Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Бондаренко, Числа классов классических групп, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 49–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm918>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 02:15:24

УДК 512

ЧИСЛА КЛАССОВ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

А. А. Бондаренко

В статье завершено описание чисел и групп классов простых классических неопределенных групп над полем алгебраических чисел K в канонических реализациях. Доказан критерий одноклассности односвязной полупростой алгебраической группы в некоторой заданной K -реализации. Получен критерий существования одноклассной квадратичной формы среди форм, $\mathbb{Q}$ -эквивалентных определенной квадратичной форме от $n \geq 3$ переменных над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Библиография: 10 названий.

Введение. Пусть G – линейная алгебраическая группа, определенная над полем алгебраических чисел K . Под заданием реализации группы G будем понимать задание точного K -определенного представления $\varphi: G \rightarrow GL_r$ и решетки $L(\varphi) \subset K^r$. Обозначим через $\varphi(G)_A$, $\varphi(G)_{A(\infty)}$ и $\varphi(G)_K$ соответственно группу аделей, целых аделей и главных аделей группы $\varphi(G)$. Число классов группы G , отвечающее реализации φ , мы будем обозначать через $\text{cl}(\varphi(G))$ либо $\text{cl}(G^{L(\varphi)})$ или просто $\text{cl}(G)$, если это не приводит к недоразумению. Наиболее существенные результаты по проблеме вычисления числа $\text{cl}(G)$ были получены лет двадцать назад (см. [1]) и изложены в монографии [2].

Описанию чисел и групп классов полупростых групп некомпактного типа в наиболее распространенных канонических реализациях посвящена работа [3]. В ней приведены эскизы доказательств теоремы реализации возможных чисел и групп классов на решетках степени r для полупростых K -групп G некомпактного типа степени r в случаях, если G – одна из следующих групп:

- а) G – полупростая группа с циклической фундаментальной группой, обладающая билинейным симметрическим инвариантом, заданным на пространстве представления;
- б) G – присоединенная алгебраическая группа, реализованная в качестве группы автоморфизмов соответствующей алгебры Ли;
- с) G – простая классическая группа в каноническом представлении.

Изложение доказательств теоремы реализации в случаях а) и б) почти полностью приведено в [2]. Изложению доказательства теоремы в случае с) посвящен п. 1 этой статьи.

В п. 2 настоящей статьи рассматриваются группы компактного типа. Основное содержание пункта посвящено исследованию вопроса о существовании одноклассной реализации, когда G – группа компактного типа, т.е. компактна архимедова часть G_∞ групп аделей. Для всякой полупростой группы G некомпактного типа всегда существует

одноклассная реализация группы G и решетку $L(\varphi)$ можно выбрать свободной (см. [2]). Для групп G компактного типа это не так. Более того, это является скорее исключением, чем правилом. Необходимое и достаточное условие одноклассности для односвязных групп в некоторой заданной реализации анонсировано еще в 1978 году [4]:

ТЕОРЕМА. Пусть G – односвязная полупростая алгебраическая K -группа. Тогда и только тогда $\text{cl}(G) = 1$, когда произведение подгрупп G_K и $G_{A(\infty)}$ является подгруппой G_A .

В п. 2 дано полное доказательство этой теоремы. Кроме того, получен критерий существования одноклассной квадратичной формы среди квадратичных форм, $\mathbb{Q}$ -эквивалентных определенной квадратичной форме от $n \geq 3$ переменных над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Терминология и обозначения, используемые в настоящей статье, традиционны (см. [2]).

1. Числа классов классических групп некомпактного типа. Описание алгебраических линейных классических групп с практически полными доказательствами приведено в [2]. Как следует из “явного” описания простых классических групп, классические группы типов (A_l) и (C_l) в канонической реализации односвязны. Мы рассматриваем классические группы некомпактного типа, поэтому описание чисел и групп классов в этом случае тривиально. Классические группы типа (B_l) – это специальные ортогональные группы, типа (D_l) – специальные ортогональные группы и специальные унитарные группы. Описание чисел классов ортогональных групп неопределенных квадратичных форм от $n \geq 3$ переменных получено Кнезером и изложено в [2].

Таким образом, для завершения описания чисел и групп классов простых классических групп остается это сделать для специальных унитарных групп $SU_l(D, h)$, где D – тело кватернионов над K с инволюцией первого рода σ , а невырожденная форма h эрмитова, если σ имеет первый тип, и косоэрмитова, если σ имеет второй тип.

