Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Косухин, Об оценке длин лемнискат, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 6, 872–883

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9186>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 08:46:01

Об оценке длин лемнискат

О. Н. Косухин

В работе при любом натуральном n и любом $C > 0$ получена интегральная формула для вычисления длин $|L(P_n, C)|$ лемнискат

$$L(P_n, C) := \{z : |P_n(z)| = C\}$$

алгебраических многочленов $P_n(z) := z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0$ комплексного переменного z с комплексными коэффициентами c_j , $j = 0, \dots, n-1$, доказана лучшая на настоящий момент при $3 \leq n \leq 10^{14}$ оценка сверху для величин $\lambda_n := \sup\{|L(P_n, 1)| : P_n(z)\}$. Также исследованы свойства функции $S'(C)$ – производной функции $S(C)$ площади множества $\{z : |P_n(z)| \leq C\}$.

Библиография: 8 названий.

1. Основные определения и история вопроса. Пусть $\mathbb{C}$ обозначает комплексную плоскость, $P_n(z) := c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0$ – алгебраический многочлен степени n переменного $z \in \mathbb{C}$ с комплексными коэффициентами c_j , $j = 0, 1, \dots, n$, $c_n \neq 0$. Для любого $C = \text{const} > 0$ линия уровня модуля этого многочлена $L(P_n, C) := \{z : |P_n(z)| = C\}$ называется *лемнискатой* многочлена $P_n(z)$. Обозначим через $|L(P_n, C)|$ длину этой лемнискаты, через $S(C) = S(P_n, C)$ – площадь множества $E(P_n, C) := \{z : |P_n(z)| \leq C\}$, ограниченного лемнискатой $L(P_n, C)$.

Пусть далее $c_n = 1$, а величина λ_n обозначает супремум длин $|L(P_n, 1)|$ по всем многочленам $P_n(z) = z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0$.

В 1958 г. в работе [1] Эрдош, Герцог и Пирамян выдвинули гипотезу о том, что при каждом натуральном n величина λ_n совпадает с длиной лемнискаты $L(P_n^*, 1)$ многочлена $P_n^*(z) := z^n - 1$. Пусть $B(\cdot, \cdot)$ обозначает бета-функцию Эйлера. Нетрудно показать, что имеют место равенство

$$|L(P_n^*, 1)| = \sqrt[n]{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right)$$

и асимптотическое равенство

$$|L(P_n^*, 1)| = 2n + 4 \log 2 + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В 1960 г. независимо от работы [1] задача об оценке величин λ_n возникла в диссертации Долженко [2] (см. также [3]) в связи с задачами теории рациональных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00648а).

приближений. Для любого натурального n им было получено точное по порядку величин λ_n неравенство $\lambda_n \leq 4\pi n$. В 1999 г. Еременко и Хейман в работе [4] доказали, что среди лемнискат $L(P_n, 1)$ с максимальной длиной λ_n найдется такая, которая содержит все нули производной $P'_n(z)$ многочлена $P_n(z)$. Эта лемниската представляет собой замкнутую кривую с точками самопересечений в нулях многочлена $P'_n(z)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\lambda_2 = |L(z^2 - 1, 1)| = \sqrt{2}B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 7,416 \dots$$

В этой работе ее авторы также уменьшили константу в правой части неравенства Долженко с 4π до 9.173. В 2007 г. Данченко в работе [5] вновь уменьшил эту константу, доказав при всех натуральных n неравенство $\lambda_n \leq 2\pi n$ (оно является точным при $n = 1$).

Пусть $\operatorname{Re}_+ z$ обозначает $\max\{\operatorname{Re} z, 0\}$ и

$$\operatorname{Re}_+ z = \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k z^k + a_{-k} z^{-k})$$

– разложение функции $\operatorname{Re}_+ z$ в ряд Фурье на единичной окружности $|z| = 1$. Положим

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k| + |a_{-k}|}{k}.$$

В 2008 г. Назаров и Фрынтов (см. [6]) доказали, что для любого $\delta > 0$ и любого натурального $n \geq 2$ имеет место неравенство

$$\lambda_n \leq 26\pi\delta n + 2\pi\sqrt{n} + e^{2\delta} \left(\frac{1}{\pi} + 2\delta + \frac{4a}{\delta^3\sqrt{n}} \right) 2\pi(n-1).$$

Подставляя в него $\delta \sim n^{-1/8}$ и учитывая асимптотическое равенство $|L(P_n^*, 1)| = 2n + 4\log 2 + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, они получили точное при $n \rightarrow \infty$ асимптотическое равенство $\lambda_n = 2n + O(n^{7/8})$. Таким образом, полученное Назаровым и Фрынтовым неравенство позволяет утверждать, что

$$\frac{\lambda_n}{|L(P_n^*, 1)|} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Однако, как показывают вычисления в математическом пакете Wolfram Mathematica, это неравенство не подходит для практического оценивания величин λ_n , так как минимум его правой части по всем $\delta > 0$ будет больше, чем предложенное Данченко выражение $2\pi n$ при всех $2 \leq n \leq 5 \cdot 10^9$.

