Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, М. А. Терпстра, О геометрии характеристического вектора $lcQS$ -многообразия, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 6, 864–871

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:02:35

О геометрии характеристического вектора $lcQS$ -многообразия

В. Ф. Кириченко, М. А. Терпстра

Исследуются условия, когда характеристический вектор нормального $lcQS$ -многообразия будет торсообразующим или, более того, конциркулярным векторным полем. Доказано, что следующие утверждения эквивалентны: $lcQS$ -структура нормальна и ее характеристический вектор является торсообразующим векторным полем; $lcQS$ -структура нормальна и ее характеристический вектор является конциркулярным векторным полем; $lcQS$ -структура локально конформно косимплектична и имеет замкнутую контактную форму.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Дифференциальные 1-формы максимального ранга на нечетномерном римановом многообразии порождают особую дифференциально-геометрическую структуру, называемую *контактной метрической структурой*, которая естественно обобщается до так называемой почти контактной метрической структуры. Изучению почти контактных метрических структур посвящены статьи Чжена [1], Грея [2], [3], Сасаки [4] и других авторов, а классификация AC -структур практически необозрима.

Нами был выбран один из интереснейших классов почти контактных метрических структур – локально конформно квази-сасакиевы структуры ($lcQS$ -структуры). Существование конформных преобразований позволило определить $lcQS$ -структуру как структуру, сужение которой на некоторую окрестность произвольной точки многообразия допускает конформное преобразование в квази-сасакиеву структуру. Этот класс включает в себя сасакиевы, косимплектические, квази-сасакиевы структуры и структуры Кенмоцу.

Класс $lcQS$ -многообразий не только имеет интересные связи с классом локально конформно почти косимплектических многообразий, которые изучал Ольчак [5], но и сам обладает рядом интересных свойств, изученных в работах Кириченко и Баклашовой [6], Кириченко и Полькиной [7] и другими.

В настоящей работе исследуются нормальные $lcQS$ -структуры. Квази-сасакиевы структуры по определению являются нормальными, откуда следует нормальность косимплектических структур и структур Сасаки.

Примером косимплектического многообразия может служить многообразие, полученное произведением келерова многообразия на вещественную прямую.

Другим интересным примером нормальных $lcQS$ -многообразий могут служить многообразия Бискорна [8] и Кенмоцу. В [9] проводится подробное описание структур Кенмоцу. В этой работе доказано, что класс многообразий совпадает с классом

AC -многообразий, получаемых из косимплектических многообразий каноническим конциркулярным преобразованием их косимплектической структуры. В частности, евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$, снабженное канонической структурой косимплектического многообразия, при таком преобразовании переходит в структуру Кенмоцу постоянной кривизны -1 (нечетномерное пространство Лобачевского). Этот факт позволяет построить большое количество примеров многообразия Кенмоцу. Действительно, можем рассмотреть любое келерово многообразие размерности $2n$ и произвести над ним каноническое локально-конциркулярное преобразование [9]. Так как запас келеровых многообразий неисчерпаем, то неисчерпаем и запас многообразий Кенмоцу.

Нашей задачей было рассмотрение характеристического вектора ξ многообразия с фиксированной на нем нормальной $lcQS$ -структурой. В частности, определить, является ли характеристический вектор такого многообразия торсообразующим или, более того, конциркулярным векторным полем.

Напомним основные определения и понятия, используемые далее. Пусть M – нечетномерное гладкое многообразие, $\dim M = 2n + 1$; $\mathfrak{X}(M)$ – $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M ; d – оператор внешнего дифференцирования; $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика; $[\cdot, \cdot]$ – операция взятия скобок Ли; $\mathfrak{L}_X$ – оператор дифференцирования Ли в направлении векторного поля X ; ∇ – риманова связность метрики g .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Контактной структурой* на M называется дифференциальная 1-форма η на M такая, что в каждой точке многообразия

$$\eta \wedge \underbrace{d\eta \wedge \cdots \wedge d\eta}_{n \text{ раз}} \neq 0.$$

Многообразие с фиксированной на нем контактной структурой называется *контактным многообразием* [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Почти контактной метрической структурой* (короче, *АС-структурой*) на многообразии M называется четверка (η, ξ, Φ, g) на этом многообразии, где η – дифференциальная 1-форма, называемая *контактной формой*, ξ – векторное поле, называемое *характеристическим*, Φ – эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, называемый *структурным эндоморфизмом*, а $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика на M , и выполняются следующие условия:

- 1) $\eta(\xi) = 1$;
- 2) $\eta \circ \Phi = 0$;
- 3) $\Phi(\xi) = 0$;
- 4) $\Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi$;
- 5) $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y)$.

Если в последней формуле положить $Y = \xi$, то получим, что $\langle X, \xi \rangle = \eta(X)$. Многообразие с фиксированной на нем почти контактной метрической структурой называется *почти контактным метрическим многообразием* [8].

AC -структуры естественно возникают на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий [8], на пространствах главных T^1 -расслоений над симплектическими многообразиями с целочисленной фундаментальной формой (расслоения Бутби–Вана [8]) и, более общо, над почти эрмитовыми многообразиями [10].