Для определенности будем считать, что форма h косоэрмитова и инволюция σ – каноническая инволюция сопряжения (она второго типа).

На самом деле специальная унитарная группа естественным образом отождествляется с группой рациональных точек алгебраической группы (см. [2]). Именно эту алгебраическую группу G мы будем иметь в виду, говоря о специальной унитарной группе как об алгебраической группе. Фундаментальная группа этой алгебраической группы второго порядка. Описание групп и чисел классов в этом случае дает

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – K -определенная специальная унитарная группа косоэрмитовой формы h размерности l над телом кватернионов над K с канонической инволюцией сопряжения. Тогда для любой конечной абелевой группы B экспоненты 2 существует решетка $L_B \subset K^{4l}$ такая, что $\mathcal{G} \text{cl}(G^{L_B}) \cong B$. В частности, для любого числа вида 2^d существует решетка $L(d) \subset K^{4l}$ такая, что $\text{cl}(G^{L(d)}) = 2^d$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Описание групп и чисел классов унитарной группы приведено в теореме 3 из [3], но форма h взята эрмитова, поэтому инволюция σ тела кватернионов первого типа, а не просто первого рода, как это можно понять из [3].

Способ доказательства этой теоремы является модификацией общего метода описания чисел и групп классов полупростых алгебраических групп, изложенного в деталях

в монографии [2]. Но для доказательства этой теоремы необходимо иметь локальную решетку с достаточно “малым” стабилизатором для бесконечного числа нормирований из V_f^K . Описание необходимой решетки в пространстве K_v^{4l} приведено ниже. Идея построения этой решетки подобна идее построения решетки в случае а).

Опишем алгебраическую “реализацию” специальной унитарной группы $SU_l(D, h)$ в подходящем виде. Пусть E – l -мерное векторное пространство над телом D с центром K , h – невырожденная косоэрмитова форма на $E \times E$, σ – каноническая инволюция тела кватернионов D . В пространстве D^l существует базис $u_1, \dots, u_l$ (см. [2], [5]) ортогональный относительно формы h , т.е. $h(u_i, u_j) = 0$ при $i \neq j$, $h(u_i, u_i) = a_i \in D$ и $\sigma(a_i) = -a_i$. Тогда в базисе $u_1, \dots, u_l$ группа $SU_l(D, h) = \{A \in M_l(D) / {}^*AHA = H, Nrd_{M_l(D)/K}(A) = 1\}$, где матрица $H = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_l)$, ${}^*A = (\sigma(a^{\beta\alpha}))$, если $A = (a^{\alpha\beta})$.

Если $x = (x^{\alpha\beta}) \in M_l(D)$, то при регулярном представлении $\rho: D \rightarrow M_4(K)$ тела D над K матрица x переходит в матрицу $(x_{ij}^{\alpha\beta}) \in M_{4l}(K)$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$; $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, l$), где $(x_{ij}^{\alpha\beta})$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) – регулярное представление элемента $x^{\alpha\beta} \in D$ матрицей над K (см. [2]). При таком соответствии множество матриц из $SU_l(D, h)$ переходит в множество K -точек некоторой алгебраической K -группы G , т.е. $SU_l(D, h)$ реализуется как группа автоморфизмов пространства K^{4l} в некотором базисе

$$e_1, e_2, \dots, e_{4l}. \quad (1)$$

В пространстве K_v^{4l} построим необходимую решетку для бесконечного множества нормирований $v \in V_f^K$. Элементы матрицы из образа $SU_l(D, H)$ в $M_{4l}(K)$ при гомоморфизме, индуцируемом ρ , удовлетворяют некоторой системе линейных уравнений, определяющей $\rho(D)$ как подпространство в $M_4(K)$:

$$f_k(x_{ij}^{\alpha\beta}) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad k = 1, \dots, s, \quad (2)$$

для всех $\alpha, \beta = 1, \dots, l$, и матричному уравнению

$$(\tilde{\sigma}(x_{ij}^{\beta\alpha}))\tilde{H}(x_{ij}^{\alpha\beta}) = \tilde{H}, \quad (3)$$

где $\tilde{H} = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_l)$ – образ H при регулярном представлении ρ элементов матрицы $H = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_l)$, $\tilde{\sigma}$ – линейный автоморфизм $M_4(K)$, продолжающий инволюцию $\rho\sigma\rho^{-1}$ на $\rho(D)$. По определению G этим уравнениям удовлетворяют и элементы всех матриц из группы G , реализованной в базисе (1).