В настоящей работе получены новая интегральная формула для вычисления длин лемнискат $L(P_n, C)$ и новая оценка сверху на величины λ_n , улучшающая упомянутую выше оценку Данченко при всех $n \geq 3$, а оценку Назарова и Фрынтова – как показывают вычисления в математическом пакете Wolfram Mathematica – при всех $2 \leq n \leq 10^{14}$. Также в настоящей работе исследованы свойства функции $S'(C)$ – производной функции $S(P_n, C)$ по переменной C при всех $C > 0$.

2. Формула для длин лемнискат и свойства функции S' . Отображение $w = P_n(z)$ плоскости переменного z является конформным и n -листным, а также локально однолистным во всех точках этой плоскости, за исключением конечного множества M корней многочлена $P'_n(z)$ (это множество очевидно зависит от выбора многочлена P_n). Пусть $\arg(\cdot)$ обозначает однозначную ветвь со значениями из промежутка $[0; 2\pi)$ многозначной функции аргумента $\text{Arg}(\cdot)$. Положим $\arg(0) := 0$. Тогда обратное n -значное отображение $z = \Psi(w) := P_n^{-1}(w)$ распадается на каждом из открытых бесконечных секторов

$$\text{Sec}_k := \{w = re^{i\theta} : r > 0, \theta \in (\theta_k; \theta_{k+1})\},$$

$k = 1, 2, \dots, m \leq n$, $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{m+1} = 2\pi$, составляющих множество

$$V = \{w : \arg(w) \notin \arg(P_n(M)) \cup \{0\}\},$$

на n однозначных аналитических ветвей, имеющих непрерывное продолжение на замыкание $\overline{\text{Sec}_k}$ этого сектора. В каждом из таких секторов занумеруем эти ветви в произвольном порядке от 1 до n . При всех $r > 0$ обозначим через D_r и γ_r — открытый круг $\{w : |w| < r\}$ и его окружность $\{w : |w| = r\}$ соответственно. При каждом $j = 1, 2, \dots, n$ через $\psi_j(w)$ будем обозначать однозначную функцию, совпадающую в каждом секторе Sec_k , $k = 1, 2, \dots, m$, с j -й ветвью функции $\Psi(w)$ и доопределенную в остальных точках

$$w_0 = r_0 e^{i\theta_0}, \quad r_0 > 0, \quad \theta_0 \in \arg(P_n(M)) \cup \{0\},$$

множества $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ непрерывным продолжением при движении точки $w \in V$, $w \rightarrow w_0$, по окружностям γ_{r_0} против часовой стрелки.

Из определения следует, что эта лемниската $L(P_n, C)$ является полным прообразом окружности γ_C при отображении $w = P_n(z)$. Так как при каждом $r \in (0; C]$ каждая из функций $\psi_j(w)$ $j = 1, 2, \dots, n$, аналитична во всех, за возможным исключением конечного количества, точках окружностей γ_r , а множества $\psi_1(\gamma_r), \psi_2(\gamma_r), \dots, \psi_n(\gamma_r)$ могут попарно пересекаться лишь в точках множества M , причем $L(P_n, r) = \bigcup_{j=1}^n \psi_j(\gamma_r)$, то

$$|L(P_n, C)| = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_C} |\psi'_j(\zeta)| |d\zeta| = C \sum_{j=1}^n \int_0^{2\pi} |\psi'_j(Ce^{i\theta})| d\theta, \quad (2.1)$$

$$S(C) = \sum_{j=1}^n \int_{D_C} |\psi'_j(\zeta)|^2 d\text{mes}_2(\zeta) = \sum_{j=1}^n \int_0^C \int_0^{2\pi} |\psi'_j(re^{i\theta})|^2 d\theta r dr. \quad (2.2)$$

Здесь и далее $\text{mes}_2(\cdot)$ обозначает плоскую меру Лебега, D_C обозначает открытый круг $\{w = re^{i\theta} : |w| = r < C\}$, а все интегралы понимаются в смыслах Лебега или Лебега–Стилтьеса. Для любого ограниченного множества $X \subset \mathbb{C}$ обозначим через $|X|$ его длину, т.е. нижний предел сумм $\sum_{j=1}^p d_j$ всех диаметров d_j открытых кругов B_j , $j = 1, 2, \dots, p$, образующих какое-либо конечное покрытие множества X , при $\max_j d_j \rightarrow 0$. Если, кроме того, $X \subset \gamma_C$ для некоторого $C > 0$, то длину множества X будем также обозначать через $\text{mes } X$ и понимать ее как линейную меру

Лебега этого множества на окружности γ_C . При всех $t > 0$ положим

$$m(t) = m(P_n, C, t) := \sum_{j=1}^n \text{mes}\{\zeta : |\zeta| = C, |P'_n(\psi_j(\zeta))| \leq t\} \\ \stackrel{\text{п.в.}}{=} \sum_{j=1}^n \text{mes}\{\zeta : |\zeta| = C, |P'_n(\psi_j(\zeta))| < t\}.$$

Последнее равенство понимается в смысле равенства функций от одной переменной t почти всюду по мере Лебега при $t > 0$. Нетрудно видеть, что функция $m(t)$ с ростом $t \in (0, +\infty)$ нестрого возрастает

$$\text{от } m(0+) := \lim_{t \rightarrow 0+} m(t) = 0 \quad \text{до } m(+\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = 2\pi nC$$

и, следовательно, измерима по мере Лебега, а также дифференцируема почти всюду по этой мере на своей области определения.

