Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Б. Брыскин, Е. М. Семёнов, Недополняемые подпространства пространств Лоренца, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 57–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm919>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:21:36

УДК 517.5

НЕДОПОЛНЯЕМЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА

И. Б. Брыскин, Е. М. Семёнов

В работе строится такая система ограниченных функций, что подпространство, порожденное этой системой, недополняемо в пространстве Лоренца $\Lambda(\alpha)$ для всех $\alpha \in (0, 1)$. Получены нижние оценки норм проектора на такие подпространства.

Библиография: 4 названия.

Если $1 \leq p < \infty$ и $\{x_i\}$ – система дизъюнктивных функций (т. е. имеющая непересекающиеся носители) из $L_p[0, 1]$, то $\overline{\text{span}}(\{x_i\}, L_p)$ – подпространство L_p , порожденное системой $\{x_i\}$, дополняемо в L_p . Действительно, оператор

$$Px(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 x(s)y_i(s) ds x_i(t),$$

где $y_i \in L_{p'}$ ($1/p + 1/p' = 1$), $\|y_i\|_{L_{p'}} = 1$ и

$$\int_0^1 x_i(s)y_i(s) ds = \|x_i\|_{L_p},$$

имеет единичную норму в L_p и проектирует на $\overline{\text{span}}(\{x_i\}, L_p)$. Обратное утверждение для банаховых решеток доказал Т. Андо ([1] или [2, 1.b.8]). Пусть E – банахова решетка размерности больше 2. Если для любой замкнутой подрешетки $F \subset E$ существует положительный оператор единичной нормы, проектирующий E на F , то E порядково изометрично $L_p(\mu)$ для некоторого $1 \leq p < \infty$ и некоторой меры μ или $c_0(\Gamma)$ для некоторого множества Γ . Изоморфный случай был рассмотрен Л. Цафрири, ([3] или [2, 1.b.12]). Пусть E – порядково непрерывная банахова решетка. Всякая подрешетка дополняема в E тогда и только тогда, когда E порядково изоморфна $L_p(\mu)$ для некоторого $p \in [1, \infty)$ и некоторой меры μ или $c_0(\Gamma)$ для некоторого множества Γ .

В настоящей работе строится такая система ограниченных дизъюнктивных функций, что подпространство, порожденное этой системой, недополняемо в пространстве Лоренца $\Lambda(\alpha)$ для всех $\alpha \in (0, 1)$. Кроме того, найдена нижняя оценка нормы проектора на подпространство, порожденное конечной системой дизъюнктивных функций.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00135.

Приведем необходимые определения. Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Через $\Lambda(\alpha)$ обозначается множество измеримых функций, для которых

$$\|x\|_\alpha = \alpha \int_0^\infty x^*(t) t^{\alpha-1} dt < \infty,$$

где $x^*(t)$ – перестановка функций $|x(t)|$ в убывающем порядке. Очевидно,

$$\|\chi_e\|_\alpha = (\text{mes } e)^\alpha,$$

где $\chi_e(t)$ – характеристическая функция измеримого множества e . Норму оператора A , действующего в $\Lambda(\alpha)$, также будем обозначать $\|A\|_\alpha$. Если A – положительный оператор в $\Lambda(\alpha)$, то

$$\|A\|_\alpha = \sup_{\text{mes } e > 0} \frac{\|A\chi_e\|_\alpha}{(\text{mes } e)^\alpha}, \quad (1)$$

(см. [4, 2.5.2]).

Пусть $a > 0$. Пространство Лоренца функций, заданных на $[0, a]$, определяется точно так же и обозначается $\Lambda(\alpha)(0, a)$. Пространства $\Lambda(\alpha)(0, a)$ и $\Lambda(\alpha)(0, 1)$ изометричны. Изометрия реализуется оператором $a^\alpha \sigma_{1/a}$, где

$$\sigma_a x(t) = x\left(\frac{t}{a}\right). \quad (2)$$

По измеримой функции $x(t)$ построим ее функцию распределения

$$n_x(\tau) = \text{mes}\{t: |x(t)| \geq \tau\}.$$

Тогда

$$\|x\|_\alpha = \int_0^\infty (n_x(\tau))^\alpha d\tau, \quad (3)$$

(см. [4, 2.5.4]). Если $\text{mes}(\text{supp } x) \leq 1$ и $0 < \alpha < \beta \leq 1$, то $\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha$.