Пусть теперь $L_v - O_v$ -решетка пространства K_v^{4l} с базисом

$$e_1, \pi e_2, \dots, \pi_v^{4l-1} e_{4l}, \quad (4)$$

где π_v – униформизирующий элемент относительно нормирования $v \in V_f^K$. Опишем стабилизатор $G_{O_v}^{L_v}$ решетки L_v в G_{K_v} .

Если $g \in G_{O_v}^{L_v}$ и $g = (g_{rt})$ в базисе (1), то

$$g(\pi_v^{t-1} e_t) = \sum_{r=1}^{4l} \pi_v^{t-r} g_{rt} \cdot (\pi^{r-1} e_r)$$

для всех $t = 1, 2, \dots, 4l$. Поэтому $g_{rt} \in \mathcal{P}_v^{r-t}$ при $r \geq t$, т.е. все элементы в матрице g ниже главной диагонали сравнимы с нулем по $\text{mod } \pi_v$. Запишем матрицу g в блочном виде. Пусть $g = (a_{ij}^{\alpha\beta})$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$; $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, l$). Рассмотрим матрицу $B = (\tilde{\sigma}(a_{ij}^{\beta\alpha}))$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$; $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, l$). Каждый блок $(a_{ij}^{\alpha\beta})$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) матрицы g удовлетворяет уравнениям (2), поэтому имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1\beta_1 & a_2\beta_2 & -a_3\beta_1\beta_2 \\ a_1 & a_0 & a_3\beta_2 & -a_2\beta_2 \\ a_2 & -a_3\beta_1 & a_0 & a_1\beta_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix},$$

где $\beta_2, \beta_1 \in K$ – постоянные, с помощью которых задается умножение кватернионов в D (см., например, [5]), a_0, a_1, a_2, a_3 – элементы поля K_v . Учитывая действие $\tilde{\sigma}$, получаем, что блок $\tilde{\sigma}(a_{ij}^{\alpha\beta})$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_0 & -a_1\beta_1 & -a_2\beta_2 & a_3\beta_1\beta_2 \\ -a_1 & a_0 & -a_3\beta_3 & a_2\beta_2 \\ -a_2 & a_3\beta_1 & a_0 & -a_1\beta_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому все элементы блоков матрицы B выше блоков главной диагонали сравнимы с нулем по $\text{mod } \pi_v$. Матрица g удовлетворяет уравнению (3); значит, $B = \tilde{H}g^{-1}\tilde{H}^{-1}$. Но $g^{-1} \in G_{\mathcal{O}_v}^{L_v}$; следовательно, все элементы матрицы g^{-1} ниже главной диагонали сравнимы с нулем по $\text{mod } \pi_v$; $\tilde{H} = \text{diag}(H_1, \dots, H_l)$, поэтому во всех блоках матрицы B ниже блоков главной диагонали элементы сравнимы с нулем по $\text{mod } \pi_v$ почти для всех $v \in V_f^K$ (достаточно исключить нормирования $v \in S_1$, для которых $\tilde{H}$ либо $\tilde{H}^{-1}$ имеют элементы, не являющиеся целыми v -адическими числами). Следовательно, все элементы матрицы B вне диагональных блоков сравнимы с нулем по $\text{mod } \pi_v$ почти для всех $v \in V_f^K$. Сравнивая матрицы g и B , замечаем, что и все элементы матрицы g вне блоков главной диагонали сравнимы с нулем по $\text{mod } \pi_v$ почти для всех $v \in V_f^K$.

Осталось рассмотреть диагональные блоки $(a_{ij}^{\alpha\alpha})$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) матрицы g . Все элементы диагонального блока ниже главной диагонали сравнимы с нулем по $\text{mod } \pi_v$, ибо таковы все элементы матрицы g ниже главной диагонали. Поэтому, учитывая симметрию блока (см. вид блока), получаем, что все элементы диагонального блока выше главной диагонали сравнимы с нулем по $\text{mod } \pi_v$ почти для всех $v \in V_f^K$ (достаточно исключить $v \in S_2$, когда β_1 либо β_2 не являются целыми v -адическими числами). Следовательно, диагональные блоки $(a_{ij}^{\alpha\alpha})$ и $\tilde{\sigma}(a_{ij}^{\alpha\alpha})$ сравнимы с матрицей вида

$$\begin{pmatrix} a_0^{\alpha\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0^{\alpha\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0^{\alpha\alpha} \end{pmatrix}$$

по $\text{mod } \pi_v$ для всех $v \in V_f^K \setminus S_2$.