ТЕОРЕМА 1. *При всех натуральных n и положительных C для длины $|L(P_n, C)|$ лемнискаты $L(P_n, C)$ имеет место интегральная формула*

$$|L(P_n, C)| = \int_0^{+\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом доказательстве далее считаем, что $\zeta \in \gamma_C$. Из (2.1) и известной теоремы из теории интеграла Лебега (см., например, [7; том I, глава 2, п. 2.9.3]) получаем равенства

$$|L(P_n, C)| = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_C} |\psi'_j(\zeta)| |d\zeta| = \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} \text{mes}\{\zeta : |\psi'_j(\zeta)| > x\} dx. \quad (2.4)$$

Заметим, что при $j = 1, 2, \dots, n$ и при всех $\zeta \in V$ имеют место равенства $\psi'_j(\zeta) = 1/P'_n(\psi_j(\zeta))$. Таким образом, при таких j и всех $t > 0$ справедливы равенства

$$\text{mes}\left\{\zeta : |\psi'_j(\zeta)| > \frac{1}{t}\right\} = \text{mes}\{\zeta : |P'_n(\psi_j(\zeta))| < t\}.$$

Отсюда, из (2.4) и из определения $m(t)$, переходя к новой переменной $t = 1/x$, получаем

$$|L(P_n, C)| = \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} \frac{\text{mes}\{\zeta : |P'_n(\psi_j(\zeta))| < t\}}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt.$$

Теорема 1 доказана полностью.

При всех $r_0 \geq 0$ обозначим через $S'(r_0)$ конечный или бесконечный предел отношения $(S(r) - S(r_0))/(r - r_0)$ при $r \rightarrow r_0$ ($r \geq 0$), если он существует. Заметим, что в силу монотонного возрастания функции $S(r)$ этот предел существует для почти всех (по мере Лебега) значений $r_0 > 0$, и, тем самым, для почти всех $r \geq 0$ определена функция $S'(r)$, принимающая значения из промежутка $\mathbb{R}_+ := (0; +\infty]$. Функцию

$f(r)$, определенную и принимающую значения из $\mathbb{R}_+$ при всех $r > 0$, будем называть *непрерывной в обобщенном смысле*, если осуществляемое этой функцией отображение из $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}_+$ непрерывно в смысле топологии этого пространства. Функцию $g(w)$, определенную на множестве $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ и принимающую значения из $\overline{\mathbb{C}}$ на этом множестве, также будем называть *непрерывной в обобщенном смысле*, если осуществляемое этой функцией отображение из X в $\overline{\mathbb{C}}$ непрерывно в смысле топологии этого пространства.

ТЕОРЕМА 2. Для любого целого числа $n \geq 1$ и любого алгебраического многочлена $P_n(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0$ производная $S'(r)$ функции $S(r) = S(P_n, r)$ определена, непрерывна в обобщенном смысле и удовлетворяет неравенству

$$2\pi nr S'(r) \geq |L(P_n, r)|^2 \quad \text{при всех } r > 0.$$

Для многочленов вида $P_n(z) \equiv (z-a)^n$, $a \in \mathbb{C}$, это неравенство обращается в верное равенство при всех $Vr > 0$, для остальных многочленов $P_n(z) = z^n + \dots$ это неравенство не обращается в равенство ни при каких значениях $r > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.2) имеем

$$S(0) = 0 \quad \text{и} \quad S(r) = \sum_{j=1}^n \int_0^r \int_0^{2\pi} |\psi'_j(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta \rho d\rho \quad \text{при } r > 0.$$

Как отмечалось выше, при каждом $j = 1, 2, \dots, n$ и каждом $k = 1, 2, \dots, m$ функция $\psi_j(w)$ аналитична в секторе

$$\text{Sec}_k = \{w = re^{i\theta} : r > 0, \theta \in (\theta_k; \theta_{k+1})\}$$

и имеет непрерывное продолжение $\psi_{j,k}(w)$ на его замыкание $\overline{\text{Sec}_k}$ (в случае, когда $m = 1$ точки вида $w = r$ и $w = re^{2\pi i}$ при $r > 0$ считаем топологически разными). Следовательно, производная $\psi'_j(w) = 1/P'_n(\psi_j(w))$ этой функции также является аналитической в Sec_k и имеет непрерывное в обобщенном смысле продолжение $\psi'_{j,k}(w)$ на замыкание этого сектора. Отметим, что равенство $\psi'_{j,k}(w) = \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда $P'_n(\psi_{j,k}(w)) = 0$.

