Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Г. Насибуллин, Обобщения неравенств типа Харди
в форме Ю. А. Дубинского, *Матем. заметки*, 2014,
том 95, выпуск 1, 109–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 18:26:25

Обобщения неравенств типа Харди в форме Ю. А. Дубинского

Р. Г. Насибуллин

Рассматриваются неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими особенностями. Доказаны новые одномерные неравенства и их многомерные аналоги.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm9178

1. Введение. Неравенства Харди имеют ряд приложений в теории функции и в задачах математической физики, и литература по ним весьма обширна. Отметим лишь, что оригинальные неравенства Харди приведены в [1]. Некоторые обобщения и уточнения неравенств типа Харди, близкие к теме нашей статьи, можно найти в [2]–[9].

В данной статье нас интересуют неравенства, содержащие логарифмические особенности (см. [2]–[8]). Например, в [7] Авхадиев получил неравенства вида

$$\int_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^n (\ln(e\delta_0/\delta))^2} dx \leq p \int_{\Omega} \frac{|f|^{p-1} |\nabla f|}{\delta^{n-1}} dx \quad \text{для всех } f \in C_0^1(\Omega), \quad (1.1)$$

где Ω – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, причем $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $\delta = \delta(x, \Omega) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ – функция расстояния до границы и $\delta_0 = \delta_0(\Omega) := \sup\{\delta(x, \Omega) : x \in \Omega\}$, а в [2] для локально интегрируемых функций $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что интеграл

$$\int_0^\infty |f(r)|^p r^{p-1} dr, \quad p > 1,$$

сходится, Дубинский получил неравенство

$$\int_0^\infty \frac{1}{r |\ln(r/R)|^p} \left| \int_R^r f(t) dt \right|^p dr \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty |f(r)|^p r^{p-1} dr. \quad (1.2)$$

Цель нашей работы – получить аналоги неравенств в форме Дубинского, содержащих итерированные логарифмические особенности как в [7] и [8]. В доказательстве

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (госконтракт № 02.740.11.0193)

используются идеи [2], [3], [7] и [8]. Существенное влияние на вид неравенств и методы доказательств оказывает модуль логарифма. По аналогии с доказательствами неравенств с логарифмическими особенностями можно получить неравенства с вложенными логарифмами (см. [8]). Мы также используем L^p -лемму из [7], [8] для получения неравенств для $p > 1$.

В первой части статьи приведены одномерные неравенства с доказательствами. Во второй части рассматриваем аналоги некоторых одномерных неравенств из первой части в многомерном случае. Отметим кратко основные результаты. В первой части статьи доказано, что для любого $R > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ верны неравенства

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{r\varphi_{k-1}(r)|\ln_k(e_k + |\ln(r/R)|)|^s} \left| \int_r^R f(t) dt \right|^p dr \\ & \leq \left(\frac{p}{s-1} \right)^l \int_0^\infty |f(r)|^l \left| \int_r^R f(t) dt \right|^{p-l} r^{l-1} \varphi_{k-1}^{l-1}(r) \left| \ln_k \left(e_k + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right|^{l-s} dr, \\ & \int_0^\infty \frac{1}{r\varphi_{k-1}(r)|\ln_k(e_k + |\ln(r/R)|)|^s} \left| \frac{1}{q(r)} \int_r^R \frac{q(t)f(t)}{t} dt \right|^p dr \\ & \leq \left(\frac{\max\{h_1, h_2\}p}{s-1} \right)^p \int_0^\infty \frac{|f(r)|^p}{r} \varphi_{k-1}^{p-1}(r) \left| \ln_k \left(e_k + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right|^{p-s} dr, \end{aligned}$$

где $\ln_k$ и e_k – итерированные логарифмические и экспоненциальные функции, а функция φ_m определена следующим образом:

$$\varphi_m(r) = \prod_{i=0}^k \left| \ln_i \left(e_i + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right|, \quad m \geq 0.$$

Так же доказано, что для любого $a > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^b \frac{|f(x)|}{x^\alpha \psi_{k-1}(x) [\ln_k(e_{k+1} + |\ln(a/x)|)]^s} dx \\ & \leq d^l \int_0^b \frac{|f'(x)|^l |f(x)|^{p-l}}{x^{\alpha-l}} \psi_{k-1}^{l-1}(x) \left[\ln_k \left(e_{k+1} + \left| \ln \frac{a}{x} \right| \right) \right]^{s(l-1)} dx \\ & \text{для всех } f \in C_0^1[0, b], \end{aligned}$$

где

$$d = \max \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{s-1}, \frac{1}{s-1} \right\}, \quad \psi_m(x) = \prod_{i=0}^k \left| \ln_i \left(e_{i+1} + \left| \ln \frac{x}{a} \right| \right) \right|, \quad m \geq 0.$$

Во второй части статьи доказаны многомерные аналоги неравенств. Используя подход Дубинского [2], для любых $R > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ мы получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(Rx/|x|)|^p}{|x|^n \varphi_{k-1}(|x|) |\ln_k(e_k + |\ln|x|/R||)^s} dx \\ & \leq \left(\frac{p}{s-1} \right)^l \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-l} |\nabla u(x)|^l |x|^{l-n} \varphi_{k-1}^{l-1} \left| \ln_k \left(e_k + \left| \ln \frac{|x|}{R} \right| \right) \right|^{l-s} dx. \end{aligned}$$

2. Одномерные неравенства и вспомогательные результаты. В [2] получено неравенство (1.2), которое содержит модуль логарифма. Неравенство (1.2) дает нижнюю оценку для верхнего интеграла Харди (см. [2]). В этом пункте получаем одномерные неравенства типа Харди, которые обобщают неравенство (1.2). Кроме того, мы получим аналог неравенства (1.1). Для перехода к L^p -версиям неравенств мы пользуемся следующим утверждением из [8].

