Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Чшиев, Теорема Герхарда–Прюсса для некоторого класса вырожденных полугрупп операторов, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 3, 426–440

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:33:10

Теорема Герхарда–Прюсса

для некоторого класса вырожденных полугрупп операторов

А. Г. Чшиев

В работе рассматривается некоторый класс полугрупп операторов, действующих в гильбертовом пространстве, в качестве генераторов которых выступают линейные отношения. Получен аналог теоремы Герхарда–Прюсса для полугрупп операторов рассматриваемого класса.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm9174

1. Введение. Пусть X – комплексное гильбертово пространство и $\text{End } X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Всюду в данной работе через T обозначена *полугруппа операторов* $T: (0, \infty) \rightarrow \text{End } X$, которая понимается в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Полугруппой операторов*, действующих в X , называется сильно непрерывная операторнозначная функция $T: (0, \infty) \rightarrow \text{End } X$ такая, что $T(t+s) = T(t)T(s)$ при всех $t, s > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [1; с. 316]. *Инфинитезимальным оператором* полугруппы T называется оператор

$$A_0: D(A_0) \subset X \rightarrow X, \\ D(A_0) = \left\{ x \in X : \text{существует } \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}, \quad A_0x = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

В случае полугруппы класса (C_0) , т.е. если $T(0) = I$ и $\lim_{t \rightarrow 0+} T(t)x = x$ для любого $x \in X$, имеет место следующая принадлежащая Герхарду [2], Прюссу [3] (см. также [4; теорема V.1.11])

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X – гильбертово пространство, и пусть T есть полугруппа операторов класса (C_0) . Тогда условие*

$$\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00276).

эквивалентно одновременному выполнению условий

$$\sigma(A_0) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \quad \text{и} \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, A_0)\|_{\text{End } X} = M_0 < \infty, \quad (1.2)$$

где $\sigma(T(1))$ – спектр оператора $T(1)$, $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, и $\sigma(A_0)$ – спектр инфинитезимального оператора A_0 полугруппы T .

Отметим, что для общего банахова пространства условие (1.2) необходимо, но не достаточно [4; с. 304] для выполнения условия (1.1).

Целью данной работы является обобщение теоремы 1 на более широкий класс полугрупп операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Рассматриваемая полугруппа T может быть вырожденной (см. определение 5) и удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \|T(t)\|_{\text{End } X}^2 dt < \infty. \quad (1.3)$$

В условии (1.2) инфинитезимальный оператор A_0 заменяется на генератор $\mathbb{A}_c$ (см. определение 8) полугруппы T , так как генератор $\mathbb{A}_c$ является в этом случае базовым (см. определение 7), а спектр $\sigma(A_0)$ инфинитезимального оператора A_0 может заполнять всю комплексную плоскость, в связи с чем его исполнение невозможно. Соответствующий результат получен в теореме 4.

2. Некоторые понятия и сведения из теории линейных отношений и полугрупп операторов. Приведем ряд широко используемых в работе определений [5], [6] из теории линейных отношений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Любое линейное подпространство $\mathcal{A}$ из декартова произведения $X \times X$ называется *линейным отношением* на пространстве X . Линейное отношение называется *замкнутым*, если $\mathcal{A}$ замкнуто в $X \times X$. Множество всех линейных отношений на X обозначим через $LR(X)$. *Областью определения* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется подпространство

$$D(\mathcal{A}) = \{x \in X : \text{существует } y \in X \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\}.$$

Через $\mathcal{A}x$, $x \in D(\mathcal{A})$, обозначим множество $\{y \in X : (x, y) \in \mathcal{A}\}$. *Ядро* отношения $\mathcal{A}$, т.е. множество $\{x \in D(\mathcal{A}) : (x, 0) \in \mathcal{A}\}$, обозначим $\text{Ker } \mathcal{A}$, а его *область значений*

$$\{y \in X : \text{существует } x \in D(\mathcal{A}) \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\}$$

через $\text{Im } \mathcal{A}$. Отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ *перестановочно* с оператором $B \in \text{End } X$, если $(Bx, By) \in \mathcal{A}$ для всех $(x, y) \in \mathcal{A}$. *Суммой* двух отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(X)$ назовем подпространство из $X \times X$ вида

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x, y) \in X \times X : x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}), y = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\},$$

где под $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ понимается алгебраическая сумма двух подмножеств $\mathcal{A}x$, $\mathcal{B}x$. *Обратным* к линейному отношению $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется линейное отношение $\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in X \times X : (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется *инъективным*, если $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$, и *сюръективным*, если $\text{Im } \mathcal{A} = X$. Замкнутое линейное отношение $\mathcal{A}$ называется *непрерывно обратимым*, если $\mathcal{A}$ одновременно инъективно и сюръективно, и тогда $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Резольвентным множеством* замкнутого линейного отношения $\mathcal{A}$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \text{End } X$. *Спектром* замкнутого линейного отношения $\mathcal{A}$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$. Отображение

$$R(\cdot, \mathcal{A}): \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } X,$$

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1},$$

называется *резольвентой* замкнутого линейного отношения $\mathcal{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что для полугруппы T инфинитезимальный оператор A_0 может быть незамкнутым и даже не замыкаемым в классе операторов. Тогда $\overline{A_0}$ является линейным отношением. Условия незамыкаемости и условия замкнутости инфинитезимального оператора описаны в статье [7]. В [6] производится обобщение понятия *инфинитезимального оператора* до понятия *генератора полугруппы*, который может быть как оператором, так и отношением. При этом, в [6] осуществляется пересмотр большинства результатов, касающихся различных классов полугрупп, рассмотренных в [1].