Элементы всех блоков матриц g и B , за исключением диагональных, сравнимы с нулем по $\text{mod } \pi_v$ для всех $v \in V_f^K \setminus S_1$. Поэтому почти для всех $v \in V_f^K$ для каждого диагонального блока из равенства (3) получаем матричное сравнение

$$\tilde{\sigma}(a_{ij}^{\alpha\alpha})H_\alpha(a_{ij}^{\alpha\alpha}) \equiv H_\alpha \pmod{\pi_v}, \quad (5)$$

где H_α – матрица, соответствующая регулярному представлению элемента a_α матрицы H . Исключив из V_f^K , возможно, еще конечное число нормирований v , при которых некоторые H_α сравнимы с нулевой матрицей по $\text{mod } \pi_v$, получим из (5), что $(a_0^{\alpha\alpha})^2 \equiv 1 \pmod{\pi_v}$ почти для всех $v \in V_f^K$. Поэтому $a_0^{\alpha\alpha} \equiv \pm 1 \pmod{\pi_v}$.

Подводя итог, получаем, что $G_{O_v}^{L_v} \subset \Gamma G_{O_v}(\mathcal{P}_v)$, где $G_{O_v}(\mathcal{P}_v)$ – конгруэнц-подгруппа в $G_{O_v}^{L_v}$, отвечающая максимальному идеалу $\mathcal{P}_v$ кольца O_v , $\Gamma = \{(e_{ij}), e_{ii} = \pm 1, i = 1, 2, \dots, 4l; e_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j\}$, почти для всех $v \in V_f^K$. Иначе, справедлива

ЛЕММА. Пусть G – K -определенная специальная унитарная группа косоэрмитовой формы h размерности l над телом кватернионов над K с канонической инволюцией сопряжения. Тогда существует конечное множество неархимедовых нормирований S таких, что для любого $v \in V_f^K \setminus S$ существует решетка $L_v \subset K_v^{4l}$, для которой $G_{O_v}^{L_v} \subset \Gamma G_{O_v}(\mathcal{P}_v)$, где $\Gamma = \{(e_{ij}), e_{ii} = \pm 1, i = 1, 2, \dots, 4l; e_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j\}$.

Лемма дает необходимую локальную решетку L_v в пространстве K_v^{4l} . После этого доказательство теоремы 1 проводится по отработанной схеме (см., например, [2]).

2. Числа классов групп компактного типа. Наиболее законченные результаты по описанию чисел классов групп компактного типа, известные в настоящее время, изложены в [2]. После знакомства с ними возникает закономерный вопрос: какое наименьшее значение принимает число $\text{cl}(\varphi(G))$ при возможных K -реализациях φ группы G ? В частности, возникает естественная задача определения условий, которым должна удовлетворять группа G , чтобы для нее существовала одноклассная реализация.

Критерий одноклассности односвязной полупростой алгебраической группы в некоторой заданной реализации устанавливает

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – односвязная полупростая алгебраическая K -группа. Тогда и только тогда $\text{cl}(G) = 1$, когда произведение подгрупп G_K и $G_{A(\infty)}$ является подгруппой G_A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия теоремы очевидна.

Докажем достаточность. Для $v_0 \in V_f^K$, $\alpha \in G_{K_{v_0}}$ обозначим через $x^{v_0}(\alpha)$ адель с компонентами

$$x_v = \begin{cases} 1, & v \neq v_0, \\ \alpha, & v = v_0. \end{cases}$$

Пусть $v_0 \in V_f^K$ такое, что $G_{K_{v_0}}$ – некомпактная группа (такое нормирование существует). А тогда из сильной аппроксимационной теоремы (см. [2]) имеем $G_K G_{A(\infty, v_0)} = G_A$, где

$$G_{A(\infty, v_0)} = \prod_{v \in (V_\infty^K, v_0)} G_{K_v} \cdot \prod_{v \in V_f^K \setminus v_0} G_{O_v}.$$

Поэтому любой адель $g = (g_v) \in G_A$ представляется в виде $g = g_1 x^{v_0}(\alpha) g_2$, где $g_1 \in G_K$, $g_2 \in G_{A(\infty)}$ и α – подходящий элемент из $G_{K_{v_0}}$. Так как $G_K G_{A(\infty)}$ – группа, для доказательства включения $G_A \subset G_K G_{A(\infty)}$ достаточно установить, что $x^{v_0}(\alpha) \in G_K G_{A(\infty)}$ для любого $\alpha \in G_{K_{v_0}}$.