Из (3) вытекает выпуклость функции $f(\alpha) = \ln \|x\|_\alpha$. Это означает, что

$$\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha^{(\gamma-\beta)/(\gamma-\alpha)} \|x\|_\gamma^{(\beta-\alpha)/(\gamma-\alpha)} \quad (4)$$

для любых $0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 1$ и $x \in \Lambda(\alpha) \cap \Lambda(\gamma)$.

Сопряженное к $\Lambda(\alpha)(0, a)$ пространство изометрически изоморфно пространству $M(\alpha)(0, a)$, где $0 < a \leq \infty$ и

$$\|x\|_{M(\alpha)} = \sup_{0 < \tau < a} \frac{\int_0^\tau x^*(t) dt}{\tau^\alpha}.$$

В частности, если $x \in \Lambda(\alpha)$, $y \in M(\alpha)$, то $xy \in L_1$ и

$$\|xy\|_{L_1} \leq \|x\|_{\Lambda(\alpha)} \|y\|_{M(\alpha)}.$$

Более подробно о пространствах Лоренца см [4, 2.5].

ЛЕММА 1. Пусть $0 < \theta < 1$. Существует такая возрастающая последовательность чисел n_i , $i = 0, 1, \dots$, что

$$1) \quad \sum_{i=1}^m n_i \geq m^{1-\theta} n_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$2) \quad \sum_{i=1}^m \frac{n_i - n_{i-1}}{n_i} \geq \frac{1}{2} m^\theta, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$3) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n_{m+1} - n_m}{\ln n_{m+1} - \ln n_m} = \infty. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $n_0 = 1$. Если $n_0, n_1, \dots, n_m$ уже определены, то n_{m+1} можно выбрать так, чтобы

$$n_{m+1} \geq (m+1)^{1-\theta} n_{m+1} - m^{1-\theta} n_m, \quad \frac{n_{m+1} - n_m}{n_{m+1}} \geq (m+1)^\theta - m^\theta.$$

Действительно, эти неравенства эквивалентны следующим

$$\frac{n_m}{m^\theta + 1 - (m+1)^\theta} \leq n_{m+1} \leq \frac{m^{1-\theta} n_m}{(m+1)^{1-\theta} - 1}. \quad (8)$$

Неравенство

$$\frac{(m+1)^{1-\theta} - 1}{m^{1-\theta}} \leq m^\theta + 1 - (m+1)^\theta$$

имеет место при всех $m = 1, 2, \dots$, так как

$$\frac{(m+1)^{1-\theta} - 1}{m^{1-\theta}} < 1 + \frac{1-\theta}{m} - \frac{1}{m^{1-\theta}} < 1 - \theta m^{\theta-1} < m^\theta + 1 - (m+1)^\theta.$$

Потому если мы положим

$$n_{m+1} = \frac{m^{1-\theta}}{(m+1)^{1-\theta} - 1} n_m, \quad (9)$$

то $n_{m+1} > n_m$ и будет выполнены (5) и (6). Так как

$$\frac{n_{m+1} - n_m}{\ln n_{m+1} - \ln n_m} = \frac{(m^{1-\theta} + 1 - (m+1)^{1-\theta}) n_m}{((m+1)^{1-\theta} - 1) \ln \frac{m^{1-\theta}}{(m+1)^{1-\theta} - 1}}$$

и

$$\ln \frac{m^{1-\theta}}{(m+1)^{1-\theta} - 1} = \ln \left(1 + \frac{m^{1-\theta} + 1 - (m+1)^{1-\theta}}{(m+1)^{1-\theta} - 1} \right) < \frac{m^{1-\theta} + 1 - (m+1)^{1-\theta}}{(m+1)^{1-\theta} - 1},$$

то

$$\frac{n_{m+1} - n_m}{\ln n_{m+1} - \ln n_m} > n_m. \quad (10)$$

Левая часть (8) и равенство

$$\prod_{m=1}^{\infty} (m^{\theta} + 1 - (m+1)^{\theta}) = 0$$

показывают, что $n_m \rightarrow \infty$. Отсюда и из (10) вытекает (7).