Согласно [6] введем в рассмотрение следующие подпространства из X :

$$\text{Ker } T = \{x \in X : T(t)x = 0, t > 0\} - \text{ядро полугруппы } T;$$

$$\text{Im } T = \bigcup_{t>0} \text{Im } T(t) - \text{образ полугруппы } T;$$

$$X_1(T) = \left\{ x \in X : \int_0^1 \|T(t)x\|_X dt < \infty \right\}, \quad X_c(T) = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x\}.$$

Следуя терминологии из [6], введем ряд понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если $\text{Ker } T \neq \{0\}$, то полугруппа T называется *вырожденной*. Иначе, полугруппа T называется *невыврожденной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Строгим инфинитезимальным оператором* полугруппы T назовем линейный оператор

$$\mathbb{A}_0: D(\mathbb{A}_0) \subset X \rightarrow X,$$

$$D(\mathbb{A}_0) = \{x \in D(A_0) : A_0x \in X_c(T)\}, \quad \mathbb{A}_0x = A_0x, \quad x \in D(\mathbb{A}_0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Старшим генератором* полугруппы T называется отношение $\mathbb{A} \in LR(X)$, состоящее из пар $(x, y) \in X \times X$ со свойствами:

- 1) $x \in \overline{\text{Im } T}$;
- 2) верны равенства

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)y d\tau \quad \text{для } 0 < s \leq t < \infty.$$

Генератором полугруппы T называется отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $\mathbb{A}_0 \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{A}$;
- 2) $\mathcal{A}$ перестановочно с операторами $T(t)$, $t > 0$.

Генератор $\mathcal{A}$ называется *базовым*, если $\rho(\mathcal{A})$ содержит полуплоскость $\mathbb{C}_w = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda > w\}$ для некоторого $w \in \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Генератор $\mathbb{A}_c \in LR(X)$ полугруппы T определяется равенством $\mathbb{A}_c = \mathbb{A} \cap (X_c(T) \times X)$.

Множество всех генераторов полугруппы T обозначим $\text{Gen}(T)$. Тогда $\mathbb{A}_0, A_0, \mathbb{A}_c, \mathbb{A} \in \text{Gen}(T)$.

В работе используются ряд нижеследующих утверждений. Лемма 1 формулируется для полугруппы класса (E).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 [1; с. 524]. Пусть $\overline{X_1(T)} = X$ и операторы

$$R(\lambda): X_1(T) \rightarrow X, \quad \text{Re } \lambda > w(T),$$

$$R(\lambda)x = - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau$$

ограничены на $X_1(T)$ по норме пространства X . Тогда полугруппа T относится к классу (E). Число $w(T)$ называется *типом полугруппы T* и определяется как

$$w(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\|_{\text{End } X}.$$

ЛЕММА 1 [6; теорема 7]. Пусть T – полугруппа операторов класса (E), и пусть $X_1(T) = X$. Тогда генератор $\mathbb{A}_c \in \text{Gen}(T)$ является базовым, $\mathbb{C}_{w(T)} \subset \rho(\mathbb{A}_c)$ и

$$R(\lambda, \mathbb{A}_c)x = - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau, \quad x \in X, \quad \lambda \in \mathbb{C}_{w(T)}. \quad (2.1)$$

Отметим, что здесь и далее несобственные интегралы понимаются в смысле главного значения (по Коши).

ЛЕММА 2. Для всех $t \geq 1$ верна оценка

$$\|T(t)\|_{\text{End } X} \leq Me^{\gamma t}, \quad \text{где } M \geq 1, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сильной непрерывности полугруппы T и принципа равномерной ограниченности имеем

$$\sup_{t \in [1, 2]} \|T(t)\|_{\text{End } X} \leq M, \quad \text{где } 1 \leq M < \infty.$$

Для любого $t \geq 1$ имеем $t = s + n$, где $s \in [1, 2]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|T(t)\|_{\text{End } X} \leq \|T(s)\|_{\text{End } X} \|T(n)\|_{\text{End } X} \leq M^{n+1} = Me^{n \ln M} \leq Me^{t\gamma},$$

где $\gamma := \ln M$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для спектрального радиуса $r(T(t))$ оператора $T(t)$, $t > 0$, имеет место равенство

$$r(T(t)) = e^{w(T)t}, \quad t > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любого $t_0 > 0$ и $n \in \mathbb{N}$

$$w(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(nt_0)\|}{nt_0} = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(t_0)^n\|^{1/n} \right)^{1/t_0} = \frac{\ln r(T(t_0))}{t_0},$$

то $r(T(t_0)) = e^{w(T)t_0}$, $t_0 > 0$. Лемма доказана.

Из леммы 3 заключаем, что если $r(T(1)) < 1$, то $w(T) < 0$. Поэтому в этом случае для всех $t \geq 1$ имеет место оценка

$$\|T(t)\|_{\text{End } X} \leq Me^{\gamma t}, \quad \text{где } M \geq 1, \quad \gamma < 0.$$

ЛЕММА 4 [1; с. 320]. Функция $\xi: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\xi(t) = \|T(t)\|_{\text{End } X}$ измерима.