ЛЕММА 1. *Предположим, что Ω – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $w_1 = w_1(x) > 0$, $w_2 = w_2(x) \geq 0$ на Ω и функция $w_1[w_2/w_1]^l$ является локально интегрируемой в Ω для любого $l \in [1, p]$. Если $J: C_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторый функционал и для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$J(f) + \int_{\Omega} |f|w_1 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla f|w_2 dx, \quad c = \text{const} > 0,$$

то для любых $p \in (1, \infty)$, $l \in [1, p]$ и $f \in C_0^1(\Omega)$

$$lJ(|f|^p) + \int_{\Omega} |f|^p w_1 dx \leq (cp)^l \int_{\Omega} |f|^{p-l} |\nabla f|^l w_1^{1-l} w_2^l dx.$$

Пусть

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_r^R f(t) dt, & r \in (0, R), \\ F(r) &= \int_R^r f(t) dt, & r \in (R, \infty). \end{aligned}$$

Тогда верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $p \in [1, \infty)$, $l \in [1, p]$, $1 < s < p + 1$ и $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – локально интегрируемая функция такая, что интеграл*

$$\int_0^\infty |F(r)|^{p-l} |f(r)|^l r^{l-1} \left| \ln \frac{r}{R} \right|^{l-s} dr$$

сходится. Тогда для любого $R > 0$ верно следующее неравенство:

$$\int_0^\infty \frac{1}{r |\ln(r/R)|^s} |F(r)|^p dr \leq \left(\frac{p}{s-1} \right)^l \int_0^\infty |F(r)|^{p-l} |f(r)|^l r^{l-1} \left| \ln \frac{r}{R} \right|^{l-s} dr.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая. Пусть $r \in (\varepsilon_0, R - \varepsilon_1)$, где ε_0 и ε_1 – произвольные положительные малые числа. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_0}^{R-\varepsilon_1} \frac{1}{r |\ln(r/R)|^s} |F(r)|^p dr &= \frac{1}{s-1} \int_{\varepsilon_0}^{R-\varepsilon_1} \left(\frac{1}{|\ln(r/R)|^{s-1}} \right)' |F(r)|^p dr \\ &= \frac{p}{s-1} \int_{\varepsilon_0}^{R-\varepsilon_1} \frac{1}{|\ln(r/R)|^{s-1}} |F(r)|^{p-1} \text{sign } F(r) f(r) dr \\ &\quad + \frac{1}{s-1} \frac{|F(R-\varepsilon_1)|^p}{|\ln((R-\varepsilon_1)/R)|^{s-1}} - \frac{1}{s-1} \frac{|F(\varepsilon_0)|^p}{|\ln(\varepsilon_0/R)|^{s-1}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Заметим, что при $1 < s < p + 1$ второе слагаемое правой части неравенства (2.1) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 |F(R - \varepsilon_1)|^p &= \left| \int_{R-\varepsilon_1}^R f(t) dt \right|^p \\
 &\leq \left| \int_{R-\varepsilon_1}^R (|f(t)|^{p/(p+1-s)} t^{(s-1)/(p+1-s)})^{1-(s-1)/p} \left(\frac{1}{t}\right)^{(s-1)/p} dt \right|^p \\
 &\leq \left[\int_{R-\varepsilon_1}^R |f(t)|^{p/(p+1-s)} t^{(s-1)/(p+1-s)} dt \right]^{p-s+1} \left| \ln \frac{R - \varepsilon_1}{R} \right|^{s-1} \\
 &\equiv \alpha(\varepsilon_1) \left| \ln \frac{R - \varepsilon_1}{R} \right|^{s-1},
 \end{aligned}$$

где $\alpha(\varepsilon_1) \rightarrow 0$ при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$.

Используя последнее неравенство в (2.1), имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{\varepsilon_0}^{R-\varepsilon_1} \frac{1}{r |\ln(r/R)|^s} |F(r)|^p dr &\leq \frac{p}{s-1} \int_{\varepsilon_0}^{R-\varepsilon_1} \frac{1}{|\ln(r/R)|^{s-1}} |F(r)|^{p-1} |f(r)| dr + \frac{\alpha(\varepsilon_1)}{s-1} \\
 &= \int_{\varepsilon_0}^{R-\varepsilon_1} \left[\frac{F^p(r)}{r |\ln(r/R)|^s} \right]^{1-1/l} \left[\left(\frac{p}{s-1} \right)^l |F(r)|^{p-l} |f(r)|^l \left| \ln \frac{r}{R} \right|^{l-s} r^{l-1} \right]^{1/l} dr + \frac{\alpha(\varepsilon_1)}{s-1} \\
 &\leq \left(\frac{p}{s-1} \right)^l \frac{1}{l} \int_{\varepsilon_0}^{R-\varepsilon_1} |F(r)|^{p-l} |f(r)|^l \left| \ln \frac{r}{R} \right|^{l-s} r^{l-1} dr \\
 &\quad + \left(1 - \frac{1}{l} \right) \int_{\varepsilon_0}^{R-\varepsilon_1} \frac{1}{r |\ln(r/R)|^s} |F(r)|^p dr + \frac{\alpha(\varepsilon_1)}{s-1}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Выше мы применили неравенство (см. [1])

$$a^{p_1} b^{p_2} \leq \left(\frac{p_1 a + p_2 b}{p_1 + p_2} \right)^{p_1 + p_2} \tag{2.3}$$