По заданному $\alpha \in (0, 1)$ построим последовательность функций

$$x_n(t) = x_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{n} (\max(t, 2^{-n}))^{-\alpha}. \quad (11)$$

Имеем

$$\|x_n\|_{\alpha} = \frac{1}{n} \alpha \int_0^1 (\max(t, 2^{-n}))^{-\alpha} t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{n} \left(1 + \alpha \int_{2^{-n}}^1 \frac{dt}{t} \right) = \frac{1 + \alpha n \ln 2}{n} \leq 2$$

и

$$\text{mes}\{t: x_n(t) \geq \tau\} = (n\tau)^{-1/\alpha}, \quad \frac{2\alpha}{n} \leq \tau \leq \frac{2n\alpha}{n}, \quad (12)$$

для всех $n = 1, 2, \dots$. По заданной последовательности возрастающих чисел $\{n_i\}$ построим последовательность дизъюнктивных функций

$$y_{n_i}(t) = \begin{cases} x_{n_i}(t - i + 1), & i - 1 < t < i, \\ 0 & \text{для остальных } t, \end{cases} \quad (13)$$

где $x_n(t)$ определены по формуле (11).

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \alpha < 1$, $1 = n_0 < n_1 < \dots < n_m$. Тогда

$$\left\| \sum_{i=1}^m y_{n_i} \right\|_{\alpha} \geq \frac{\alpha}{3} \ln 2 \sum_{i=1}^m \frac{n_i - n_{i-1}}{n_i}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим дополнительно, что последовательность $(2^{n_i\alpha}) \times 1/n_i$ монотонно возрастает по i . Тогда в силу (12) для любого $\tau > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \text{mes} \left\{ t: \sum_{i=1}^m y_{n_i}(t) > \tau \right\} &= \sum_{i=1}^m \text{mes} \{ t: x_{n_i}(t) > \tau \} \\ &\geq \sum_{i=1}^m (n_i \tau)^{-1/\alpha} \chi_{((2^{\alpha})/n_i, (2^{\alpha})/n_{i-1})) \cup ((2^{n_i-1\alpha})/n_{i-1}, (2^{n_i\alpha})/n_i)}(\tau). \end{aligned}$$

Используя (3), получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m y_{n_i} \right\|_{\alpha} &= \int_0^{\infty} \left(\text{mes} \left\{ t: \sum_{i=1}^m y_{n_i}(t) > \tau \right\} \right)^{\alpha} d\tau \\ &\geq \sum_{i=1}^m \left(\int_{(2^{\alpha})/n_i}^{(2^{\alpha})/n_{i-1}} + \int_{(2^{n_i-1\alpha})/n_{i-1}}^{(2^{n_i\alpha})/n_i} \right) (n_i \tau)^{-1} d\tau \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{n_i} \left(\ln \frac{n_i}{n_{i-1}} + \ln \frac{2^{n_i\alpha} n_{i-1}}{n_i 2^{n_{i-1}\alpha}} \right) = \alpha \ln 2 \sum_{i=1}^m \frac{n_i - n_{i-1}}{n_i}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если же $(2^{n_i\alpha})/n_i$ монотонно убывает по i , то, повторяя предыдущие оценки, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m y_{n_i} \right\|_{\alpha} &\geq \sum_{i=1}^m \frac{1}{n_i} \left(\ln \frac{n_i}{n_{i-1}} - \ln \frac{2^{n_i\alpha} n_{i-1}}{n_i 2^{n_{i-1}\alpha}} \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^m \frac{1}{n_i} \left(\ln \frac{n_i}{n_{i-1}} + \ln \frac{2^{n_i\alpha} n_{i-1}}{n_i 2^{n_{i-1}\alpha}} \right) = \alpha \ln 2 \sum_{i=1}^m \frac{n_i - n_{i-1}}{n_i}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для любого $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ справедлива оценка

$$\left\| \sum_{i=1}^m y_{n_i} \right\|_{\alpha} \geq \int_{(2^{\alpha})/n_j}^{(2^{n_j\alpha})/n_j} (n_j \tau)^{-1} d\tau = \frac{\alpha \ln 2 (n_j - 1)}{n_j} \geq \alpha \ln 2 \frac{n_j - n_{j-1}}{n_j}. \quad (17)$$

Функция

$$f(t) = \frac{2^{t\alpha}}{t}$$

монотонно убывает на интервале $(0, 1/(\alpha \ln 2))$ и возрастает на интервале $(1/(\alpha \ln 2), \infty)$. Поэтому найдется такой индекс j , что последовательность $(2^{n_i\alpha})/n_i$ убывает при $1 \leq i \leq j$ и возрастает при $j+1 \leq i \leq m$. В силу (15) и (16)

$$\left\| \sum_{i=1}^m y_{n_i} \right\|_{\alpha} \geq \alpha \ln 2 \sum_{i=1}^j \frac{n_i - n_{i-1}}{n_i}, \quad \left\| \sum_{i=1}^m y_{n_i} \right\|_{\alpha} \geq \alpha \ln 2 \sum_{i=j+1}^m \frac{n_i - n_{i-1}}{n_i}.$$

Из полученных неравенств и (17) вытекает (14).