Пусть для некоторых $r_0 > 0$, $\theta_0 \in [0; 2\pi]$ и некоторого натурального k значение $w_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in \overline{\text{Sec}_k}$ таково, что $\psi'_{j,k}(w_0) = \infty$. Положим $z_0 = \psi_{j,k}(w_0)$ и $z = \psi_{j,k}(w)$ для $w \in \overline{\text{Sec}_k}$. Нетрудно видеть, что при некотором $A > 0$ в некоторой проколотой окрестности точки z_0 справедливы неравенства

$$\left| \frac{P'_n(z)}{P_n(z) - P_n(z_0)} \right| \leq \frac{n}{|z - z_0|} \quad \text{и} \quad |P_n(z) - P_n(z_0)| \leq A|z - z_0|^2.$$

Значит, найдется такое значение $\varepsilon > 0$, что при всех $w \in \overline{\text{Sec}_k}$ с $0 < |w - w_0| < \varepsilon$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{|\psi'_{j,k}(w)(w - w_0)|} \leq \frac{n}{|z - z_0|} \quad \text{и} \quad |w - w_0| \leq A|z - z_0|^2.$$

Отсюда получаем, что

$$|\psi'_{j,k}(w)|^2 \geq \frac{|z - z_0|^2}{n^2|w - w_0|^2} \geq \frac{1}{An^2|w - w_0|}, \quad w \in \overline{\text{Sec}_k}, \quad 0 < |w - w_0| < \varepsilon.$$

Это значит, что для таких $r_0 > 0$ имеет место стремление

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{2\pi} |\psi'_j(re^{i\theta})|^2 d\theta \rightarrow \sum_{j=1}^n \int_0^{2\pi} |\psi'_j(r_0 e^{i\theta})|^2 d\theta = +\infty \quad \text{при } r \rightarrow r_0.$$

Пусть теперь $r_0 > 0$ таково, что

$$|\psi'_{j,k}(r_0 e^{i\theta})| < +\infty \quad \text{при всех } j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad \theta \in [\theta_k; \theta_{k+1}].$$

Тогда в силу непрерывности функций $\psi'_{j,k}(re^{i\theta})$ в секторах $\overline{\text{Сек}}_k$ при всех таких значениях j и k имеем

$$\begin{aligned} & \sup\{|\psi'_{j,k}(re^{i\theta})| : j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m, r \in [r_0 - \varepsilon; r_0 + \varepsilon], \theta \in [\theta_k; \theta_{k+1}]\} \\ &= \max\{|\psi'_{j,k}(re^{i\theta})| : j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m, r \in [r_0 - \varepsilon; r_0 + \varepsilon], \theta \in [\theta_k; \theta_{k+1}]\} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

для некоторого $\varepsilon \in (0; r_0)$, причем

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{2\pi} |\psi'_j(re^{i\theta})|^2 d\theta \rightarrow \sum_{j=1}^n \int_0^{2\pi} |\psi'_j(r_0 e^{i\theta})|^2 d\theta < +\infty \quad \text{при } r \rightarrow r_0.$$

Следовательно, интеграл $\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n |\psi'_j(re^{i\theta})|^2 d\theta$ непрерывно в обобщенном смысле зависит от параметра r при всех $r > 0$. Значит, при таких r функция $S(r)$ имеет непрерывную в обобщенном смысле производную

$$S'(r) = r \sum_{j=1}^n \int_0^{2\pi} |\psi'_j(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

которая принимает значения из $(0; +\infty)$ всюду, за исключением множества $\{|P_n(z)| : P'_n(z) = 0, P_n(z) \neq 0\}$, в точках которого $S'(r)$ принимает значение $+\infty$.

Перейдем к доказательству неравенства

$$2\pi nr S'(r) \geq |L(P_n, r)|^2.$$

Из (2.1), неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим и неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\begin{aligned} |L(P_n, r)|^2 &= \left(r \sum_{j=1}^n \int_0^{2\pi} |\psi'_j(re^{i\theta})| d\theta \right)^2 \leq nr^2 \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{2\pi} |\psi'_j(re^{i\theta})| d\theta \right)^2 \\ &\leq nr^2 \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_0^{2\pi} |\psi'_j(re^{i\theta})|^2 d\theta \right) = 2\pi nr S'(r). \end{aligned}$$

Здесь все неравенства одновременно обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $|\psi'_j(re^{i\theta})| = |\psi'_l(re^{i\theta})| = \text{const}$ для всех $j \neq l$, $j = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, n$, и почти всех $\theta \in [0; 2\pi)$. Это возможно лишь в случае, когда $|P'_n(z)| \equiv \text{const}$ при $|P_n(z)| = r$, т.е. при $P_n(z) \equiv (z - a)^n$ для некоторого значения $a \in \mathbb{C}$. Теорема 2 доказана полностью.