для величин

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 1 - \frac{1}{l}, & p_2 &= \frac{1}{l}, \\
 a &= \frac{F^p(r)}{r |\ln(r/R)|^s}, & b &= \left(\frac{p}{s-1} \right)^l |F(r)|^{p-l} |f(r)|^l \left| \ln \frac{r}{R} \right|^{l-s} r^{l-1}.
 \end{aligned}$$

В неравенстве (2.2) переходим к пределу при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Так как второе слагаемое стремится к нулю, получим следующее неравенство:

$$\int_0^R \frac{1}{r |\ln(r/R)|^s} |F(r)|^p dr \leq \left(\frac{p}{s-1} \right)^l \int_0^R |F(r)|^{p-l} |f(r)|^l \left| \ln \frac{r}{R} \right|^{l-s} r^{l-1} dr. \tag{2.4}$$

Пусть $r \in (R, +\infty)$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ и $R_0 > R + \varepsilon$ имеем

$$\int_{R+\varepsilon}^{R_0} \frac{1}{r |\ln(r/R)|^s} |F(r)|^p dr = -\frac{1}{s-1} \int_{R+\varepsilon}^{R_0} \left(\frac{1}{|\ln(r/R)|^{s-1}} \right)' |F(r)|^p dr$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p}{s-1} \int_{R+\varepsilon}^{R_0} \frac{1}{|\ln(r/R)|^{s-1}} |F(r)|^{p-1} \operatorname{sign} F(r) f(r) dr \\
&\quad - \frac{1}{s-1} \frac{|F(R_0)|^p}{|\ln(R_0/R)|^{s-1}} + \frac{1}{s-1} \frac{|F(R+\varepsilon)|^p}{|\ln((R+\varepsilon)/R)|^{s-1}}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Оценим второе слагаемое правой части неравенства (2.5) при $1 < s < p+1$. Получаем

$$\begin{aligned}
|F(R+\varepsilon)|^p &= \left| \int_R^{R+\varepsilon} f(t) dt \right|^p \\
&\leq \left| \int_R^{R+\varepsilon} (|f(t)|^{p/(p+1-s)} t^{(s-1)/(p+1-s)})^{1-(s-1)/p} \left(\frac{1}{t}\right)^{(s-1)/p} dt \right|^p \\
&\leq \left[\int_R^{R+\varepsilon} |f(t)|^{p/(p+1-s)} t^{(s-1)/(p+1-s)} dt \right]^{p-s+1} \left| \ln \frac{R+\varepsilon}{R} \right|^{s-1} \\
&\equiv \beta(\varepsilon_1) \left| \ln \frac{R+\varepsilon}{R} \right|^{s-1},
\end{aligned}$$

где $\beta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ввиду последней оценки неравенство (2.5) примет вид

$$\int_{R+\varepsilon}^{R_0} \frac{1}{r |\ln(r/R)|^s} |F(r)|^p dr \leq \frac{p}{s-1} \int_{R+\varepsilon}^{R_0} \frac{1}{|\ln(r/R)|^{s-1}} |F(r)|^{p-1} |f(r)| dr + \frac{\beta(\varepsilon)}{s-1}.$$

К полученному неравенству применяем неравенство (2.3) для величин

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1 - \frac{1}{l}, & p_2 &= \frac{1}{l}, \\
a &= \frac{F^p(r)}{r |\ln(r/R)|^s}, & b &= \left(\frac{p}{s-1} \right)^l |F(r)|^{p-l} |f(r)|^l \left| \ln \frac{r}{R} \right|^{l-s} r^{l-1}.
\end{aligned}$$

Получим следующее неравенство:

$$\int_{R+\varepsilon}^{R_0} \frac{1}{r |\ln(r/R)|^s} |F(r)|^p dr \leq \left(\frac{p}{s-1} \right)^l \int_{\varepsilon_0}^{R-\varepsilon_1} |F(r)|^{p-l} |f(r)|^l \left| \ln \frac{r}{R} \right|^{l-s} r^{l-1} dr + \frac{l\beta(\varepsilon)}{s-1}.$$

Переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $R_0 \rightarrow \infty$. Так как второе слагаемое стремится к нулю, верно неравенство

$$\int_R^\infty \frac{1}{r |\ln(r/R)|^s} \left| \int_r^R f(t) dt \right| \leq \left(\frac{p}{s-1} \right)^l \int_R^\infty |F(r)|^{p-l} |f(r)|^l \left| \ln \frac{r}{R} \right|^{l-s} r^{l-1} dr. \tag{2.6}$$

Неравенства (2.4) и (2.6) дают требуемый результат. Этим заканчивается доказательство теоремы.

При выводе следующего результата используются идеи [2] и [3].