Из теоремы о конечности числа классов [2] следует, что индекс $[G_A : G_K G_{A(\infty)}]$ конечен. Пусть u – унитарный элемент в $G_{K_{v_0}}$, U – содержащая его однопараметрическая подгруппа. Тогда $x^{v_0}(U_{K_{v_0}})$ является полной абелевой группой, поэтому

$x^{v_0}(U_{v_0}) \subset G_K G_{A(\infty)}$. Так как $G_{K_{v_0}}$ – некомпактная группа, из справедливости для $G_{K_{v_0}}$ гипотезы Кнезера–Титса (см. [2]) следует, что $G_{K_{v_0}}$ порождается унипотентными элементами из $G_{K_{v_0}}$. С учетом отмеченного выше факта это доказывает включение $x^{v_0}(\alpha) \in G_K G_{A(\infty)}$ для любого $\alpha \in G_{K_{v_0}}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть G – полупростая алгебраическая K -группа, $\pi: G \rightarrow \tilde{G}$ – универсальное K -определенное накрытие, f – показатель ядра этого накрытия.

Совершенно аналогично доказательству теоремы 2 доказываемся, что $G_K G_{A(\infty)}$ – подгруппа G_A тогда и только тогда, когда $G_K G_{A(\infty)} \supset \pi_A(\tilde{G}_A)$. Это утверждение похожим образом установлено при доказательстве теоремы 2 из [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Возникает естественный вопрос: существуют ли полупростые группы компактного типа, для которых $G_K G_{A(\infty)}$ может быть группой? Существование полупростых групп G компактного типа и их реализаций φ таких, что $\varphi(G)_K \varphi(G)_{A(\infty)}$ – группа, следует из известных результатов по описанию одноклассных положительно определенных квадратичных форм размерности $n \geq 3$ над полем рациональных чисел (см., например, [7], [8]). В частности, отсюда следует существование односвязных простых K -групп компактного типа и их реализаций φ таких, что $\varphi(G)_K \varphi(G)_{A(\infty)}$ – группа. Поэтому теорема 2 и утверждения из замечания 1 являются не просто абстрактными утверждениями, а имеют реальное основание для применения.

Отметим факт, который показывает, что существование такой K -реализации G , что $G_K G_{A(\infty)}$ – подгруппа G_A , определяется внутренними свойствами самой группы и не зависит от выбора точного представления.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $G \subset GL_n$ – произвольная алгебраическая K -группа степени n . Предположим, что существует решетка $L \subset K^n$ такая, что $G_K G_{A(\infty)}^L$ – подгруппа G_A . Тогда для любого точного K -определенного представления $\varphi: G \rightarrow GL_r$ также существует решетка $L(\varphi) \subset K^r$ такая, что $\varphi(G)_K \varphi(G)_{A(\infty)}^{L(\varphi)}$ – подгруппа $\varphi(G)_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через S конечное подмножество V_f^K такое, что для $v \in V_f^K \setminus S$ выполняются следующие условия: $L_v = O_v^n$ и морфизм φ определен над O_v . Для каждого $v \in S$ группа $\varphi(G_{O_v}^{L_v})$ компактна, поэтому существует решетка $M_v \subset K_v^r$ такая, что $\varphi(G_{O_v}^{L_v}) \subset \varphi(G_{O_v})^{M_v}$. Зададим локализации искомой решетки $L(\varphi)$ следующим образом:

$$L(\varphi)_v = \begin{cases} M_v, & v \in S, \\ O_v^r, & v \notin S. \end{cases}$$

Тогда из наших построений вытекает, что $\varphi(G)_{A(\infty)}^{L(\varphi)} \subset \varphi(G)_{A(\infty)}^{L(\varphi)}$. Поэтому $\varphi(G)_K \times \varphi(G)_{A(\infty)}^{L(\varphi)} \supset \varphi(G_K G_{A(\infty)}^L)$. Но $G_K G_{A(\infty)}^L$ – подгруппа G_A ; следовательно, по утверждению из замечания 1 $G_K G_{A(\infty)}^L \supset \pi_A(\tilde{G}_A)$. А тогда $\varphi(G)_K \varphi(G)_{A(\infty)}^{L(\varphi)}$ – подгруппа $\varphi(G)_A$. Предложение доказано.

