Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Голощапова, В. П. Заставный, М. М. Маламуд,
Положительно определенные функции и спектральные
свойства оператора Шрёдингера с точечными вза-
имодействиями, *Матем. заметки*, 2011, том 90, вы-
пуск 1, 151–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:41:33

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Положительно определенные функции и спектральные свойства оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями

Н. И. Голощапова, В. П. Заставный, М. М. Маламуд

Введение. Известно, что с дифференциальным выражением в $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$-\Delta + \sum_{j=1}^m \alpha_j \delta(\cdot - x_j), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

при $d = 1$ для каждого набора $\alpha := \{\alpha_j\}_{j=1}^m$ естественным образом ассоциирован самосопряженный оператор. Подобная ситуация не имеет места при $d \in \{2, 3\}$ в силу того, что функционал $\delta(x): f \rightarrow f(x)$ не является непрерывным в $W_2^1(\mathbb{R}^d)$. В классической работе [1] Березин и Фаддеев первыми предложили (для случая $m = 1$) ассоциировать с (1) однопараметрическое семейство всех самосопряженных расширений следующего минимального оператора H_d в $L^2(\mathbb{R}^d)$ с индексами дефекта $n_{\pm}(H_d) = m$ (см. также [2; гл. II.1, II.4]):

$$H_d := -\Delta, \quad \text{dom}(H_d) := \{f \in W_2^2(\mathbb{R}^d) : f(x_j) = 0, j \in \{1, \dots, m\}\}. \quad (2)$$

В настоящем сообщении мы применяем теорию радиальных положительно определенных функций к исследованию спектральных свойств самосопряженных расширений H_d . С этой целью мы дополняем классическую теорему Шенберга.

1. Положительно определенные функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (i) Функцию $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называют *положительно определенной* в $\mathbb{R}^n$ ($g \in \Phi(\mathbb{R}^n)$) [3; гл. V, § 4], если она непрерывна в 0 и для произвольных конечных наборов

$$X := \{x_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \xi := \{\xi_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N},$$

выполнено

$$\sum_{k,j=1}^m \xi_k \bar{\xi}_j g(x_k - x_j) =: \sum_{k,j=1}^m \xi_k \bar{\xi}_j g_{kj} \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

(ii) Функцию g называют *строго положительно определенной* в $\mathbb{R}^n$ [4; гл. 3], если неравенство (3) строгое для произвольного набора различных точек X и произвольного нетривиального набора ξ , $\sum_{k=1}^m |\xi_k| > 0$.

Ясно, что строгая положительная определенность функции g эквивалентна положительной определенности всех матриц

$$G(X) = (g_{kj})_{k,j=1}^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Обозначим $|x|$ евклидову норму вектора $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}$.

Как обычно, $C_b[0, +\infty)$ – B -пространство непрерывных и ограниченных на $[0, \infty)$ функций. Функцию $f \in C_b[0, +\infty)$ называют *радиальной положительно определенной* и относят к классу Φ_n , $n \in \mathbb{N}$, если $f(|\cdot|) \in \Phi(\mathbb{R}^n)$. Функции класса Φ_n описываются следующей теоремой Шенберга [3; теорема 5.4.1].

ТЕОРЕМА 2. *Функция $f \in \Phi_n$ тогда и только тогда, когда она допускает представление*

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \Omega_n(st) d\mu(s), \quad \Omega_n(t) := \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{t}\right)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(t). \quad (4)$$

Здесь μ – неотрицательная конечная борелевская мера на $[0, \infty)$, $J_{(n-2)/2}(t)$ – функция Бесселя порядка $(n-2)/2$.

Оказывается, при каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо строгое включение $\Phi_{n+1} \subset \Phi_n$. Например, $(1 - |t|)_+^\delta \in \Phi_n$ в точности тогда, когда $\delta \geq (n+1)/2$ (см. [5; теорема 5]).