Пусть $R > 0$ и $q(r)$ – положительная и абсолютно непрерывная функция на $(0, +\infty)$ такая, что при $r \in (0, R)$ для некоторого $h_1 > 0$ выполнено условие

$$1 - \frac{p}{s-1} r \left(1 + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \left| \ln \left(1 + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right| \frac{q'(t)}{q(t)} \geq \frac{1}{h_1},$$

и при $r \in (R, +\infty)$ для некоторого $h_2 > 0$ выполнено условие

$$1 + \frac{p}{s-1} r \left(1 + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \left| \ln \left(1 + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right| \frac{q'(t)}{q(t)} \geq \frac{1}{h_2}.$$

Тогда при вышеприведенных условиях справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p \geq 1$, $s > 1$, $s < p+1$ и $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — локально интегрируемая функция такая, что интеграл

$$\int_0^\infty \frac{|f(r)|^p}{r} \left(1 + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right)^{p-1} \left| \ln \left(1 + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right|^{p-1} dr$$

сходится, а функция $G(r)$ определена следующим образом:

$$G(r) = \frac{1}{q(r)} \int_r^R \frac{q(t)f(t)}{t} dt, \quad r \in (0, R),$$

$$G(r) = \frac{1}{q(r)} \int_R^r \frac{q(t)f(t)}{t} dt, \quad r \in (R, \infty).$$

Тогда для любого $R > 0$ верно следующее неравенство:

$$\int_0^\infty \frac{1}{r(1 + |\ln(r/R)|)|\ln(1 + |\ln(r/R)|)|^s} |G(r)|^p dr$$

$$\leq \left(\frac{\max\{h_1, h_2\}p}{s-1} \right)^p \int_0^\infty \frac{|f(r)|^p}{r} \left(1 + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right)^{p-1} \left| \ln \left(1 + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right|^{p-1} dr.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала рассмотрим интеграл по интервалу $(\varepsilon_0, R - \varepsilon_1)$, где ε_0 и ε_1 произвольные малые числа. На этом интервале имеем соотношения

$$\frac{1}{r(1 + |\ln(r/R)|)|\ln(1 + |\ln(r/R)|)|^s} = \frac{1}{r|\ln(r/(eR))||\ln|\ln(r/(eR))||^s}$$

$$= \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{|\ln|\ln(r/(eR))||^{s-1}} \right)'.$$

$$I_1(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \equiv \int_{\varepsilon_0}^{R-\varepsilon_1} \frac{1}{r|\ln(r/(eR))||\ln|\ln(r/(eR))||^s} |G(r)|^p dr$$

$$= \frac{1}{s-1} \int_{\varepsilon_0}^{R-\varepsilon_1} \left(\frac{1}{|\ln|\ln(r/(eR))||^{s-1}} \right)' |G(r)|^p dr$$

$$= -\frac{p}{s-1} \int_{\varepsilon_0}^{R-\varepsilon_1} \frac{1}{|\ln|\ln(r/(eR))||^{s-1}} |G(r)|^{p-1} \operatorname{sign} G(r) \left[-\frac{q'(r)}{q(r)} G(r) - \frac{f(r)}{r} \right]$$

$$+ \frac{1}{s-1} \left| \ln \left| \ln \frac{R-\varepsilon_1}{eR} \right| \right|^{1-s} |G(R-\varepsilon_1)|^p - \frac{1}{s-1} \left| \ln \left| \ln \frac{\varepsilon_0}{eR} \right| \right|^{1-s} |G(\varepsilon_0)|^p.$$

(2.7)

Обратим внимание, что при $1 < s < p+1$ имеет место следующая оценка:

$$|G(R - \varepsilon_1)|^p = \left| \frac{1}{q(R - \varepsilon_1)} \int_{R-\varepsilon_1}^R \frac{f(t)q(t)}{t} dt \right|^p$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{q(R - \varepsilon_1)} \int_{R - \varepsilon_1}^R \left(\frac{f^{p/(p+1-s)}(t) q^{p/(p+1-s)}(t)}{t^{p/(p+1-s)}} t^{(s-1)/(p+1-s)} \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left| \ln \frac{t}{eR} \right|^{(s-1)/(p+1-s)} \right)^{1-(s-1)/p} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{t |\ln(t/(eR))|} \right)^{(s-1)/p} dt \Big|^p \\
&\leq \left(\frac{1}{q(R - \varepsilon_1)} \right)^p \left[\int_{R - \varepsilon_1}^R \frac{|f(t)|^{p/(p+1-s)} q^{p/(p+1-s)}(t)}{t} \left| \ln \frac{t}{eR} \right|^{(s-1)/(p+1-s)} dt \right]^{p-s+1} \\
&\quad \times \left| \ln \left| \ln \frac{R - \varepsilon_1}{eR} \right| \right|^{s-1} \\
&\equiv \alpha(\varepsilon_1) \left| \ln \left| \ln \frac{R - \varepsilon_1}{eR} \right| \right|^{s-1},
\end{aligned}$$

где $\alpha(\varepsilon_1) \rightarrow 0$ при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$.