ЛЕММА 5. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}, X)$. Тогда функция $\xi: (0, \infty) \rightarrow X$, $\xi(s) = T(s)f(s)$ измерима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}, X)$. Тогда существует [1; определение 3.5.4] последовательность $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ измеримых счетнозначных функций $f_n: \mathbb{R} \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, почти всюду сходящаяся к f . Функция $\xi_n: (0, \infty) \rightarrow X$, $\xi_n(s) = T(s)f_n(s)$, $n \in \mathbb{N}$, измерима (в силу сильной непрерывности полугруппы T). Из оценки

$$\|\xi_n(s) - \xi(s)\|_X \leq \|T(s)\|_{\text{End } X} \|f_n(s) - f(s)\|_X, \quad s > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

следует, что функция ξ есть поточечный предел последовательности измеримых функций, и поэтому является измеримой [1; теорема 3.5.4]. Лемма доказана.

3. Экспоненциальная дихотомия для полугруппы рассматриваемого класса. Далее через $L^2(\mathbb{R}, X)$ обозначено пространство измеримых по Бохнеру и суммируемых функций $x: \mathbb{R} \rightarrow X$, для которых

$$\|x\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Через $l^2(\mathbb{Z}, X)$ обозначено пространство двусторонних векторных последовательностей $x: \mathbb{Z} \rightarrow X$, для которых

$$\|x\|_{l^2} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|_X^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Обозначим через $C_c(\mathbb{R}, X)$ множество непрерывных функций $x: \mathbb{R} \rightarrow X$ с компактным носителем. Тогда $\overline{C_c(\mathbb{R}, X)} = L^2(\mathbb{R}, X)$.

Далее в работе считается выполненным

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Полугруппа T удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \|T(t)\|_{\text{End } X}^2 dt < \infty.$$

Введем понятие экспоненциальной дихотомии для полугруппы рассматриваемого класса. Для случая полугруппы класса (C_0) см. [8], [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, где $\sigma(T(1))$ – спектр оператора $T(1)$, $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Тогда полугруппа T называется гиперболической или допускающей экспоненциальную дихотомию.

Далее иногда используется

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Полугруппа $T: (0, \infty) \rightarrow \text{End } X$ допускает экспоненциальную дихотомию.

В п. 3 считается, что полугруппа T допускает экспоненциальную дихотомию. Тогда $\sigma(T(1)) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}$, где

$$\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(T(1)) : |\lambda| < 1\}, \quad \sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(T(1)) : |\lambda| > 1\}$$

есть замкнутые подмножества из $\mathbb{C}$. По спектральной компоненте σ_{int} построим [10; с. 34] проектор Рисса $P_- \in \text{End } X$, определенный формулой

$$P_- x = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} R(\lambda, T(1)) x d\lambda, \quad x \in X. \quad (3.1)$$

Через P_+ обозначим дополнительный проектор $I - P_-$ и положим $X_- = \text{Im } P_-$ и $X_+ = \text{Im } P_+$. Тогда $X = X_- \oplus X_+$. Подпространства $X_{\pm}$ инвариантны относительно оператора $T(1)$, и

$$T(1) = T_-(1) \oplus T_+(1),$$

где $T_{\pm}(1) = T(1)|_{X_{\pm}}$ соответственно, причем $\sigma(T_-(1)) = \sigma_{\text{int}}$, $\sigma(T_+(1)) = \sigma_{\text{out}}$ [10; с. 34]. Значит, $r(T_-(1)) < 1$ и $r(T_+(1)) > 1$, где через $r(T_{\pm}(1))$ обозначены спектральные радиусы операторов $T_{\pm}(1)$. Оператор $T_+(1)$ обратим и $r(T_+^{-1}(1)) < 1$. Обозначим $T_-(t) = T(t)|_{X_-}$, $t > 0$, и $T_+(t) = T(t)|_{X_+}$, $t > 0$. Тогда

$$T(t) = T_-(t) \oplus T_+(t), \quad t > 0.$$

Функции $T_- : (0, \infty) \rightarrow \text{End } X_-$ и $T_+ : (0, \infty) \rightarrow \text{End } X_+$ образуют полугруппы операторов в X_- и X_+ соответственно. Операторы $T_+(t)$, $t > 0$, непрерывно обратимы (так как обратим $T_+(1)$); поэтому, полагая $T_+(-t) = T_+(t)^{-1}$, $t > 0$, и $T_+^{-1}(0) = P_+$, имеем группу операторов $T_+ : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X_+$ класса (C_0) . Значит, полугруппа $T_+^{-1} : [0, \infty) \rightarrow \text{End } X_+$ принадлежит классу (C_0) . Так как $w(T_+^{-1}) < 0$, то для всех $t \geq 0$ имеет место оценка

$$\|T_+^{-1}(t)\|_{\text{End } X_+} \leq M_+ e^{-\gamma_+ t}, \quad \text{где } M_+ \geq 1, \quad \gamma_+ > 0.$$

Так как $w(T_-) < 0$, для всех $t \geq 1$ из леммы 2 следует оценка

$$\|T_-(t)\|_{\text{End } X_-} \leq M_- e^{-\gamma_- t}, \quad \text{где } M_- \geq 1, \quad \gamma_- > 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} \|T_+^{-1}(t)\|_{\text{End } X}^2 dt < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} \|T_-(t)\|_{\text{End } X}^2 dt < \infty,$$

где для последней оценки учитывается предположение 1.