Функцию $f \in C[0, +\infty) \cap C^\infty(0, +\infty)$ называют *вполне монотонной* на интервале $[0, +\infty)$ и относят к классу $M[0, \infty)$, если

$$(-1)^k f^{(k)}(t) \geq 0 \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}_+ \text{ и } t > 0.$$

Из теорем Бернштейна и Шенберга вытекает (см. [3; гл. V, § 5]) эквивалентность

$$f(\cdot) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n \quad \Longleftrightarrow \quad f(\sqrt{\cdot}) \in M[0, \infty).$$

Отсюда вытекает импликация

$$f \in M[0, \infty) \quad \Longrightarrow \quad f \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n.$$

2. Дополнение к теореме Шенберга. Примеры. Следующая теорема дополняет теорему Шенберга.

ТЕОРЕМА 3. *Если $f \in \Phi_n$, $n \geq 2$, и $f(t) \not\equiv \text{const}$, то функция $f(|\cdot|)$ строго положительно определена в $\mathbb{R}^n$.*

ПРИМЕР 4. (1) Так как включение $\Phi_{n+1} \subset \Phi_n$ строгое, то в силу (4) $\Omega_n \in \Phi_n$, но $\Omega_n \notin \Phi_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Учитывая равенство

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right),$$

получаем

$$\Omega_1(t) = \cos t, \quad \Omega_2(t) = J_0(t), \quad \Omega_3(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

По теореме 3 функция $\Omega_n(|\cdot|)$, $n \geq 2$, строго положительно определена в $\mathbb{R}^n$.

(2) Если $f \in M[0, \infty)$, $f(\cdot) \not\equiv \text{const}$, то $f \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$ и по теореме 3 функция $f(|\cdot|)$ строго положительно определена в $\mathbb{R}^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

В частности, функции e^{-t} и $(1 - e^{-t})/t = \int_0^1 e^{-ts} ds$ непрерывны, ограничены и вполне монотонны на $[0, +\infty)$. Поэтому $e^{-|x|}$ и $(1 - e^{-|x|})/|x|$ строго положительно определены в $\mathbb{R}^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Большой список примеров строго положительно определенных функций содержится в [4; гл. 4]. Отметим также, что при дополнительном условии $t^{n-1}f(t) \in L[0, \infty)$ теорема 3 сформулирована в [4; теорема 3.7].

3. Граничные тройки и функция Вейля. Пусть A – замкнутый симметрический оператор с равными индексами дефекта и плотной в $\mathcal{H}$ областью определения $\text{dom}(A)$, A^* – его сопряженный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [6; гл. 3, § 1]. Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, Γ_0 и Γ_1 – линейные отображения из $\text{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H}$, называют *граничной тройкой* оператора A^* , если

i) справедлива абстрактная формула Грина

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \text{dom}(A^*); \quad (5)$$

ii) отображение $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)^\top: \text{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ сюръективно.

Каждая тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ порождает два самосопряженных расширения $A_j := A_j^* \upharpoonright \ker \Gamma_j$, $j \in \{0, 1\}$. Обозначим $\rho(A_0)$ резольвентное множество оператора A_0 .

Задание граничной тройки позволяет параметризовать все собственные расширения $\tilde{A}$ ($A \subseteq \tilde{A} \subseteq A^*$) оператора A в виде

$$\tilde{A} = A_\Theta := A^* \upharpoonright \{f \in \text{dom}(A^*) : (\Gamma_0 f, \Gamma_1 f)^\top \in \Theta\}, \quad (6)$$

где Θ – замкнутое линейное отношение в $\mathcal{H}$, т.е. подпространство в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. При условии $\text{dom}(A_\Theta) \cap \text{dom}(A_0) = \text{dom}(A)$ параметризация (6) принимает привычный вид

$$A_\Theta = A_B = A^* \upharpoonright \ker\{\Gamma_1 - B\Gamma_0\}, \quad (7)$$

в котором $\Theta = B$ – замкнутый линейный оператор в $\mathcal{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [7]. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка оператора A^* . *Функцией Вейля* оператора A , соответствующей граничной тройке Π , называется оператор-функция $M(\cdot)$, определяемая равенством

$$M(z)\Gamma_0 f z = \Gamma_1 f z, \quad f z \in \mathfrak{N}_z := \ker(A^* - zI), \quad z \in \rho(A_0). \quad (8)$$

В следующем предложении мы определим граничную тройку для H_d^* . Для $x \in \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, обозначим $r_j := |x - x_j|$, $j \in \{1, \dots, m\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть H_d – минимальный оператор Шрёдингера (2) и $f_H \in \text{dom}(H_d)$. Справедливы следующие утверждения.