Особый интерес представляет вопрос о существовании одноклассной квадратичной формы f над вполне вещественным полем K среди квадратичных форм, K -эквивалентных положительно определенной форме g от $n \geq 3$ переменных. Эта задача над полем рациональных чисел рассматривалась многими авторами (см. [7], [8]).

Получим критерий существования одноклассной квадратичной формы среди $\mathbb{Q}$ -эквивалентных квадратичных форм положительно определенной квадратичной форме g над $\mathbb{Q}$.

Хорошо известно (см. [2]), что $\text{cl}(H) = c(g)$, где $H = O(g)$, $c(g)$ – число классов в роде формы g . Поэтому существование одноклассной квадратичной формы f среди эквивалентных g равносильно существованию одноклассной реализации группы $H = O(g)$.

Пусть g – положительно определенная квадратичная форма от $n \geq 3$ переменных над кольцом $\mathbb{Z}$ целых рациональных чисел, $H = O(g)$ и $G = SO(g)$. Определенность квадратичной формы g равносильна тому, что $G_\infty = G_R$ компактна.

Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть g – положительно определенная квадратичная форма степени $n \geq 3$ над $\mathbb{Z}$. Одноклассная квадратичная форма f , $\mathbb{Q}$ -эквивалентная g , существует тогда и только тогда, когда $G_{\mathbb{Q}} G_{A(\infty)}^L$ является подгруппой G_A в некоторой $\mathbb{Q}$ -реализации группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $G_{\mathbb{Q}} G_{A(\infty)}^L$ является подгруппой G_A в некоторой $\mathbb{Q}$ -реализации группы G . Согласно предложению можем считать, что $G = SO(g)$ и решетка $L \subset \mathbb{Q}^n$. Хорошо известно, что множество $V_f^{\mathbb{Q}}$ исчерпывается p -адическими нормированиями. $G_{\mathbb{Z}_p}^{L_p}$ – максимальная компактная подгруппа $G_{\mathbb{Q}_p}$ для всех p -адических нормирований, за исключением, возможно, конечного множества нормирований $S \subset V_f^{\mathbb{Q}}$ (см. [2]). Для $p \in S$ группа $G_{\mathbb{Z}_p}^{L_p}$ содержится в некоторой максимальной компактной подгруппе $G_{\mathbb{Z}_p}^{M_p}$, где M_p – решетка из $\mathbb{Q}_p^n$. Пусть M – решетка из $\mathbb{Q}^n$ с локализациями

$$M_p = \begin{cases} L_p, & p \notin S, \\ M_p, & p \in S. \end{cases}$$

Очевидно, что $G_{A(\infty)}^L \subset G_{A(\infty)}^M$, и следовательно, $G_{\mathbb{Q}} G_{A(\infty)}^M$ – подгруппа G_A . Известно (см., например, [9], [10]), что $\Theta(G_{\mathbb{Z}_p}^{M_p}) \supset \mathbb{Z}_p^* \mathbb{Q}_p^{*2}$ для любого p , где Θ – спинорное отображение на G .

Образ $\Theta(G_{\mathbb{Q}}) = \{\alpha \mathbb{Q}^{*2} / \alpha \in \mathbb{Q}, \alpha > 0\}$ (см. [5]) и, значит, $\Theta(G_{\mathbb{Q}}) \supset \{p \mathbb{Q}^{*2} / p > 0 - \text{произвольное простое число}\}$. Следовательно, $\Theta(G_{\mathbb{Q}}) \Theta(G_{A(\infty)}^M) = \Theta(G_A)$. Как следует из замечания 1, $G_{\mathbb{Q}} G_{A(\infty)}^M$ содержит $\pi_A(\tilde{G}_A)$ и поэтому $\text{cl}(G^M) = 1$. А тем более $\text{cl}(O(g)^M) = 1$. Через f обозначим реализацию квадратичной формы g в базисе решетки M (M – свободная решетка, ибо такова произвольная решетка над $\mathbb{Z}$). Очевидно, f и есть одноклассная квадратичная форма, $\mathbb{Q}$ -эквивалентная g .