Используя последнее неравенство в (2.7), получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon_0}^{R - \varepsilon_1} \frac{1}{r(1 + |\ln(r/R)|) |\ln(1 + |\ln(r/R)|)|^s} |G(r)|^p \\
&\quad \times \left[1 - \frac{p}{s-1} r \left| \ln \frac{r}{eR} \right| \left| \ln \left| \ln \frac{r}{eR} \right| \right| \frac{q'(t)}{q(t)} \right] dr \\
&\leq \frac{p}{s-1} \int_{\varepsilon_0}^{R - \varepsilon_1} \frac{1}{|\ln |\ln(r/(eR))|||^{s-1}} |G(r)|^{p-1} \frac{|f(r)|}{r} dr + \frac{\alpha(\varepsilon_1)}{s-1}.
\end{aligned}$$

Учитывая оценку для $q(r)$, будем иметь

$$I(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \leq \frac{h_1 p}{s-1} \left(\int_{\varepsilon_0}^{R - \varepsilon_1} \frac{1}{|\ln |\ln(r/(eR))|||^{s-1}} |G(r)|^{p-1} \frac{|f(r)|}{r} dr + \frac{\alpha(\varepsilon_1)}{p} \right).$$

Введем обозначение $p' = p/(p-1)$. Тогда неравенство примет вид

$$\begin{aligned}
I(\varepsilon_0, \varepsilon_1) &\leq \frac{h_1 p}{s-1} \int_{\varepsilon_0}^{R - \varepsilon_1} \left(\frac{1}{r |\ln(r/(eR))| |\ln |\ln(r/(eR))|||^s} \right)^{1/p'} |G(r)|^{p/p'} \frac{|f(r)|}{r} \\
&\quad \times r^{1/p'} \left| \ln \frac{r}{eR} \right|^{1/p'} \left| \ln \left| \ln \frac{r}{eR} \right| \right|^{(p-s)/p} dr \\
&\quad + \frac{h_1 \alpha(\varepsilon_1)}{s-1} \\
&\leq \frac{h_1 p}{s-1} I^{1/p'}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \left(\int_{\varepsilon_0}^{R - \varepsilon_1} \frac{|f(r)|^p}{r} \left| \ln \frac{r}{eR} \right|^{p-1} \left| \ln \left| \ln \frac{r}{eR} \right| \right|^{p-s} dr \right)^{1/p} \\
&\quad + \frac{h_1 \alpha(\varepsilon_1)}{s-1}.
\end{aligned}$$

Если в последнем неравенстве перейдем к пределу при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, то получим, что интеграл

$$I_1(0, 0) = \int_0^R \frac{1}{r(1 + |\ln(r/R)|) |\ln(1 + |\ln(r/R)|)|^s} |F(r)|^p dr$$

сходится; более того, верно неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^R \frac{1}{r(1 + |\ln(r/R)|)|\ln(1 + |\ln(r/R)|)|^s} |G(r)|^p dr \\ & \leq \left(\frac{h_1 p}{s-1} \right) \int_0^R \frac{|f(r)|^p}{r} \left| \ln \frac{r}{eR} \right|^{p-1} \left| \ln \left| \ln \frac{r}{eR} \right| \right|^{p-s} dr. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Рассмотрим интервал $(R, +\infty)$. Для любого $\varepsilon > 0$ и $R_0 > R + \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} I_2 & \equiv \int_{R+\varepsilon}^{R_0} \frac{1}{r(1 + |\ln(r/R)|)|\ln(1 + |\ln(r/R)|)|^s} |G(r)|^p dr \\ & = -\frac{1}{s-1} \int_{R+\varepsilon}^{R_0} \left(\frac{1}{(\ln \ln(er/R))^{s-1}} \right)' |G(r)|^p dr \\ & = \frac{p}{s-1} \int_{R+\varepsilon}^{R_0} \frac{1}{(\ln \ln(er/R))^{s-1}} |G(r)|^{p-1} \operatorname{sign} G(r) \left[-\frac{q'(r)}{q(r)} G(r) + \frac{f(r)}{r} \right] dr \\ & \quad - \frac{1}{s-1} \left(\ln \ln \frac{eR_0}{R} \right)^{1-s} |G(R_0)|^p + \frac{1}{s-1} \left(\ln \ln \frac{(R+\varepsilon)e}{R} \right)^{1-s} |G(R+\varepsilon)|^p. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Заметим, что при $1 < s < p+1$ верна оценка

$$\begin{aligned} |G(R+\varepsilon)|^p & = \left| \frac{1}{q(R+\varepsilon)} \int_R^{R+\varepsilon} \frac{f(t)q(t)}{t} dt \right|^p \\ & = \left| \frac{1}{q(R+\varepsilon)} \int_R^{R+\varepsilon} \left(\frac{f^{p/(p+1-s)}(t) q^{p/(p+1-s)}(t)}{t^{p/(p+1-s)}} \right. \right. \\ & \quad \times \left. \left. t^{(s-1)/(p+1-s)} \left| \ln \frac{et}{R} \right|^{(s-1)/(p+1-s)} \right)^{1-(s-1)/p} \right. \\ & \quad \times \left. \left(\frac{1}{t |\ln(et/R)|} \right)^{(s-1)/p} dt \right|^p \\ & \leq \left(\frac{1}{q(R+\varepsilon)} \right)^p \left[\int_R^{R+\varepsilon} \frac{|f(t)|^{p/(p+1-s)} q^{p/(p+1-s)}(t)}{t} \left| \ln \frac{et}{R} \right|^{(s-1)/(p+1-s)} dt \right]^{p-s+1} \\ & \quad \times \left(\ln \ln \frac{(R+\varepsilon)e}{R} \right)^{s-1} \\ & \equiv \beta(\varepsilon) \left(\ln \ln \frac{(R+\varepsilon)e}{R} \right)^{s-1}, \end{aligned}$$

где $\beta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $(\varepsilon) \rightarrow 0$.