(i) Область определения $\text{dom}(H_d^*)$ оператора H_d^* имеет вид

$$\begin{aligned} \text{dom}(H_3^*) &= \left\{ f = \sum_{j=1}^m \xi_{0j} \frac{e^{-r_j}}{r_j} + \xi_{1j} e^{-r_j} + f_H : \xi_{0j}, \xi_{1j} \in \mathbb{C} \right\}, \\ \text{dom}(H_2^*) &= \left\{ f = \sum_{j=1}^m \xi_{0j} e^{-r_j} \ln(r_j) + \xi_{1j} e^{-r_j} + f_H : \xi_{0j}, \xi_{1j} \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

(ii) Граничные тройки

$$\Pi_3 = \{\mathcal{H}_3, \Gamma_0^3, \Gamma_1^3\} \quad \text{и} \quad \Pi_2 = \{\mathcal{H}_2, \Gamma_0^2, \Gamma_1^2\}$$

для H_3^* и H_2^* могут быть определены следующим образом

$$\mathcal{H}_3 = \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0^3 f := 4\pi \left\{ \lim_{x \rightarrow x_j} f(x) |x - x_j| \right\}_{j=1}^m = 4\pi \{\xi_{0j}\}_{j=1}^m, \quad (9)$$

$$\Gamma_1^3 f := \left\{ \lim_{x \rightarrow x_j} \left(f(x) - \frac{\xi_{0j}}{|x - x_j|} \right) \right\}_{j=1}^m, \quad f \in \text{dom}(H_3^*). \quad (10)$$

$$\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0^2 f := -2\pi \left\{ \lim_{x \rightarrow x_j} \frac{f(x)}{\ln |x - x_j|} \right\}_{j=1}^m = 2\pi \{\xi_{0j}\}_{j=1}^m, \quad (11)$$

$$\Gamma_1^2 f := \left\{ \lim_{x \rightarrow x_j} (f(x) - \ln |x - x_j| \xi_{0j}) \right\}_{j=1}^m, \quad f \in \text{dom}(H_2^*). \quad (12)$$

НАВРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $d = 3$ и

$$(h_0, h_1)^\top \in \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_3, \quad \text{где } h_0 = \{h_{0j}\}_{j=1}^m, \quad h_1 = \{h_{1j}\}_{j=1}^m \in \mathbb{C}^m.$$

Если $f \in \text{dom}(H_3^*)$, то согласно (i)

$$f = f_H + \sum_{j=1}^m \xi_{0j} \frac{e^{-r_j}}{r_j} + \xi_{1j} e^{-r_j}.$$

Обозначим

$$\xi_0 := \{\xi_{0j}\}_{j=1}^m, \quad \xi_1 := \{\xi_{1j}\}_{j=1}^m,$$

$$E_0 := \left(-\frac{e^{-|x_k - x_j|}}{|x_k - x_j| - \delta_{kj}} \right)_{j,k=1}^m, \quad E_1 := (e^{-|x_k - x_j|})_{k,j=1}^m,$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. В силу положительной определенности функции $e^{-|x|}$ в $\mathbb{R}^3$ (см. пример 4) матрица E_1 обратима. Поэтому, полагая

$$\xi_0 = \frac{1}{4\pi} h_0 \quad \text{и} \quad \xi_1 = E_1^{-1} \left(h_1 + \frac{1}{4\pi} E_0 h_0 \right)$$