В работе используется функция (Грина)

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X, \quad G(t) = \begin{cases} -T_-(t)P_-, & t > 0, \\ T_+^{-1}(-t)P_+, & t \leq 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

для случая полугруппы класса (C_0) см. [8], [9]. По лемме 4 функция $t \mapsto \|G(t)\|_{\text{End } X} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ измерима. Ввиду экспоненциального убывания на бесконечности функции G и предположения 1 имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G(t)\|_{\text{End } X} dt = K < \infty.$$

4. Теорема Герхарда–Прюсса. Доказательство теоремы 4 основано на установлении эквивалентности каждого из условий (4.7) и (4.8) непрерывной обратимости дифференциального отношения $\mathcal{L}_0 \in LR(L^2(\mathbb{R}, X))$, которое определяется следующим образом. Пара функций (x, f) принадлежит $\mathcal{L}_0$, если для почти всех $t > s$ из $\mathbb{R}$ верны равенства

$$x(t) = T(t-s)x(s) - \int_s^t T(t-\tau)f(\tau) d\tau. \quad (4.1)$$

В свою очередь, непрерывная обратимость дифференциального отношения $\mathcal{L}_0$ эквивалентна обратимости разрядного оператора

$$D_0: l^2(\mathbb{Z}, X) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}, X), \\ (D_0x)(n) = x(n) - T(1)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, используется идея доказательства, примененная в статье [8] для нового (с использованием разностных операторов) доказательства теоремы 1.

Дифференциальное отношение $\mathcal{L}_0$ рассматривалось в [11]. Для случая полугруппы класса (C_0) оператор $\mathcal{L}_0$ рассматривался в [8], [9], [12], [13].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следует отметить, что равенства (4.1) понимаются на представителях класса. Так как $(0, f) \in \mathcal{L}_0$ для функций $f \in L^2(\mathbb{R}, X)$ со значениями в $\text{Ker } T$, то $\mathcal{L}_0$ является отношением в случае вырожденной полугруппы T .

ЛЕММА 6 [1; теорема 3.8.3]. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}, X)$. Тогда

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^b \|f(\tau + \alpha) - f(\tau)\|_X^2 d\tau = 0, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}, \quad -\infty < a \leq b < \infty.$$

Заметим, что задача о непрерывной обратимости отношения $\mathcal{L}_0$ равносильна существованию и единственности решения задачи

$$x(s) = x_s \in D(\mathbb{A}_c)$$

для дифференциального включения:

$$\dot{x}(t) \in \mathbb{A}_c x(t) + f(t), \quad t > s, \quad (4.2)$$

для каждого фиксированного $s \in \mathbb{R}$ и пары $(x, -f) \in \mathcal{L}_0$.

ЛЕММА 7. Отношение $\mathcal{L}_0$ является замкнутым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем замкнутость отношения $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_0 - \alpha I$, для $\alpha > \gamma$, где γ взята так, что выполняется оценка из леммы 2. Пусть $(x_m, f_m) \in \mathcal{L}_\alpha$, $m \in \mathbb{N}$, и $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f_0$. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ и почти всех $s < t$ из $\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$x_m(t) = T_\alpha(t-s)x_m(s) - \int_s^t T_\alpha(t-\tau)f_m(\tau) d\tau, \quad (4.3)$$

где $T_\alpha(u) = T(u)e^{-\alpha u}$, $u > 0$, есть полугруппа операторов, соответствующая отношению $\mathcal{L}_\alpha$. Так как

$$\left\| \int_s^t T_\alpha(t-\tau)(f_m(\tau) d\tau - f_0(\tau)) d\tau \right\|_X \leq \left(\int_0^\infty \|T_\alpha(\tau)\|_{\text{End } X}^2 d\tau \right)^{1/2} \|f_m - f_0\|_{L^2},$$

переходя в равенстве (4.3) к пределу при $t \rightarrow \infty$, получаем, что пара (x_0, f_0) для почти всех $s < t$ из $\mathbb{R}$ удовлетворяет равенству (4.1). Следовательно, $(x_0, f_0) \in \mathcal{L}_\alpha$. Из замкнутости $\mathcal{L}_\alpha$ следует замкнутость $\mathcal{L}_0$. Лемма доказана.

Для оператора D_0 справедлива следующая

ЛЕММА 8 [13]. *Оператор D_0 обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие (4.7).*

В последующих двух леммах устанавливается равносильность непрерывной обратимости отношения $\mathcal{L}_0$ и обратимости оператора D_0 .

ЛЕММА 9. *Пусть линейное отношение $\mathcal{L}_0$ непрерывно обратимо. Тогда разностный оператор D_0 обратим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Инъективность.* Если $x_0 \in \text{Ker } D_0$, то

$$x_0(n) = T(1)x_0(n-1) \quad \text{для } n \in \mathbb{Z}.$$

Из инъективности $\mathcal{L}_0$ следует, что $x_0 = 0$.