Нетрудно посчитать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\|_{\alpha} = \alpha \ln 2.$$

Это говорит о точности оценки (14).

Пусть теперь $\{n_i\}$ – последовательность из леммы 1 и $\theta = (1 + \alpha)/2$. В силу (14), (16) и (5)

$$\left\| \sum_{i=1}^m y_{n_i} \right\|_{\alpha} \geq \frac{\alpha \ln 2}{6} m^{(1+\alpha)/2} \quad (18)$$

и

$$\frac{1}{n_m} \sum_{i=1}^m \frac{n_i - n_{i-1}}{n_i} \geq m^{(1-\alpha)/2}. \quad (19)$$

Из (9) вытекает, что для всех $i \geq 1$

$$n_i \geq n_1 = \frac{n_0}{2^{1-\theta} - 1} = \frac{1}{2^{(1-\alpha)/2} - 1} \geq \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 > 2. \quad (20)$$

Обозначим

$$B_{\alpha, m} = \text{span}\{y_{n_i}, 1 \leq i \leq m\}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $0 < \alpha < 1$, m – натуральное число и P – проектор $\Lambda(\alpha)(0, m)$ на $B_{\alpha, m}$. Существует такое $C(\alpha) > 0$, что

$$\|P\|_{\alpha} \geq C(\alpha)m^{(1-\alpha)/2} \quad (21)$$

и $C(\alpha)$ возрастает на $(0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор P является конечномерным и $\Lambda^*(\alpha) = M(\alpha)$, то

$$Px(t) = \sum_{j=1}^m \int_{j-1}^j f_j(s)x(s) ds y_{n_j}(t),$$

где $f_j \in M(\alpha)$,

$$\int_{j-1}^j f_j(s)y_{n_j}(s) ds = 1$$

для всех $j = 1, 2, \dots, m$. Положим

$$f_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{если } \int_{j-1+2^{-k}}^{j-1+2^{-k+1}} f_j(t)(t-j+1)^{-\alpha} dt < 1/2, \\ \int_{j-1+2^{-k}}^{j-1+2^{-k+1}} f_j(t)(t-j+1)^{-\alpha} dt & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для $j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, [n_j]$. Из определений (11), (13) и (20) вытекает

$$\begin{aligned} n_j &\leq 2^{n_j \alpha} \int_{j-1}^{j-1+2^{-[n_j]}} f_j(s) ds + \sum_{k=1}^{[n_j]} \int_{j-1+2^{-k}}^{j-1+2^{-k+1}} f_j(s)(s-j+1)^{-\alpha} ds \\ &\leq 2 + \sum_{k=1}^{[n_j]} f_{kj} + \frac{[n_j]}{2}. \end{aligned}$$

Для $j \geq 4$ отсюда получаем

$$\sum_{k=1}^{[n_j]} f_{kj} \geq \frac{n_j}{2} - 2 \geq \frac{n_j}{4}.$$

Если $f_{kj} \neq 0$, то

$$\frac{1}{2} \leq f_{kj} \leq \|P\|_{\alpha}.$$

Для заданного $1 \leq k \leq n_m$ обозначим $d_k = \min\{j: n_j \geq k\}$. Тогда

$$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^m n_j \leq \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{[n_j]} f_{kj} = \sum_{k=1}^{[n_m]} \sum_{j=d_k}^{[n_m]} f_{kj}.$$