и учитывая (9), (10), приходим к равенствам $\Gamma_0^3 f = h_0$ и $\Gamma_1^3 f = h_1$, доказывающим сюръективность отображения $\Gamma^3 = \{\Gamma_0^3, \Gamma_1^3\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть H_d – минимальный оператор Шрёдингера (2) и $\Pi_d = \{\mathcal{H}_d, \Gamma_0^d, \Gamma_1^d\}$ – граничная тройка для оператора H_d^* , определенная формулами (9), (10) и (11), (12). Тогда соответствующие функции Вейля $M_3(\cdot)$ и $M_2(\cdot)$ имеют вид

$$M_3(z) = \left(\frac{i\sqrt{z}}{4\pi} \delta_{jk} + \tilde{G}_{\sqrt{z}}^3(x_j - x_k) \right)_{j,k=1}^m, \quad \tilde{G}_{\sqrt{z}}^3(x) = \begin{cases} \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{4\pi|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (13)$$

$$M_2(z) = \left(\frac{1}{2\pi} \left(\psi(1) - \ln \left(\frac{\sqrt{z}}{2i} \right) \right) \delta_{jk} + \tilde{G}_{\sqrt{z}}^2(x_j - x_k) \right)_{j,k=1}^m, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (14)$$

где $\psi(1) = \Gamma'(1)/\Gamma(1)$,

$$\tilde{G}_{\sqrt{z}}^2(x) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{z}|x|), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и $H_0^{(1)}(\cdot)$ – функция Ганкеля первого рода и нулевого порядка.

4. Самосопряженные расширения. Описание спектра.

ТЕОРЕМА 9. Пусть H_d – минимальный оператор (2), Π_d – граничная тройка для H_d^* и $M_d(\cdot)$ – соответствующая функция Вейля, определенная согласно (13), (14). Пусть $H_{d,\Theta}$ – самосопряженное расширение H_d . Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Неотрицательный спектр каждого самосопряженного расширения $H_{d,\Theta}$ является абсолютно непрерывным и имеет бесконечную кратность.

(ii) Точечный спектр расширения $H_{d,\Theta}$ состоит из не более чем m отрицательных собственных значений (с учетом кратности). Более того, $z \in \sigma_p(H_{d,\Theta}) \cap \mathbb{R}_-$ тогда и только тогда, когда $0 \in \sigma_p(\Theta - M_d(z))$. Соответствующая собственная функция ψ_z^d имеет вид

$$\psi_z^3 = \sum_{j=1}^m c_j \frac{e^{i\sqrt{z}r_j}}{4\pi r_j}, \quad \psi_z^2 = \sum_{j=1}^m c_j \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{z}r_j),$$

где $(c_1, \dots, c_m)^\top$ – собственный вектор линейного отношения $\Theta - M_d(z)$, соответствующий нулевому собственному значению.

(iii) Описание неотрицательных самосопряженных расширений $H_{3,\Theta}$ имеет вид

$$\text{dom}(H_{3,\Theta}) = \left\{ f = \sum_{k,j=1}^m b_{jk} \xi_{1k} \frac{e^{-r_j}}{r_j} + \xi_{1j} e^{-r_j} + f_H \right\}, \quad (15)$$

где

$$\tilde{B} = (b_{kj})_{k,j=1}^m = \frac{1}{4\pi} B E_1 \quad \text{и} \quad E_1 = (e^{-|x_k - x_j|})_{k,j=1}^m,$$

а B – матрица, удовлетворяющая условию

$$0 < B \leq \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 - e^{-|x_k - x_j|} - \delta_{jk}}{|x_k - x_j| - \delta_{jk}} \right)_{k,j=1}^m.$$

(iv) Число отрицательных собственных значений $\kappa_-(H_{3,\Theta})$ расширения $H_{3,\Theta}$ совпадает с таковым для линейного отношения $\Theta - M_3(0)$, $\kappa_-(H_{3,\Theta}) = \kappa_-(\Theta - M_3(0))$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. (i) В доказательстве применяется техника из [8] и существенно используется положительная определенность (при каждом $x \in \mathbb{R}_+$) следующих матриц:

$$\frac{\text{Im}(M_3(x + i0))}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4\pi} \left(\delta_{kj} + \frac{\sin(\sqrt{x}|x_k - x_j|)}{\sqrt{x}|x_k - x_j| + \delta_{kj}} \right)_{j,k=1}^m, \quad x_k \in \mathbb{R}^3, \quad (16)$$

$$\text{Im}(M_2(x + i0)) = \frac{1}{4} (J_0(\sqrt{x}|x_j - x_k|))_{j,k=1}^m, \quad x_k \in \mathbb{R}^2. \quad (17)$$