Сюръективность. Пусть $g \in l^2(\mathbb{Z}, X)$. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f: [n-1, n] &\rightarrow X, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ f(t) &= -T(t+1-n)g(n-1). \end{aligned}$$

Тогда $f \in L^2(\mathbb{R}, X)$. Положим $x = \mathcal{L}_0^{-1}f$. Тогда $x \in D(\mathcal{L}_0)$. Из равенств (4.1) при $t = n$ и $s = n-1$, $n \in \mathbb{Z}$, имеем

$$x(n) = T(1)x(n-1) + T(1)g(n-1).$$

Следовательно, $D_0(x_{\mathbb{Z}} + g) = g$, где $x_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \rightarrow X$ есть сужение функции x на $\mathbb{Z}$. Покажем, что $x_{\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}, X)$. Используя равенства (4.1) (при $t = n$), для $n \in \mathbb{Z}$ получаем

$$\|x(n)\|_X \leq \|T(n-s)\|_{\text{End } X} \|x(s)\|_X + \|T(1)\|_{\text{End } X} \|g(n-1)\|_X, \quad s \in [n-1, n].$$

Интегрируя по s на отрезке $[n-1, n]$, используя неравенство Гёльдера, и производя замену переменной, получаем

$$\|x(n)\|_X \leq \left(\int_0^1 \|T(s)\|_{\text{End } X}^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{n-1}^n \|x(s)\|_X^2 ds \right)^{1/2} + \|T(1)\|_{\text{End } X} \|g(n-1)\|_X.$$

Из неравенства $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, верного для любых $a, b \geq 0$, имеем

$$\|x_{\mathbb{Z}}\|_{l^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|_X^2 \leq 2 \int_0^1 \|T(s)\|_{\text{End } X}^2 ds \|x\|_{L^2}^2 + 2 \|T(1)\|_{\text{End } X}^2 \|g\|_{l^2}^2.$$

Значит, $x_{\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}, X)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. *Пусть разностный оператор D_0 обратим. Тогда линейное отношение $\mathcal{L}_0$ непрерывно обратимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инъективность. Пусть $x \in \text{Ker } \mathcal{L}_0$. Тогда из (4.1) (при $t = n$, $s = n - 1$) и инъективности D_0 следует, что $x(n) = 0$ для $n \in \mathbb{Z}$. Снова из (4.1) (при $s = n$) получаем: $x(t) = 0$ для $t \in (n, n + 1]$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$. Значит, $x = 0$.

Сюръективность. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}, X)$. Рассмотрим функцию

$$f_d: \mathbb{Z} \rightarrow X, \\ f_d(n) = - \int_{n-1}^n T(n - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Так как

$$\|f_d\|_{l^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f_d(n)\|_X^2 \leq \int_0^1 \|T(\tau)\|_{\text{End } X}^2 d\tau \|f\|_{L^2}^2,$$

то $f_d \in l^2(\mathbb{Z}, X)$. Пусть $x_0 = D_0^{-1} f_d \in l^2(\mathbb{Z}, X)$. Рассмотрим функцию

$$x: [n, n + 1] \rightarrow X, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x(t) = T(t - n)x_0(n) - \int_n^t T(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Покажем, что $(x, f) \in \mathcal{L}_0$. Положим

$$g_1: [n, n + 1] \rightarrow X, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ g_1(t) = T(t - n)x_0(n),$$

и

$$g_2: [n, n + 1] \rightarrow X, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ g_2(t) = - \int_n^t T(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Тогда $x = g_1 + g_2$. Нетрудно показать, что $g_1 \in L^2(\mathbb{R}, X)$. Функция g_2 является непрерывной, и значит, измеримой. Кроме того, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|g_2\|_{L^2}^2 &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \left(\int_0^{t-n} \|T(t)\|_{\text{End } X} \|f(t - \tau)\|_X d\tau \right)^2 dt \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \int_0^1 \|T(t)\|_{\text{End } X}^2 d\tau \int_0^1 \|f(t - \tau)\|_X^2 d\tau dt \\ &= \int_0^1 \|T(t)\|_{\text{End } X}^2 d\tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \int_{n-\tau}^{n+1-\tau} \|f(t)\|_X^2 dt d\tau \\ &\leq \int_0^1 \|T(t)\|_{\text{End } X}^2 d\tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \int_{n-1}^{n+1} \|f(t)\|_X^2 dt d\tau = 2 \int_0^1 \|T(t)\|_{\text{End } X}^2 d\tau \|f\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

где использовались неравенство Гёльдера и теорема Фубини [14; с. 318]. Таким образом, $g_2 \in L^2(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, $x \in L^2(\mathbb{R}, X)$. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что пара (x, f) удовлетворяет равенству (4.1) для почти всех $t > s$ из $\mathbb{R}$. Таким образом, $(x, f) \in \mathcal{L}_0$. Лемма доказана.

Для каждого $s > 0$ определим оператор

$$U(s): L^2(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, X), \\ (U(s)f)(t) = T(s)f(t-s), \quad f \in L^2(\mathbb{R}, X), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Условие $U(s)f \in L^2(\mathbb{R}, X)$ для любого $f \in L^2(\mathbb{R}, X)$ и фиксированного числа $s > 0$ имеет место в силу измеримости функции $U(s)f$ и оценки

$$\|U(s)f\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|T(s)f(t-s)\|_X^2 dt \right)^{1/2} \leq \|T(s)\|_{\text{End } X} \|f\|_{L^2}, \quad s > 0.$$

Таким образом, $U: (0, \infty) \rightarrow \text{End } L^2(\mathbb{R}, X)$. При этом, имеет место оценка

$$\|U(s)\|_{\text{End } L^2} \leq \|T(s)\|_{\text{End } X}, \quad s > 0.$$

Пусть теперь $f \in C_c(\mathbb{R}, X)$. Тогда при условии

$$\int_0^{\infty} \|T(t)\|_{\text{End } X} dt < \infty$$

корректно определен интеграл

$$\int_0^{\infty} (U(s)f)(t) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Действительно, измеримость подинтегральной функции, при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$, следует из леммы 5. Кроме того, имеет место оценка

$$\int_0^{\infty} \|(U(s)f)(t)\|_X ds \leq \sup_{h \in \mathbb{R}} \|f(h)\|_X \int_0^{\infty} \|T(s)\|_{\text{End } X} ds.$$