Используя последнее неравенство в (2.9), получим

$$\begin{aligned} & \int_{R+\varepsilon}^{R_0} \frac{1}{r(1 + |\ln(r/R)|)|\ln(1 + |\ln(r/R)|)|^s} |G(r)|^p \\ & \quad \times \left[1 + \frac{p}{s-1} r \left(1 + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \left| \ln \left(1 + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right| \frac{q'(r)}{q(r)} \right] dr \\ & \leq \frac{p}{s-1} \int_{R+\varepsilon}^{R_0} \frac{1}{(\ln \ln(er/R))^{s-1}} |G(r)|^{p-1} \frac{|f(r)|}{r} dr + \frac{\beta(\varepsilon)}{s-1}. \end{aligned}$$

Учитывая оценку для $q(r)$, будем иметь

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon, b) &\leq \frac{h_2 p}{s-1} \int_R^{R+\varepsilon} \left(\frac{1}{r \ln(er/R) (\ln \ln(er/R))^s} \right)^{1/p'} |G(r)|^{p/p'} \frac{|f(r)|}{r} r^{1/p'} \\ &\quad \times \left(\ln \frac{er}{R} \right)^{1/p'} \left(\ln \ln \frac{er}{R} \right)^{(p-s)/p} dr + \frac{h_2 \beta(\varepsilon)}{s-1} \\ &\leq \frac{h_2 p}{s-1} I_2^{1/p'}(\varepsilon, b) \left(\int_{R+\varepsilon}^{R_0} \frac{|f(r)|^p}{r} \left(\ln \frac{er}{R} \right)^{p-1} \left(\ln \ln \frac{er}{R} \right)^{p-s} dr \right)^{1/p} + \frac{h_2 \beta(\varepsilon)}{s-1}. \end{aligned}$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ и $R_0 \rightarrow +\infty$, получим, что интеграл

$$I_2(0, \infty) \equiv \int_R^\infty \frac{1}{r \ln(er/R) (\ln \ln(er/R))^s} |G(r)|^p dr$$

сходится и для него верна следующая оценка:

$$\begin{aligned} &\int_R^\infty \frac{1}{r \ln(er/R) (\ln \ln(er/R))^p} |G(r)|^p dr \\ &\leq \left(\frac{h_2 p}{s-1} \right)^p \int_R^\infty \frac{|f(r)|^p}{r} \left(\ln \frac{er}{R} \right)^{p-1} \left(\ln \ln \frac{er}{R} \right)^{p-s} dr. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Объединяя (2.8) и (2.10), получим требуемое утверждение.

В [7] было получено неравенство по произвольному открытому множеству, содержащее функцию расстояния до границы. В этом неравенстве участвует так называемый внутренний радиус, т.е. параметр $\delta_0 = \delta_0(\Omega) := \sup\{\delta(x, \Omega) : x \in \Omega\}$, который зависит от множества Ω . Нашей целью является получение одномерного аналога неравенства (1.1) с использованием логарифмических особенностей из неравенства Дубинского (1.2).

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha \geq 1$, $l \in [1, \alpha]$, $s > 1$ и $a > 0$. Тогда для любого $b > 0$ и для любой функции $f \in C_0^1(0, b)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha (1 + |\ln(a/x)|)^s} |f(x)| \\ &\leq \max \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{s-1}, \frac{1}{s-1} \right\}^l \int_0^b \frac{|f'(x)|^l |f(x)|^{p-l}}{x^{\alpha-l}} \left(1 + \left| \ln \frac{a}{x} \right| \right)^{s(l-1)} dx. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $0 < b \leq a$ нам необходимо доказать неравенство вида

$$\int_0^b \frac{|f(x)| dx}{x^\alpha (\ln(ea/x))^s} \leq \frac{1}{s-1} \int_0^b \frac{|f'(x)|}{x^{\alpha-1}} dx. \quad (2.11)$$

Это неравенство было получено в [8].

При $0 < a \leq b$ нам потребуются неравенства вида

$$\int_0^a \frac{|f(x)| dx}{x^\alpha (\ln(ea/x))^s} \leq \frac{1}{s-1} \int_0^a \frac{|f'(x)|}{x^{\alpha-1}} dx,$$

$$\int_a^b \frac{|f(x)| dx}{x^\alpha (\ln(ex/a))^s} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s-1} \int_a^b \frac{|f'(x)|}{x^{\alpha-1}} dx.$$

Первое неравенство было получено в [8]. Докажем второе неравенство. Имеем

$$\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha (\ln(ex/a))^s} \left| \int_x^b f'(t) dt \right| \leq \int_a^b \frac{dx}{x^\alpha (\ln(ex/a))^s} \int_x^b |f'(t)| dt = \int_a^b \frac{f'(t)}{t^{\alpha-1}} \Phi(t) dt,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= t^{\alpha-1} \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha (\ln(ex/a))^s} = \frac{t^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}} \int_1^{t/a} \frac{dx}{x^\alpha (\ln ex)^s} \\ &\leq \frac{t^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}} \int_1^{t/a} \frac{dx}{x (\ln ex)^s} = -\frac{t^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}} \frac{1}{s-1} \int_1^{t/a} \left(\frac{1}{(\ln ex)^{s-1}} \right)' dx \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}} \frac{1}{s-1} \left[1 - \frac{1}{(\ln(et/a))^{s-1}} \right] \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Используя последнюю оценку, получим

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{|f(x)| dx}{x^\alpha (1 + |\ln(a/x)|)^s} &\leq \frac{1}{s-1} \int_0^a \frac{|f'(x)|}{x^{\alpha-1}} dx + \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s-1} \int_a^b \frac{|f'(x)|}{x^{\alpha-1}} dx \\ &\leq \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s-1} \int_0^b \frac{|f'(x)|}{x^{\alpha-1}} dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Неравенство, полученное объединением (2.11) и (2.12), имеет следующий вид:

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha (1 + |\ln(a/x)|)^s} |f(x)| \leq \max \left\{ \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s-1}, \frac{1}{s-1} \right\} \int_0^b \frac{|f'(x)|}{x^{\alpha-1}} dx.$$

Последнее неравенство и L_p -лемма дают утверждение теоремы.

