') получаем

$$H_{2^m+k}(x) = \begin{cases} 2^m + k, & \text{если } x \in I_{m+1}^0, \\ 2^m - k, & \text{если } x \in I_{m+1}^1, \end{cases} \quad (7')$$

$$|H_{2^m+k}(x)| = |H_k(x)|, \quad \text{если } x \in I_{m+1}^j, 2 \leq j < 2^{m+1}. \quad (8')$$

Далее рассуждаем как в лемме 2 с заменой Δ_{m+1}^j на I_{m+1}^j .

Повторяя доказательство леммы 3, заметим, что для TW -систем справедлива формула (9), если в описании заменить интервалы m -го ранга Δ_{m+1}^j на I_{m+1}^j — соответствующие множества соответствующей совокупности знакопостоянства. Тем самым, доказана основная теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Константы Лебега TW -систем совпадают с константами Лебега системы Уолша–Пэли и, более того, $\Lambda_n^p = L_n^p$ для всех n и для всех $1 < p < \infty$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Paley R. E. A. C. A remarkable system of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc. 1932. V. 34. P. 241–279.
- [2] Fine N. J. On the Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 65. № 3. P. 372–414.
- [3] Walsh J. L. A closed set of normal orthogonal functions // Amer. J. Math. 1923. V. 45. P. 5–24.
- [4] Левизов С. В. Некоторые свойства системы Уолша // Матем. заметки. 1980. Т. 27. № 5. С. 715–720.
- [5] Балашов Л. А., Рубинштейн А. И. Ряды по системе Уолша и их обобщения // Итоги науки. Матем. анализ. 1970. М.: ВИНТИ, 1971. С. 147–202.
- [6] Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку: Элм, 1981.
- [7] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987.
- [8] Schipp F., Wade W. R., Simon P., Pál J. Walsh Series an Introduction to Diadic Harmonic Analysis. Budapest: Akad. Kiadó, 1990.
- [9] Шипп Ф. О некоторых перестановках рядов по системе Уолша // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 193–201.
- [10] Шнейдер А. А. О рядах по функциям Вальша с монотонными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Т. 12. С. 179–192.
- [11] Балашов Л. А. О рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами // Сиб. матем. ж. 1971. Т. 12. № 1. С. 25–30.
- [12] Беспалов М. С. Константы Лебега для перестановок системы Уолша // Алгебра и анализ. Материалы конференции, посвященной 100-летию Б. М. Гагаева. Казань, 1997. С. 33–34.
- [13] Беспалов М. С. Ядра Дирихле и константы Лебега для системы Крестенсона–Леви // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докл. 8-й Саратовской зимней школы. Саратов: СГУ, 1996. С. 17–18.
- [14] Беспалова А. Г. Линейные биекции в пространствах последовательностей // VI Международная конференция женщин-математиков. Математика. Образование. Экономика. Тезисы докл. Чебоксары, 1998. С. 25.