Найдем такой индекс $l \in \{1, 2, \dots, n_m\}$, что

$$\frac{1}{4n_m} \sum_{j=1}^m n_j \leq \sum_{j=d_l}^{[n_m]} f_{lj},$$

и обозначим через $Q = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ множество $\{j: d_l \leq j \leq [n_m], f_{lj} \neq 0\}$. Тогда $1/2 \leq f_{lj} \leq \|P\|_\alpha$ для $j \in Q$ и

$$\frac{1}{4n_m} \sum_{j=1}^m n_j \leq \|P\|_\alpha r. \quad (22)$$

Рассмотрим функцию $z(t) = 2^{l\alpha} \sum_{j \in Q} \chi_{(j-1, j-1+2^{-l})}(t)$. Очевидно, $\|z\|_\alpha = r^\alpha$ и

$$Pz(t) = \sum_{j \in Q} 2^{l\alpha} \int_{j-1+2^{-l}}^{j-1+2^{-l+1}} f_j(s) ds y_{n_j}(t).$$

Так как

$$2^{l\alpha} \int_{j-1+2^{-l}}^{j-1+2^{-l+1}} f_j(s) ds \geq \int_{j-1+2^{-l}}^{j-1+2^{-l+1}} f_j(s)(s-j+1)^{-\alpha} ds = f_{lj},$$

в силу (18)

$$\|Pz\|_\alpha \geq \frac{1}{2} \left\| \sum_{j \in Q} y_{n_j} \right\|_\alpha \geq \frac{1}{12} \alpha \ln 2 r^{(1+\alpha)/2}.$$

Отсюда

$$\|P\|_\alpha \geq \frac{\|Pz\|_\alpha}{\|z\|_\alpha} \geq \frac{1}{12} \alpha \ln 2 r^{(1-\alpha)/2}.$$

Продолжая оценку с помощью (22), получаем

$$\|P\|_\alpha \geq \frac{1}{12} \alpha \ln 2 \left(\frac{1}{4\|P\|_\alpha n_m} \sum_{i=1}^m n_m \right)^{(1-\alpha)/2}.$$

В силу (19)

$$\|P\|_\alpha \geq \left(\frac{1}{48} \alpha \ln 2 m^{(1-\alpha)/2} \right)^{2/3}.$$

Этим установлено (21) с $C(\alpha) = (\alpha \ln 2 / 48)^{2/3}$.

Полученная оценка может быть усилена. Если $0 < \delta < 1/2$, то существует константа $D(m, \delta)$ такая, что

$$\|y\|_{L_\infty} \leq D(m, \delta) \|y\|_\alpha \quad (23)$$

для всех $y \in B_{\alpha, m}$ и всех $\alpha \in [\delta, 1 - \delta]$. Это непосредственно вытекает из (9), (11). Как отмечалось ранее, пространства $\Lambda(\alpha)(0, m)$ и $\Lambda(\alpha)(0, 1)$ изометричны. Обозначим через $B_{\alpha, m}^0$ образ $B_{\alpha, m}$ относительно канонической изометрии $m^\alpha \sigma_{1/m}$. Переобозначая константу в (23), можно считать, что (23) выполнено для всех $y \in B_{\alpha, m}^0$.

Пусть $0 < \delta \leq \alpha < \beta \leq 1 - \delta$, m – натуральное число и P – проектор $\Lambda(\alpha)$ на $B_{\alpha, m}^0$. В силу (4) и (23)

$$\|Px\|_\alpha \leq \|Px\|_{L_\infty}^{1-\alpha/\beta} \|Px\|_\beta^{\alpha/\beta} \leq (D(m, \delta) \|P\|_\alpha \|x\|_\alpha)^{1-\alpha/\beta} \|Px\|_\beta^{\alpha/\beta}$$

для любых $x \in \Lambda(\alpha)$. Отсюда

$$\|Px\|_\beta \geq \|Px\|_\alpha^{\beta/\alpha} (D(m, \delta) \|P\|_\alpha \|x\|_\alpha)^{1-\beta/\alpha}$$

и

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Lambda(\alpha)} \frac{\|Px\|_\beta}{\|x\|_\alpha} &\geq \sup_{x \in \Lambda(\alpha)} \left(\frac{\|Px\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} \right)^{\beta/\alpha} (D(m, \delta) \|P\|_\alpha)^{1-\beta/\alpha} \\ &= \|P\|_\alpha^{\beta/\alpha} (D(m, \delta) \|P\|_\alpha)^{1-\beta/\alpha} = D^{1-\beta/\alpha}(m, \delta) \|P\|_\alpha. \end{aligned}$$