Пусть $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ — два произвольных малых числа,

$$e_0 = 0, \quad e_1 = 1, \quad e_{k+1} = \exp e_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

и

$$\ln_0 x = x, \quad \ln_{k+1} x = \ln(\ln_k x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Если $r \in (\varepsilon_0, R - \varepsilon_1)$, то

$$\frac{r}{R} \in \left(\frac{\varepsilon_0}{R}, \frac{R - \varepsilon_1}{R} \right) \subset (0, 1).$$

То есть $\ln(r/R) \in (-\infty, 0)$, откуда $e_k + |\ln(r/R)| \in (e_k, \infty)$, и тогда

$$\ln_k \left(e_k + \left| \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right| \right) > 0 \quad \text{для всех } k \geq 0.$$

Если $r \in (R + \varepsilon, R_0)$, для любого $\varepsilon > 0$ и $R_0 > R + \varepsilon_0$, то

$$\frac{r}{R} \in \left(\frac{R + \varepsilon}{R}, \frac{R_0}{R} \right) \subset (1, +\infty).$$

То есть $\ln(r/R) \in (0, +\infty)$; откуда $e_k + |\ln(r/R)| \in (e_k, \infty)$, и тогда

$$\ln_k \left(e_k + \left| \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right| \right) > 0 \quad \text{для всех } k \geq 0.$$

Введем обозначение

$$\varphi_m(r) = \prod_{i=0}^k \left| \ln_i \left(e_i + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right|, \quad k \geq m \geq 0.$$

Учитывая вышеприведенные рассуждения, можем заметить, что для $r \in (0, R)$ верно равенство

$$\frac{1}{r\varphi_{k-1}(r)|\ln_k(e_k + |\ln(r/R)|)|^s} = \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{|\ln_k(e_k + |\ln(r/R)|)|^{s-1}} \right)',$$

а для $r > R$ верно соотношение

$$\frac{1}{r\varphi_{k-1}(r)|\ln_k(e_k + |\ln(r/R)|)|^s} = -\frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{|\ln_k(e_k + |\ln(r/R)|)|^{s-1}} \right)'.$$

С использованием этих соотношений и схемы доказательства теоремы 1 мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p \in [1, \infty)$, $l \in [1, p]$, $1 < s < p+1$ и $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — локально интегрируемая функция такая, что интеграл

$$\int_0^\infty |F(r)|^{p-l} |f(r)|^l r^{l-1} \varphi_{k-1}^{l-1}(r) \left| \ln_k \left(e_k + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right|^{l-s} dr$$

сходится и функция $F(x)$ определена следующим образом:

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_r^R f(t) dt, & r \in (0, R), \\ F(r) &= \int_R^r f(t) dt, & r \in (R, \infty). \end{aligned}$$

Тогда для любого $R > 0$ верно следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{r\varphi_{k-1}(r)|\ln_k(e_k + |\ln(r/R)|)|^s} \left| \int_R^r f(t) dt \right|^p \\ & \leq \left(\frac{p}{s-1} \right)^l \int_0^\infty |F(r)|^{p-l} |f(r)|^l r^{l-1} \varphi_{k-1}^{l-1}(r) \left| \ln_k \left(e_k + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right|^{l-s} dr. \end{aligned}$$

Пусть $R > 0$ и $q(r)$ — положительная и абсолютно непрерывная функция на $(0, +\infty)$ такая, что при $r \in (0, R)$ для некоторого $h_1 > 0$ выполнено условие

$$1 - \frac{p}{s-1} r\varphi_k(r) \frac{q'(t)}{q(t)} \geq \frac{1}{h_1},$$

и при $r \in (R, +\infty)$ для некоторого $h_2 > 0$ выполнено условие

$$1 + \frac{p}{s-1} r \varphi_k(r) \frac{q'(t)}{q(t)} \geq \frac{1}{h_2}.$$

Тогда, используя те же рассуждения, что и для теоремы 4, аналогично доказательству теоремы 2, можем показать, что верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $p \geq 1$, $1 < s < p+1$ и $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — локально интегрируемая функция такая, что интеграл

$$\int_0^\infty \frac{|f(r)|^p}{r} \varphi_{k-1}^{p-1}(r) \left| \ln_k \left(e_k + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right|^{p-s} dr$$

сходится, а функция $G(r)$ определена следующим образом:

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{q(r)} \int_r^R \frac{q(t)f(t)}{t} dt, & r \in (0, R), \\ G(r) &= \frac{1}{q(r)} \int_R^r \frac{q(t)f(t)}{t} dt, & r \in (R, \infty). \end{aligned}$$

Тогда для любого $R > 0$ верно следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{r \varphi_{k-1}(r) |\ln_k(e_k + |\ln(r/R)|)|^s} |G(r)|^p \\ & \leq \left(\frac{\max\{h_1, h_2\}p}{s-1} \right)^p \int_0^\infty \frac{|f(r)|^p}{r} \varphi_{k-1}^{p-1}(r) \left| \ln_k \left(e_k + \left| \ln \frac{r}{R} \right| \right) \right|^{p-s} dr. \end{aligned}$$

Теорема 4 при $s = p$, $l = p$, $k = 0$ и теорема 5 при $k = 0$, $s = p$, $q(r) = 1$ дают неравенство (1.2).