3. Оценка сверху для длин лемнискат. По упомянутому выше результату Еременко и Хеймана среди лемнискат $L(P_n, 1)$ с максимально возможной длиной λ_n найдется такая, которая содержит все нули производной $P'_n(z)$ многочлена $P_n(z)$. Всюду ниже будем считать, что $L(P_n, 1)$ – такая лемниската и $n \geq 2$. В этом случае, как уже отмечалось выше, $L(P_n, 1)$ представляет собой замкнутую кривую с точками самопересечения в нулях многочлена $P'_n(z)$. Эта лемниската разбивает плоскость $\mathbb{C}$ на n ограниченных жордановых областей G_j , $j = 1, \dots, n$, и одну неограниченную область G_0 – будем называть ее внешностью этой лемнискаты. Множество $G := \bigcup_{j=1}^n G_j$ назовем внутренностью лемнискаты $L(P_n, 1)$. Функция $w = P_n(z)$ отображает конформно и однолистно каждую из областей G_j , $j = 1, \dots, n$, на единичный круг $D := D_1 = \{w : |w| < 1\}$, а каждое из их замыканий $\overline{G_j}$ – гомеоморфно на замыкание $\overline{D}$ этого круга. Кроме того, многозначная функция $w = \sqrt[n]{P_n(z)}$ распадается в области G_0 на n конформных и однолистных ветвей, каждая из которых отображает эту область на внешность $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ круга D и продолжается до гомеоморфизма замкнутых (в $\mathbb{C}$) областей $\overline{G_0} = \mathbb{C} \setminus G$ и $\mathbb{C} \setminus D$, если считать различными те достижимые граничные точки области G_0 , которые геометрически совпадают (таковыми являются достижимые точки, геометрически лежащие в множестве M). Выберем какую-либо из этих ветвей и обозначим ее через $\varphi(z)$. Тогда $\varphi'(z) = P'_n(z)/(n\varphi^{n-1}(z))$ и $|\varphi'(z)| < |P'_n(z)|/n$ при всех $z \in G_0$. Функция $\varphi'(z)$ непрерывно продолжается из G_0 на $\overline{G_0}$, и $|\varphi'(z)| = |P'_n(z)|/n$ при всех $z \in \partial G_0$.

Напомним, что для любого $C = \text{const} > 0$, любого натурального k и любого алгебраического многочлена $Q_k(z)$ степени k выражение $E(Q_k, C)$ обозначает множество $\{z : |Q_k(z)| \leq C\}$. Нетрудно видеть, что при любом $t > 0$ значение функции $m(t)$ может быть найдено с одной стороны как

$$\sum_{j=1}^n \text{mes } P_n(\partial G_j \cap E(P'_n, t)),$$

а с другой – как

$$n \cdot \text{mes } \varphi(\partial G_0 \cap E(P'_n, t)).$$

Оценим это значение, исходя из этих выражений.

Положим

$$l(t) := |L(P'_n, t)|, \quad l_j(t) := |L(P'_n, t) \cap \overline{G_j}|, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad l_*(t) := \sum_{j=1}^n l_j(t).$$

Тогда

$$l(t) = l_0(t) + l_*(t) = \sum_{j=0}^n l_j(t).$$

ЛЕММА 1. При всех $t > 0$ имеет место неравенство

$$m(t) \leq tl(t).$$

Если при этом $\max\{\tau l(\tau) : \tau \in (0; t]\} < 2$, то

$$m(t) \leq \frac{tl(t)}{2} + \frac{(tl(t))^2}{23}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что множество $\varphi(\partial G_0 \cap E(P'_n, t))$ представляет собой либо окружность γ_1 , либо объединение конечного числа дуг окружности γ_1 (некоторые из которых, возможно, вырождены в точки). При этом всякий луч вида $\{w : \arg(w) = \alpha\}$ при $\alpha \in [0; 2\pi)$, пересекающий множество $\varphi(\partial G_0 \cap E(P'_n, t))$ (в точке $e^{i\alpha}$), будет пересекать и множество $\varphi(\overline{G}_0 \cap L(P'_n, t))$ в некоторой точке $w = Re^{i\alpha}$ при $R \geq 1$. Отсюда получаем неравенство

$$\text{mes } \varphi(\partial G_0 \cap E(P'_n, t)) \leq |\varphi(\overline{G}_0 \cap L(P'_n, t))|.$$

Имеем

$$\begin{aligned} m(t) &= n \cdot \text{mes } \varphi(\partial G_0 \cap E(P'_n, t)) \leq n \cdot |\varphi(\overline{G}_0 \cap L(P'_n, t))| \\ &\leq n \cdot \max\{|\varphi'(z)| : z \in \overline{G}_0 \cap L(P'_n, t)\} \cdot |\overline{G}_0 \cap L(P'_n, t)| = tl_0(t) \leq tl(t). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает первое из утверждений леммы.