Определим на $C_c(\mathbb{R}, X)$ оператор V_c формулой

$$(V_c f)(t) = \int_0^{\infty} (U(s)f)(t) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in C_c(\mathbb{R}, X). \quad (4.5)$$

Покажем, что $V_c f \in L^2(\mathbb{R}, X)$. Так как $f \in C_c(\mathbb{R}, X)$, существуют $0 < a \leq b < \infty$ такие, что

$$\int_0^{\infty} (U(s)f)(t) ds = \int_a^b T(s)f(t-s) ds.$$

Используя лемму 6 и оценку

$$\|(V_c f)(t+\alpha) - (V_c f)(t)\|_X \\ \leq \left(\int_a^b \|T(s)\|_{\text{End } X}^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b \|f(t+\alpha-s) - f(t-s)\|_X^2 ds \right)^{1/2},$$

закключаем, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (V_c f)(t+\alpha) = (V_c f)(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Значит, функция $V_c f$ является непрерывной, и поэтому измеримой. Кроме того, имеют место оценки (используется [1; теорема 3.8.2])

$$\begin{aligned} \|V_c f\|_{L^2} &\leq \int_0^\infty \|U(s)f\|_{L^2} ds \\ &\leq \int_0^\infty \|U(s)\|_{\text{End } L^2} \|f\|_{L^2} ds \leq \|f\|_{L^2} \int_0^\infty \|T(s)\|_{\text{End } X} ds, \end{aligned}$$

где $f \in C_c(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, оператор $V_c: C_c(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, X)$ ограничен, причем

$$\|V_c\|_{\text{End } L^2} \leq \int_0^\infty \|T(s)\|_{\text{End } X} ds.$$

Так как $\overline{C_c(\mathbb{R}, X)} = L^2(\mathbb{R}, X)$, оператор V_c можно единственным образом продолжить по непрерывности [15; с. 124] до ограниченного и определенного на всем пространстве $L^2(\mathbb{R}, X)$ оператора V такого, что $Vf = V_c f$ для каждого $f \in C_c(\mathbb{R}, X)$ и $\|V\|_{\text{End } L^2} = \|V_c\|_{\text{End } L^2}$. Таким образом, имеет место

ЛЕММА 11. Пусть полугруппа T удовлетворяет оценке

$$\int_0^\infty \|T(t)\|_{\text{End } X} dt < \infty.$$

Тогда существует единственный ограниченный оператор

$$V: L^2(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, X),$$

имеющий на функциях из $C_c(\mathbb{R}, X)$ следующее представление:

$$(Vf)(t) = \int_0^\infty T(\tau)f(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t T(t-\tau)f(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогичный оператор рассмотрен в [16; с. 41–43], где оператор определялся интегралом (4.5) на плотном подпространстве простых суммируемых функций, и продолжался по непрерывности на все пространство $L^2(\mathbb{R}, X)$.

ТЕОРЕМА 2. Отношение $\mathcal{L}_0$ непрерывно обратимо тогда и только тогда, когда выполнено условие (4.7). В этом случае оператор $\mathcal{L}_0^{-1} \in \text{End } L^2(\mathbb{R}, X)$ имеет на функциях из $C_c(\mathbb{R}, X)$ следующее представление:

$$(\mathcal{L}_0^{-1}f)(t) = \int_{-\infty}^\infty G(s)f(t-s) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in C_c(\mathbb{R}, X), \quad (4.6)$$

где через G обозначена функция (Грина) (3.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть отношение $\mathcal{L}_0$ непрерывно обратимо. Тогда по лемме 9 обратим оператор D_0 . Из леммы 8 следует, что выполнено условие (4.7).

Достаточность. Пусть выполнено условие (4.7). Тогда можно построить функцию (Грина) G с помощью равенств (3.2). Для полугрупп

$$\begin{aligned} T_- P_-: (0, \infty) &\rightarrow \text{End } X, & (T_- P_-)(t) &= T_-(t)P_-, \\ T_+^{-1} P_+: [0, \infty) &\rightarrow \text{End } X, & (T_+^{-1} P_+)(t) &= T_+^{-1}(t)P_+ \end{aligned}$$

операторы V_- и V_+ , имеющие на функциях из $C_c(\mathbb{R}, X)$ вид

$$\begin{aligned}(V_-f)(t) &= \int_0^\infty T_-(s)P_-f(t-s)ds, & t \in \mathbb{R}, \\ (V_+f)(t) &= \int_0^\infty T_+^{-1}(s)P_+f(t-s)ds, & t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