Пусть

$$\psi_m(x) = \prod_{i=0}^k \left| \ln_i \left(e_{i+1} + \left| \ln \frac{x}{a} \right| \right) \right|, \quad k \geq m \geq 0.$$

Тогда верен аналог теоремы 3 с вложенными логарифмами.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\alpha \geq 1$, $s > 1$ и $a > 0$. Тогда для любого $b > 0$ и для любой функции $f \in C_0^1(0, b)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^b \frac{|f(x)|}{x^\alpha \psi_{k-1}(x) [\ln_k(e_{k+1} + |\ln(a/x)|)]^s} dx \\ & \leq d^l \int_0^b \frac{|f'(x)|^l |f(x)|^{p-l}}{x^{\alpha-l}} \psi_{k-1}^{l-1}(x) \left[\ln_k \left(e_{k+1} + \left| \ln \frac{a}{x} \right| \right) \right]^{s(l-1)} dx, \end{aligned}$$

где

$$d = \max \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{s-1}, \frac{1}{s-1} \right\}.$$

3. Аналоги одномерных неравенств в многомерном случае. В этом пункте мы используем предыдущие обозначения.

Запишем неравенство теоремы 1 в следующей форме:

$$\int_0^\infty \frac{|v(r)|^p}{r|\ln(r/R)|^s} dr \leq \left(\frac{p}{s-1}\right)^l \int_0^\infty |v(r)|^{p-l} |v'(r)|^l r^{l-1} \left|\ln \frac{r}{R}\right|^{l-s} dr, \quad (3.1)$$

где $v(r)$ – абсолютно непрерывная функция при $r > 0$, удовлетворяющая условию $v(R) = 0$. Далее, пользуясь подходом Дубинского [2], получим соответствующее неравенство типа Харди в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $u \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $p \geq 1$, $n \geq 1$, произвольная функция такая, что интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-l} |\nabla u(x)|^l |x|^{l-n} \left|\ln \frac{|x|}{R}\right|^{l-s} dx$$

сходится. Тогда, используя сферические координаты, из неравенства (3.1) для любого $R > 0$ получаем неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(Rx/|x|)|^p}{|x|^n |\ln(|x|/R)|^s} dx \leq \left(\frac{p}{s-1}\right)^l \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-l} |\nabla u(x)|^l |x|^{l-n} \left|\ln \frac{|x|}{R}\right|^{l-s} dx,$$

где $l \in [1, p]$ и $1 < s < p+1$.

Аналогичным образом для произвольной функции $u \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $p \geq 1$, $n \geq 1$, такой, что интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-l} |\nabla u(x)|^l |x|^{l-n} \varphi_{k-1}(|x|) \left|\ln \frac{|x|}{R}\right|^{l-s} dx$$

сходится, получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(Rx/|x|)|^p}{|x|^n \varphi_{k-1}(|x|) |\ln_k(e_k + |\ln(|x|/R)|)|^s} dx \\ & \leq \left(\frac{p}{s-1}\right)^l \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-l} |\nabla u(x)|^l |x|^{l-n} \varphi_{k-1}^{l-1} \left|\ln_k\left(e_k + \left|\ln \frac{|x|}{R}\right|\right)\right|^{l-s} dx, \end{aligned}$$

где $l \in [1, p]$ и $1 < s < p+1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Авхадиев в [7] разработал метод, который для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ позволяет получить неравенства по произвольному открытому множеству Ω . Применяя этот метод к частным случаям неравенств теорем 3 и 6, мы можем получить неравенства из статьи [8], поскольку одномерные неравенства теорем 3 и 6 обобщают соответствующие одномерные неравенства из [8].

Выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Фариту Габидиновичу Авхадиеву за полезные советы и всяческую поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.

- [2] Ю. А. Дубинский, “Об одном неравенстве типа Харди и его приложениях”, *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **269**, МАИК, М., 2010, 112–132.
- [3] B. G. Pachpatte, “A note on certain inequalities related to Hardy’s inequality”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **23**:11 (1992), 773–776.
- [4] J. E. Pečarić, E. R. Love, “Still more generalization of Hardy’s inequality”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **59**:2 (1995), 214–224.
- [5] M. Del Pino, J. Dolbeault, S. Filippas, A. Tertikas, “A logarithmic Hardy inequality”, *J. Funct. Anal.*, **259**:8 (2010), 2045–2072.
- [6] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev, “A geometrical version of Hardy’s inequality”, *J. Funct. Anal.*, **189**:2 (2002), 539–548.
- [7] Ф. Г. Авхадиев, “Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ*, Сборник статей, Тр. МИАН, **255**, Наука, М., 2006, 8–18.
- [8] Ф. Г. Авхадиев, Р. Г. Насибуллин, И. К. Шафигуллин, “Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства”, *Изв. вузов. Матем.*, 2011, №9, 90–94.
- [9] F. G. Avkhadiev, “Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants”, *Lobachevskii J. Math.*, **21** (2006), 3–31.

Р. Г. Насибуллин

Казанский (Приволжский)

федеральный университет

E-mail: NasibullinRamil@gmail.com

Поступило

09.05.2011