Если дополнительно потребовать, чтобы

$$\beta < \alpha(1 + \ln^{-1} D(m, \delta)), \quad (24)$$

то

$$\sup_{x \in \Lambda(\alpha)} \frac{\|Px\|_\beta}{\|x\|_\alpha} \geq \frac{1}{e} \|P\|_\alpha. \quad (25)$$

ТЕОРЕМА 1. *Существует такая система ограниченных дизъюнктивных функций Y на $[0, \infty]$, что подпространство $\overline{\text{span}}(Y, \Lambda(\alpha))$ недополняемо в $\Lambda(\alpha)$ для всех $\alpha \in (0, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть j – натуральное число ≥ 4 . Константа $C(\alpha)$ из леммы 3 монотонно возрастает. Поэтому $C(\alpha) \geq C(1/j)$ для $\alpha \in [1/j, 1)$. Найдем такое натуральное m , что

$$C\left(\frac{1}{j}\right) m^{1/(3j)} \geq j. \quad (26)$$

Если $1/j \leq \alpha \leq 1 - 1/j$ и P есть проектор $\Lambda(\alpha)$ на $B_{\alpha, m}$, то в силу леммы 3 и (26)

$$\|P\|_\alpha \geq j. \quad (27)$$

Построим такую последовательность $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_q < 1$, что $\alpha_1 = 1/j$, $\alpha_q = 1 - 1/j$ и

$$\alpha_{k+2} < \alpha_k \left(1 + \ln^{-1} D\left(m, \frac{1}{j}\right) \right).$$

Обозначим через Y_{jk} ($j = 4, 5, \dots, k = 1, 2, \dots, q = q(j)$) образ системы $\{y_{ni}, 1 \leq i \leq m\}$, построенной по $\alpha = \alpha_k$, при изометрии $m^\alpha \sigma_{1/m}$ и последующем сдвиге так, чтобы функции из различных семейств имели непересекающиеся носители. Заметим, если $y \in \text{span } Y_{jk}$, то $\text{mes}(\text{supp } y) \leq 1$. Поэтому

$$\|y\|_{\alpha_k} \geq \|y\|_\alpha \geq \|y\|_{\alpha_{k+2}} \quad (28)$$

при $\alpha_k < \alpha < \alpha_{k+2}$.

Докажем, что система

$$Y = \bigcup_{j=4}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{q_j} Y_{jk}$$

обладает требуемыми свойствами. Действительно, для любого $\alpha \in (0, 1)$ можно найти такое $j \geq 4$, что $\alpha \in (1/j, 1 - 1/j)$. Затем найдем такое $1 \leq k \leq q - 2$, что $\alpha_k < \alpha < \alpha_{k+2}$. Если P есть проектор $\Lambda(\alpha)$ на Y , то в силу (25), (27) и (28)

$$\|P\|_{\alpha} \geq \sup_{x \in \Lambda(\alpha_k)} \frac{\|Px\|_{\Lambda(\alpha_{k+2})}}{\|x\|_{\Lambda(\alpha_k)}} \geq \frac{1}{e} \|P\|_{\alpha_k} \geq \frac{j}{e}.$$

Число j можно было выбирать сколь угодно большим. Это доказывает недополняемость $\text{span}(Y, \Lambda(\alpha))$ в $\Lambda(\alpha)$.

Отметим результаты противоположного характера. Если $e_1, e_2, \dots$ — последовательность дизъюнктивных подмножеств, то подпространство, порожденное их характеристическими функциями $\chi_{e_1}, \chi_{e_2}, \dots$, дополняемо в любом перестановочно-инвариантном пространстве, в частности, в $\Lambda(\alpha)$ при всех $\alpha \in (0, 1]$ и норма соответствующего проектора равна 1. Это вытекает из теоремы 2.а.4 из [2].

Так как $\Lambda(1) = L_1$, теорема 1 теряет силу при $\alpha = 1$.

Авторы искренне признательны рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ando T. Banachverbände und positive Projektionen // Math. Z. 1969. V. 109. P. 121–130.
- [2] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. II. Function Spaces. Berlin: Springer, 1979.
- [3] Tzafriri L. An isomorphic characterization of L_p and c_0 spaces. II // Michigan Math. J. 1971. V. 18. P. 21–31.
- [4] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

(И. Б. Брыскин) Центр технологического образования
при университете Тель-Авива, Израиль

Поступило
31.07.1997

(Е. М. Семёнов) Воронежский государственный университет
E-mail: root@func.vsu.ru

Исправленный вариант
21.01.2000