При каждом $j = 1, \dots, n$ и каждом $t > 0$ множество $L(P'_n, t) \cap \overline{G}_j$ распадается на конечное число спрямляемых жордановых дуг (некоторые из них могут быть вырождены в точку), концы которых принадлежат пересечению лемнискат $L(P_n, 1)$ и $L(P'_n, t)$.

Пусть известно, что

$$\max\{\tau l(\tau) : \tau \in (0; t]\} < 2.$$

Докажем, что при этом условии имеет место неравенство

$$\min\{|P'_n(z)| : P_n(z) = 0\} > t.$$

Действительно, предположим, что найдутся такие числа $z_0 \in \mathbb{C}$ и $t_0 \in (0; t]$, что $P_n(z_0) = 0$ и $|P'_n(z_0)| = t_0$. Пусть j таково, что $z_0 \in G_j$, Δ — та из невырожденных в точку и лежащих в $\overline{G}_j$ дуг лемнискаты $L(P'_n, t_0)$, которая содержит точку z_0 . Обозначим концы этой дуги через a и b , $a, b \in \partial G_j$. Тогда $P_n(\Delta)$ представляет собой спрямляемую жорданову дугу длины $|P_n(\Delta)| = t_0|\Delta|$, лежащую в круге $\overline{D}$. Концами этой дуги являются точки $P_n(a), P_n(b) \in \partial D$. Кроме того, $0 = P_n(z_0) \in P_n(\Delta)$. Имеем

$$2 = |P_n(a) - P_n(z_0)| + |P_n(z_0) - P_n(b)| \leq |P_n(\Delta)| = t_0|\Delta| \leq t_0l(t_0) < 2.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$\min\{|P'_n(z)| : P_n(z) = 0\} > t.$$

Следовательно, при каждом $j = 1, \dots, n$ и каждом $w \in P_n(\partial G_j \cap E(P'_n, t))$ прямолинейный полуинтервал $(0; w]$ пересекает по крайней мере одну из дуг множества $P_n(\overline{G}_j \cap L(P'_n, t))$.

Пусть, как и выше, $\arg(\cdot)$ обозначает однозначную ветвь со значениями из промежутка $[0; 2\pi)$ многозначной функции аргумента $\text{Arg}(\cdot)$, $\arg(0) := 0$. Положим

$$\ln(w) := \ln |w| + i \arg(w).$$

По доказанному выше, при каждом $j = 1, \dots, n$ и каждом $w \in P_n(\partial G_j \cap E(P'_n, t)) \subset \gamma_1$ всякий горизонтальный луч $\ln((0; w])$ пересекает по крайней мере одну из дуг множества $\ln(P_n(\overline{G}_j \cap L(P'_n, t)))$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{j=1}^n \text{mes } P_n(\partial G_j \cap E(P'_n, t)) = \sum_{j=1}^n |\ln(P_n(\partial G_j \cap E(P'_n, t)))| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |\ln(P_n(\overline{G}_j \cap L(P'_n, t)))|. \end{aligned}$$

Оценим сумму в правой части последнего неравенства. Пусть δ_k , $k = 1, 2, \dots, K$, обозначают занумерованные в произвольном порядке спрямляемые замкнутые дуги с длинами $|\delta_k|$, на которые распадается множество $L(P'_n, t) \cap \overline{G}$. Тогда

$$L(P'_n, t) \cap \overline{G} = \bigcup_{j=1}^n (L(P'_n, t) \cap \overline{G}_j) = \bigsqcup_{k=1}^K \delta_k.$$

Пусть для некоторого k дуга δ_k невырождена в точку. Обозначим через $\delta_k(s)$ любую из двух (отличающихся направлением обхода дуги δ_k) натуральных параметризаций этой дуги, $s \in [0; |\delta_k|]$. Пусть также s_1 и s_2 – произвольные точки отрезка $[0; |\delta_k|]$. Положим $z_1 := \delta_k(s_1)$, $z_2 := \delta_k(s_2)$. Так как $|P'_n(z)| \equiv t$ в точках z дуги δ_k , то

$$|P_n(z_1) - P_n(z_2)| = \left| \int_{z_1}^{z_2} P'_n(\delta_k(s)) ds \right| \leq t |s_1 - s_2|,$$

где интеграл берется по той части дуги δ_k , которая соединяет точки z_1 и z_2 . Так как при этом $|P_n(z)| = 1$ в концах дуги δ_k , то

$$|P_n(\delta_k(s))| \geq 1 - t \cdot \min\{s, |\delta_k| - s\} > 0.$$

Учитывая, что $(\ln(P_n(z)))' = P'_n(z)/P_n(z)$ при всех z , для которых $P_n(z) \notin [0; +\infty)$, отсюда получаем

$$\begin{aligned} m(t) &\leq \sum_{j=1}^n |\ln(P_n(\overline{G}_j \cap L(P'_n, t)))| = \sum_{k=1}^K \int_{\delta_k} \frac{|P'_n(z)||dz|}{|P_n(z)|} = \sum \int_0^{|\delta_k|} \frac{|P'_n(\delta_k(s))| ds}{|P_n(\delta_k(s))|} \\ &\leq \sum 2 \int_0^{|\delta_k|/2} \frac{t ds}{1 - ts} \leq 2 \int_0^{l_*(t)/2} \frac{t ds}{1 - ts} = 2 \ln \left(\frac{1}{1 - tl_*(t)/2} \right), \end{aligned}$$