принадлежат (по лемме 11) $\text{End } L^2(\mathbb{R}, X)$. Оператор $B = -V_- + V_+$ принадлежит $\text{End } L^2(\mathbb{R}, X)$ и имеет на функциях из $f \in C_c(\mathbb{R}, X)$ вид

$$\begin{aligned}(Bf)(t) &= ((-V_- + V_+)f)(t) = -(V_-f)(t) + (V_+f)(t) \\ &= -\int_0^\infty T_-(s)P_-f(t-s)ds + \int_0^\infty T_+^{-1}(s)P_+f(t-s)ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty G(s)f(t-s)ds, & t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что для $f \in C_c(\mathbb{R}, X)$ пара (Bf, f) удовлетворяет равенствам (4.1). Следовательно, для каждого $f \in C_c(\mathbb{R}, X)$ выполняется условие $(Bf, f) \in \mathcal{L}_0$. Так как отношение $\mathcal{L}_0$ замкнуто (лемма 7) и $\overline{C_c(\mathbb{R}, X)} = L^2(\mathbb{R}, X)$, то $(Bf, f) \in \mathcal{L}_0$ для каждого $f \in L^2(\mathbb{R}, X)$. Значит, оператор B является правым обратным для $\mathcal{L}_0$. В силу (4.7) из леммы 8 следует, что оператор D_0 обратим. Из леммы 10 следует, что отношение $\mathcal{L}_0$ непрерывно обратимо. Значит, $\mathcal{L}_0^{-1} = B$, т.е. имеет место представление (4.6). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Отношение $\mathcal{L}_0$ непрерывно обратимо тогда и только тогда, когда выполнено условие (4.8).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть отношение $\mathcal{L}_0$ непрерывно обратимо. Тогда по теореме 2 имеет место представление (4.6) оператора $\mathcal{L}_0^{-1} \in \text{End } L^2(\mathbb{R}, X)$ на функциях из $C_c(\mathbb{R}, X)$, где функция (Грина) G имеет вид (3.2). Посчитаем преобразование Фурье $\widehat{G}$ функции G :

$$\widehat{G}(\lambda)y = \int_{-\infty}^\infty G(t)e^{-i\lambda t}y dt = -\int_0^\infty T(t)e^{-i\lambda t}y dt = R(i\lambda, \mathbb{A}_c)y,$$

для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $y \in X$, где мы воспользовались леммой 1. Отсюда

$$\|R(i\lambda, \mathbb{A}_c)y\|_X = \|\widehat{G}(\lambda)y\|_X \leq \int_{-\infty}^\infty \|G(t)\|_{\text{End } X} dt \|y\|_X = K\|y\|_X,$$

где

$$K = \int_{-\infty}^\infty \|G(t)\|_{\text{End } X} dt.$$

Следовательно, $i\lambda \in \rho(\mathbb{A}_c)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, \mathbb{A}_c)\|_{\text{End } X} \leq K < \infty,$$

т.е. имеет место условие (4.8).

Достаточность. Доказательство сюръективности. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}, X)$. Тогда преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции f принадлежит $L^2(\mathbb{R}, X)$. Кроме того, $\widehat{x} \in L^2(\mathbb{R}, X)$

для функции $\widehat{x}: \mathbb{R} \rightarrow X$, $\widehat{x}(\lambda) = R(i\lambda, \mathbb{A}_c)\widehat{f}(\lambda)$. Введем в рассмотрение вспомогательные семейства $\{x_N, N > 0\}$ и $\{f_N, N > 0\}$ функций:

$$\begin{aligned} x_N: \mathbb{R} \rightarrow X, \quad x_N(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \widehat{x}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda, \\ f_N: \mathbb{R} \rightarrow X, \quad f_N(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda. \end{aligned}$$

Для каждого $N > 0$ из теоремы Планшереля следует, что $x_N, f_N \in L^2(\mathbb{R}, X)$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} x_N = x$, $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N = f$. Не трудно показать [8], что для каждого $N > 0$ пара (x_N, f_N) удовлетворяет равенству (4.1) для почти всех $t > s$ из $\mathbb{R}$. Таким образом, $(x_N, f_N) \in \mathcal{L}_0$ для каждого $N > 0$. В силу замкнутости отношения $\mathcal{L}_0$ заключаем, что $(x, f) \in \mathcal{L}_0$.

Доказательство инъективности. Пусть $x \in \text{Ker } \mathcal{L}_0$ и $x \neq 0$. Тогда из равенств (4.1) имеем: $x(t) = T(t-s)x(s)$, $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Применяя к обеим частям последнего равенства преобразование Фурье по переменной s , для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}$ получаем

$$e^{-i\lambda t} \widehat{x}(\lambda) = T(t) \widehat{x}(\lambda), \quad t > 0.$$

Следовательно, для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется условие: $(\widehat{x}(\lambda), i\lambda \widehat{x}(\lambda)) \in \mathbb{A}_c$, т.е. $i\lambda \in \sigma(\mathbb{A}_c)$, что противоречит условиям теоремы. Следовательно, $\text{Ker } \mathcal{L}_0 = \{0\}$. Теорема доказана.

Основной результат работы содержит следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – гильбертово пространство и пусть

$$\int_0^1 \|T(t)\|_{\text{End } X}^2 dt < \infty.$$

Тогда условие

$$\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset \tag{4.7}$$

эквивалентно одновременному выполнению условий

$$\sigma(\mathbb{A}_c) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \quad \text{и} \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, \mathbb{A}_c)\|_{\text{End } X} = M_1 < \infty, \tag{4.8}$$

где $\sigma(T(1))$ – спектр оператора $T(1)$, $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ и $\sigma(\mathbb{A}_c)$ – спектр генератора $\mathbb{A}_c \in \text{Gen}(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теорем 2 и 3 следует, что каждое из условий (4.7) и (4.8) равносильно непрерывной обратимости отношения $\mathcal{L}_0$. Теорема доказана.