Необходимость. Пусть f – одноклассная квадратичная форма, $\mathbb{Q}$ -эквивалентная g . Тогда $M = \mathbb{Z}^n$ – одноклассная решетка относительно действия группы $H = O(f)$. Хорошо известно (см. [2]), что $\text{cl}(H^M) = \text{cl}(G^M)$, если квадратичная решетка M имеет автоморфизм с определителем -1 . Если n нечетно, то так всегда. И в этом случае $G_K G_{A(\infty)}^M = G_A$, т.е. $G_K G_{A(\infty)}^M$ – группа. Остается рассмотреть случай четного n .

Можем считать, что $H_{\mathbb{Z}_p}^{M_p}$ – максимальная компактная подгруппа $H_{\mathbb{Q}_p}$ для любого p . Не ограничивая общности (см. [10]) можем считать, что $M_p = \mathbb{Z}_p [pe_1^{(p)}, \dots, pe_s^{(p)}, e_{s+1}^{(p)}, \dots, e_n^{(p)}]$, $0 \leq s \leq l \leq n/2$, где l – индекс квадратичной формы f над $\mathbb{Q}_p$, $e_1^{(p)}, \dots, e_n^{(p)}$ –

базис Витта квадратичного пространства $\mathbb{Q}_p^n$, выбранного так, что $\mathbb{Z}_p[e_{l+1}^{(p)}, \dots, e_{n-l}^{(p)}]$ — $2\mathbb{Z}_p$ -максимальная решетка в соответствующем пространстве.

Пусть S — множество p -адических нормирований, для которых $s = l = n/2$. Положим b равным произведению простых чисел, соответствующих нормированиям из S . Рассмотрим квадратичную форму $\varphi = (1/b)f$. Заметим, что φ $\mathbb{Z}_p$ -эквивалентна квадратичной форме с целыми p -адическими коэффициентами для всех p . Следовательно, φ с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. Далее, так как $\mathbb{Z}_p$ -эквивалентные формы представляют над $\mathbb{Z}_p$ одно и то же множество чисел, то φ представляет 2 над всеми $\mathbb{Z}_p$. Очевидно, $H = O(f) = O(\varphi)$ и φ — одноклассная квадратичная форма.

Напомним утверждение, применяемое многими авторами (в частности, в [7], [8]): пусть φ — одноклассная положительно определенная квадратичная форма над $\mathbb{Z}$, a — целое положительное число; φ представляет a над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда φ представляет a над $\mathbb{Z}_p$ для всех p . Отсюда следует, что φ представляет 2 над $\mathbb{Z}$, т.е. существует $u \in M$ такое, что $\varphi(u) = 2$. Определитель преобразования решетки M

$$\tau_u(x) = x - \frac{2B(u, x)}{\varphi(u)}u = x - B(u, x)u,$$

где B — билинейная форма, соответствующая квадратичной форме φ , равен 1. Следовательно, $\text{cl}(G^M) = \text{cl}(H^M) = 1$, а значит, $G_{\mathbb{Q}}G_{A(\infty)}^M$ — группа. Это и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Платонов В. П., Рапичук А. С. Алгебраические группы // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1983. С. 80–134.
- [2] Платонов В. П., Рапичук А. С. Алгебраические группы и теория чисел. М.: Наука, 1991.
- [3] Бондаренко А. А. Числа и группы классов полупростых неопределенных алгебраических групп в канонических реализациях // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25. № 3. С. 773–776.
- [4] Бондаренко А. А. О числе классов групп аделей алгебраических групп // VI Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докл. Киев, 1978. С. 10–11.
- [5] Дьедонне Ж. Геометрия классических групп. М.: Мир, 1974.
- [6] Платонов В. П., Бондаренко А. А., Рапичук А. С. Числа и группы классов алгебраических групп. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 2. С. 395–414.
- [7] Watson G. L. One-class genera of positive ternary quadratic forms // Math. 1975. V. 22. № 1. P. 1–11.
- [8] Watson G. L. One-class genera of positive quadratic forms in at least five variables // Acta Arith. 1975. V. 26. № 3. P. 309–327.
- [9] Бондаренко А. А. Классификация максимальных арифметических подгрупп неопределенных ортогональных групп типа (B_l) // Матем. сб. 1985. Т. 127(169). № 1. С. 72–91.
- [10] Бондаренко А. А. К проблеме максимальности арифметических подгрупп неопределенных ортогональных групп типа (D_l) // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 3. С. 388–401.