Здесь $J_0(\cdot)$ – функция Бесселя (см. [9; гл. 7, § 4]). Согласно примеру 4 $\sin t/t \in \Phi_3$, а $J_0(t) \in \Phi_2$ и, значит, матрицы (16), (17) положительно определены при каждом $x \in \mathbb{R}_+$.

(iii) Рассмотрим новую граничную тройку $\tilde{\Pi}_3$ для H_3^* вида

$$\tilde{\mathcal{H}}_3 := \mathcal{H}_3, \quad \tilde{\Gamma}_0^3 := \Gamma_0^3, \quad \tilde{\Gamma}_1^3 := \Gamma_1^3 + \frac{1}{4\pi} E_0 \Gamma_0^3, \quad \text{где} \quad E_0 = \left(-\frac{e^{-|x_k - x_j|}}{|x_k - x_j| - \delta_{kj}} \right)_{j,k=1}^m.$$

Тогда соответствующая функция Вейля $\tilde{M}_3(\cdot)$ имеет вид $\tilde{M}_3(z) = M_3(z) + (1/(4\pi))E_0$. В силу (13)

$$s - \lim_{x \uparrow 0} \tilde{M}_3(x) = \tilde{M}_3(0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 - e^{-|x_k - x_j|} - \delta_{jk}}{|x_k - x_j| - \delta_{jk}} \right)_{k,j=1}^m.$$

Согласно [7; теорема 5] самосопряженное расширение H_Θ^3 неотрицательно в точности тогда, когда $\Theta - \tilde{M}_3(0) \geq 0$, где Θ – самосопряженное отношение в $\mathcal{H}_3$. Так как $f(t) = (1 - e^{-t})t^{-1} \in \Phi_3$ (см. пример 4), то матрица $\tilde{M}_3(0)$ положительно определена. Но тогда матрица $\Theta (\geq \tilde{M}_3(0) > 0)$ также положительно определена и существует обратная матрица $B = \Theta^{-1}$. Отсюда, а также из представления (6) вытекает параметризация (15).

Заметим, что описание точечного и абсолютно непрерывного спектра самосопряженных расширений $H_{d,\Theta}$ в частном случае расширений, параметризуемых диагональными матрицами, получено в [2; гл. II.1, II.4]. Отметим еще, что в [10] получено описание всех неотрицательных самосопряженных расширений в форме, близкой к (15).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Докл. АН СССР*, **137**:5 (1961), 1011–1014. [2] С. Альбевериио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике*, Мир, М., 1991. [3] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961. [4] G. E. Fasshauer, *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*, Interdiscip. Math. Sci., **6**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007. [5] В. П. Заставный, *Докл. РАН*, **325**:5 (1992), 901–903. [6] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1984. [7] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *J. Funct. Anal.*, **95**:1 (1991), 1–95. [8] M. M. Malamud, H. Neidhardt, *J. Funct. Anal.*, **260**:3 (2011), 613–638. [9] Ф. Олвер, *Введение в асимптотические методы и специальные функции*, Наука, М., 1978. [10] Yu. Arlinskii, E. Tsekanovskii, *Integral Equations Operator Theory*, **51**:3 (2005), 319–356.

Н. И. Голощапова

Институт прикладной математики и
механики НАН Украины, г. Донецк
E-mail: ng85@bk.ru

Поступило

17.09.2010

В. П. Заставный

Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: zastavn@rambler.ru

М. М. Маламуд

Институт прикладной математики и
механики НАН Украины, г. Донецк
E-mail: mmm@telenet.dn.ua