5. Пример полугруппы операторов рассматриваемого класса, удовлетворяющей теореме Герхарда–Прюсса. Пусть X – сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$, и пусть последовательность $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ такова, что

- 1) $\lambda_k < 0$, $k \in \mathbb{N}$;
- 2) $\sum_{k \geq 1} e^{\lambda_k s} < \infty$, $s > 0$;
- 3) $\sum_{k \geq 1} 1/|\lambda_k| < \infty$.

Полугруппу T зададим равенством

$$T(t)x = \sum_{k \geq 1} e^{\lambda_k t} (x, e_k) (e_k + e_0), \quad t > 0.$$

Тогда $\text{Ker } T$ – одномерное подпространство, содержащее вектор e_0 . Из оценки

$$\|T(t)\|_{\text{End } X}^2 \leq 1 + \sum_{k \geq 1} e^{2\lambda_k t}, \quad t > 0,$$

следует, что

$$\int_0^1 \|T(t)\|_{\text{End } X}^2 dt \leq 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{|\lambda_k|} < \infty.$$

Проверим условие (4.7). Оператор

$$T(1)x = \sum_{k \geq 1} e^{\lambda_k} (x, e_k) e_k + \sum_{k \geq 1} e^{\lambda_k} (x, e_k) e_0$$

является компактным (как сумма компактного и одномерного операторов) и само-сопряженным. Значит, $\sigma(T(1)) \subset \mathbb{R}$, т.е. достаточно проверить, что точки $\lambda = -1$ и $\lambda = 1$ не принадлежит $\sigma(T(1))$. Из равенства

$$\sum_{k \geq 1} e^{\lambda_k} (x, e_k) (e_k + e_0) = \sum_{k \geq 0} (x, e_k) e_k,$$

следует, что $x = 0$, поэтому $\text{Ker}(T(1) - I) = \{0\}$. В силу альтернативы Фредгольма, заключаем, что оператор $T(1) - I$ обратим, т.е. $\lambda = 1$ не принадлежит $\sigma(T(1))$. Аналогично показывается, что $\lambda = -1$ не принадлежит $\sigma(T(1))$.

Проверим теперь условие (4.8). Из леммы 1 для $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{C}_{w(T)}$

$$\begin{aligned} R(\lambda, \mathbb{A}_c)x &= - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= - \int_0^\infty \sum_{k \geq 1} e^{\lambda_k t - \lambda t} (x, e_k) (e_k + e_0) dt = \sum_{k \geq 1} \frac{(x, e_k)}{\lambda_k - \lambda} (e_k + e_0). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|R(iq, \mathbb{A}_c)\|_{\text{End } X} \leq 2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{|\lambda_k|}, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Поэтому $i\mathbb{R} \in \rho(\mathbb{A}_c)$ и

$$\sup_{q \in \mathbb{R}} \|R(iq, \mathbb{A}_c)\|_{\text{End } X} \leq 2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{|\lambda_k|} = M_2 < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Полученные в статье результаты могут быть перенесены на случай полугрупп операторов, действующих в вещественном банаховом пространстве. При этом, можно использовать спектральную теорию линейных отношений на вещественных банаховых пространствах, изложенную в статье [17]. Кроме указанных источников, отмечу статьи [18], [19], где также изложена спектральная теория линейных отношений.

В заключении отметим недавно вышедшую статью [20], в которой линейные дифференциальные уравнения исследуются методами спектральной теории линейных отношений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [2] L. Gearhart, "Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **236** (1978), 385–394.
- [3] J. Prüss, "On the spectrum of C_0 -semigroups", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **284**:2 (1984), 847–857.
- [4] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Grad. Texts in Math., **184**, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [5] А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, "Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов", *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 3–42.
- [6] А. Г. Баскаков, "Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов", *Матем. заметки*, **84**:2 (2008), 175–192.
- [7] А. Г. Чшиев, "Об условиях замкнутости и условиях замыкаемости инфинитезимальных операторов некоторых классов полугрупп операторов", *Изв. вузов. Матем.*, 2011, № 8, 77–85.
- [8] А. Г. Баскаков, Ю. Н. Синтяев, "Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов: оценки решений", *Дифференц. уравнения*, **46**:2 (2010), 210–219.
- [9] А. Г. Баскаков, А. А. Воробьев, М. Ю. Романова, "Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова", *Матем. заметки*, **89**:2 (2011), 190–203.
- [10] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1970.
- [11] A. Baskakov, V. Obukhovskii, P. Zecca, "On solutions of differential inclusions in homogeneous spaces of functions", *J. Math. Anal. Appl.*, **324**:2 (2006), 1310–1323.
- [12] А. Г. Баскаков, "Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов", *Функц. анализ и его прил.*, **30**:3 (1996), 1–11.
- [13] А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов, "Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами", *Сиб. матем. журн.*, **42**:6 (2001), 1231–1243.
- [14] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976.
- [15] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Физматлит, М., 2002.
- [16] C. van der Mee, *Exponentially Dichotomous Operators and Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **182**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [17] А. Г. Баскаков, А. С. Загорский, "К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах", *Матем. заметки*, **81**:1 (2007), 17–31.
- [18] А. Г. Баскаков, "Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов", *Функциональный анализ, СМФН*, **9**, МАИ, М., 2004, 3–151.
- [19] А. Г. Баскаков, "Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 3–68.
- [20] А. Г. Баскаков, "Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений", *УМН*, **68**:1 (409) (2013), 77–128.

А. Г. Чшиев

Воронежский государственный университет

E-mail: zchaslan@mail.ru

Поступило

24.05.2011

Исправленный вариант

25.10.2011