где $\sum$ обозначает суммирование по всем невырожденным в точку дугам δ_k . Отсюда получаем неравенство $tl_*(t) \geq 2(1 - e^{-m(t)/2})$. Следовательно,

$$tl(t) = tl_0(t) + tl_*(t) \geq m(t) + 2(1 - e^{-m(t)/2}).$$

Напомним, что эти оценки мы получили, предполагая $\max\{\tau l(\tau) : \tau \in (0; t]\} < 2$, что, с учетом доказанного ранее неравенства $m(t) \leq tl(t)$, влечет $m(t) < 2$. Рассмотрим монотонно возрастающие при $x \in [0; 2]$ функции

$$f(x) = x + 2(1 - e^{-x/2}) \quad \text{и} \quad g(x) = 2x - \frac{x^2}{4}.$$

Так как $f(0) = g(0) = 0$ и $f'(x) = 1 + e^{-x/2} \geq 2 - x/2 = g'(x)$ при всех $x \geq 0$, то при таких значениях x имеем $f(x) \geq g(x)$. Пусть $x = g^{-1}(y)$ обозначает обратную к $y = g(x)$ при $x \in [0; 2]$ функцию. Если найдется такое значение $y \in [0; 2)$, что $g^{-1}(y) > y/2 + y^2/23$, то тогда

$$y > g\left(\frac{y}{2} + \frac{y^2}{23}\right) = y + y^2 \cdot \left(\frac{2}{23} - \frac{1}{16} - \frac{y}{4 \cdot 23} - \frac{y^2}{4 \cdot 23^2}\right) \geq y$$

– приходим к противоречию. Поэтому $tl(t) \geq f(m(t)) \geq g(m(t))$. Отсюда, учитывая неравенство $tl(t) < 2$, получаем

$$m(t) \leq g^{-1}(tl(t)) \leq \frac{tl(t)}{2} + \frac{(tl(t))^2}{23}.$$

Лемма доказана полностью.

ТЕОРЕМА 3. При всех $n \geq 2$ имеет место неравенство

$$\lambda_n \leq \pi \left(n + \frac{25}{23} \right) + \pi \sqrt{\frac{n-1}{2} \ln(\pi n(n-1))}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_n(z)$ – такой многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, лемниската $L(P_n, 1)$ которого содержит все нули $P'_n(z)$ и имеет длину $|L(P_n, 1)| = \lambda_n$. Отсюда и из (2.3) следует равенство

$$\lambda_n = \int_0^{+\infty} \frac{m(t)}{t^2} dt, \quad \text{где } m(t) = m(P_n, 1, t) = \sum_{j=1}^n \text{mes}\{\zeta : |P'_n(\psi_j(\zeta))| \leq t\}.$$

Оценим сверху этот интеграл, используя лемму 1 и теорему 2.

Как следует из результата Данченко, длина $l(t)$ лемнискаты $L(P'_n, t)$ не превосходит $2\pi(n-1)(t/n)^{1/(n-1)}$ при всех $t > 0$. Поэтому

$$\max\{\tau l(\tau) : \tau \in (0; t]\} \leq 2\pi(n-1)t \left(\frac{t}{n}\right)^{1/(n-1)} < 2 \quad \text{при } 0 < t < t_0 := \frac{1}{\pi(n-1)}.$$

Значит, по лемме 1 при таких t имеет место неравенство $m(t) \leq tl(t)/2 + (tl(t))^2/23$. Пусть $t_1 = n > t_0$, тогда по лемме 1 имеем также $m(t) \leq tl(t)$ при $t \in [t_0; t_1]$. Кроме того, из определения функции $m(t)$ следует, что $m(t) \leq 2\pi n$ при $t \geq t_1$. Отсюда для таких t_0 и t_1 получаем неравенство

$$\lambda_n \leq \int_0^{t_1} \frac{l(t)}{2t} dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{l(t)}{2t} dt + \int_0^{t_0} \frac{l^2(t)}{23} dt + \int_{t_1}^{+\infty} \frac{2\pi n}{t^2} dt. \quad (3.2)$$

Оценим интегралы в его правой части. По неравенству Коши–Буняковского получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{t_1} \frac{l(t)}{t} dt \right)^2 &= \left(\int_0^{t_1} \frac{1}{t^{(n-2)/(2n-2)}} \cdot \frac{l(t)}{t^{n/(2n-2)}} dt \right)^2 \\ &\leq \int_0^{t_1} \frac{dt}{t^{(n-2)/(n-1)}} \cdot \int_0^{t_1} \frac{l^2(t)}{t^{n/(n-1)}} dt = (n-1)t_1^{1/(n-1)} \int_0^{t_1} \frac{l^2(t)}{t^{n/(n-1)}} dt. \end{aligned}$$

Функция $S(t) = S(P'_n, t) = S(P'_n/n, t/n)$ по теореме 2 непрерывна при $t > 0$ и имеет при всех таких t непрерывную в обобщенном смысле производную $S'(t)$, удовлетворяющую неравенству $2\pi(n-1)tS'(t) \geq l^2(t)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{t_1} \frac{l(t)}{t} dt \right)^2 &\leq 2\pi(n-1)^2 t_1^{1/(n-1)} \int_0^{t_1} \frac{S'(t) dt}{t^{1/(n-1)}} \\ &= 2\pi(n-1)^2 t_1^{1/(n-1)} \left(\frac{S(t)}{t^{1/(n-1)}} \Big|_0^{t_1} + \frac{1}{n-1} \int_0^{t_1} \frac{S(t)}{t^{n/(n-1)}} dt \right). \end{aligned}$$

Из теорем Поля и Фекете (см., например, [8; глава VII, §§ 1–2]) следует, что $S(t) \leq \pi(t/n)^{2/(n-1)}$ при всех $t > 0$. Следовательно, $S(t)t^{-1/(n-1)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$ и

$$\int_0^{t_1} \frac{S'(t) dt}{t^{1/(n-1)}} \leq \frac{\pi t_1^{1/(n-1)}}{n^{2/(n-1)}} + \frac{\pi}{(n-1)n^{2/(n-1)}} \int_0^{t_1} \frac{dt}{t^{(n-2)/(n-1)}} = \frac{2\pi t_1^{1/(n-1)}}{n^{2/(n-1)}} = \frac{2\pi}{n^{1/(n-1)}}.$$

Значит,

$$\left(\int_0^{t_1} \frac{l(t)}{t} dt \right)^2 \leq 4\pi^2(n-1)^2, \quad \int_0^{t_1} \frac{l(t)}{2t} dt \leq \pi(n-1). \quad (3.3)$$

Используя теорему Коши–Буняковского и теорему 2, получаем также

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{l(t)}{t} dt \right)^2 &= \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t^{1/2}} \cdot \frac{l(t)}{t^{1/2}} dt \right)^2 \leq \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{t} \cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{l^2(t)}{t} dt \\ &\leq 2\pi(n-1) \ln\left(\frac{t_1}{t_0}\right) \int_{t_0}^{t_1} S'(t) dt \leq 2\pi^2(n-1) \left(\frac{t_1}{n}\right)^{2/(n-1)} \ln\left(\frac{t_1}{t_0}\right) \\ &= 2\pi^2(n-1) \ln(\pi n(n-1)). \end{aligned}$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{l(t)}{2t} dt \leq \pi \sqrt{\frac{n-1}{2} \ln(\pi n(n-1))}. \quad (3.4)$$

По теореме 2 имеем $l^2(t) \leq 2\pi(n-1)tS'(t)$. Значит,

$$\int_0^{t_0} \frac{l^2(t)}{23} dt \leq \frac{2\pi(n-1)}{23} \int_0^{t_0} tS'(t) dt \leq \frac{2\pi(n-1)}{23} t_0 S(t_0) \leq \frac{2\pi}{23}. \quad (3.5)$$

Подставляя в неравенство (3.2) оценки (3.3)–(3.5) и равенство $\int_{t_1}^{+\infty} dt/t^2 = 1/n$, получаем неравенство (3.1). Теорема 3 доказана полностью.

В заключение автор выражает благодарность профессору Е. П. Долженко за постановку задачи и доценту П. А. Бородину за ряд ценных замечаний и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, F. Herzog, G. Piranian, “Metric properties of polynomials”, *J. Analyse Math.*, **6:1** (1958), 125–148.

- [2] Е. П. Долженко, *Дифференциальные свойства функций и некоторые вопросы теории приближений*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1960.
- [3] Е. П. Долженко, “Некоторые метрические свойства алгебраических гиперповерхностей”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **27**:2 (1963), 241–252.
- [4] A. Eremenko, W. Hayman, “On the length of lemniscates”, *Michigan Math. J.*, **46**:2 (1999), 409–415.
- [5] В. И. Данченко, “Длины лемнискат. Вариации рациональных функций”, *Матем. сб.*, **198**:8 (2007), 51–58.
- [6] A. Fryntov, F. Nazarov, “New estimates for the length of the Erdős–Herzog–Piranian lemniscate”, *Linear and Complex Analysis*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **226**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 49–60, arXiv: 0808.0717.
- [7] В. И. Богачев, *Основы теории меры*, Регулярная и хаотическая динамика, М.–Ижевск, 2003.
- [8] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

О. Н. Косухин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: kosuhin_oleg@mail.ru

Поступило

19.07.2011

Исправленный вариант

29.09.2011