Рассмотрим почти контактную метрическую структуру на многообразии M . Естественным образом в модуле $\mathfrak{X}(M)$ возникает пара взаимно дополнительных проекторов:

$$\mathfrak{l} = \text{id} - \eta \otimes \xi \quad \text{и} \quad \mathfrak{m} = \eta \otimes \xi.$$

Очевидно, что $\mathfrak{m} + \mathfrak{l} = \text{id}$. Кроме того, легко показать, что $\mathfrak{l} = -\Phi^2$.

Это будут проекторы на распределения $\mathfrak{L} = \text{im } \Phi$ и $\mathfrak{M} = \ker \Phi$ соответственно, которые мы назовем *первым* и *вторым фундаментальными распределениями*. Таким образом, для модуля $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей верно разложение

$$\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M},$$

где $\dim \mathfrak{L} = 2n$, $\dim \mathfrak{M} = 1$. Из того, что Φ является f -структурой дефекта 1, следует, что

$$\mathfrak{X}(M)^c = \mathfrak{X}(M) \otimes \mathbb{C} = D_{\Phi}^{\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^0,$$

причем проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут соответственно эндоморфизмы

$$\pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi), \quad \bar{\pi} = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi), \quad m = \text{id} + \Phi^2.$$

К $(2n+1)$ -мерному почти контактному метрическому многообразию как f -многообразию дефекта 1 внутренним образом присоединяется G -структура, тотальное пространство которой состоит из модифицированных A -реперов, а ее структурной группой является группа Ли $U(n) \times \{e\}$ [11].

2. Нормальные локально конформно квази-сасакиевы структуры. AC -структура называется *нормальной* [12], если тензор Нейенхейса N_{Φ} ее структурного эндоморфизма удовлетворяет тождеству

$$N_{\Phi} + 2d\eta \otimes \xi = 0.$$

Здесь тензор Нейенхейса структурного эндоморфизма Φ имеет вид

$$N_{\Phi}(X, Y) = \frac{1}{4}\{\Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]\}, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Фундаментальной формой AC -структуры [11] называется тензор Ω , определяемый соотношением

$$\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

AC -Структура, для которой справедливо соотношение $d\eta = 2\Omega$, называется *контактной метрической структурой* [8]. *Квази-сасакиевой структурой* называется нормальная почти контактная метрическая структура с замкнутой фундаментальной формой. Напомним также, что *сасакиевой структурой* называется нормальная контактная метрическая структура; *косимплектической структурой* называется AC -структура с параллельным в римановой связности структурным эндоморфизмом Φ ; *структурой Кенмоцу* называется AC -структура, на которой выполнено тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle \xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Эти типы AC -структур обладают интереснейшими свойствами, изучению которых посвящено огромное число публикаций (см. [8], [11], [12]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [6]. Конформным преобразованием AC -структуры $S = (\xi, \eta, \Phi, g)$ на многообразии M называется переход от S к AC -структуре $\tilde{S} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$, где $\tilde{\xi} = e^\sigma \xi$, $\tilde{\eta} = e^{-\sigma} \eta$, $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\tilde{g} = e^{-2\sigma} g$, σ – произвольная гладкая функция на M , называемая *определяющей функцией преобразования*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [6]. AC -структура S на M называется *локально конформно квази-сасакиевой*, короче, *$lcQS$ -структурой*, если сужение этой структуры на некоторую окрестность U произвольной точки $p \in M$ допускает конформное преобразование в квази-сасакиеву структуру.

Будем называть это преобразование *локально конформным*. Многообразие, на котором фиксирована $lcQS$ -структура, называется *$lcQS$ -многообразием*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [13]. Векторное поле X на псевдоримановом многообразии (M, g) называется *конциркулярным* векторным полем, если

$$\nabla X = \rho \cdot \text{id} + d\Psi \otimes X,$$

и *рекуррентным* векторным полем, если

$$\nabla X = d\Psi \otimes X,$$

где ρ и Ψ – скалярные поля. Если выполняется условие

$$\nabla X = \rho \cdot \text{id} + a \otimes X$$

для поля 1-формы a и всех векторных полей X на M , то X называется *торсообразующим* векторным полем. Здесь скаляр ρ и ковектор a будем называть *определяющими элементами* торсообразующего векторного поля.

Пусть M – нормальное $lcQS$ -многообразие. Известно [6], что на всяком $lcQS$ -многообразии M внутренним образом определена дифференциальная 1-форма α такая, что $\alpha^\#|_U = \text{grad } \sigma$, где σ – определяющая функция соответствующего локально конформного преобразования. Глобальная 1-форма α называется (*контактной*) *формой Ли $lcQS$ -многообразия*. Вектор $\alpha^\#$, дуальный форме Ли, называется (*контактным*) *вектором Ли*.

На $lcQS$ -многообразии верно следующее соотношение:

$$\nabla_X \xi = -C\Phi X + \eta(\alpha^\#)X - \eta(X)\alpha^\#. \quad (2.1)$$

Здесь $X \rightarrow C(X) = \nabla_{\Phi X} \xi - \alpha(\xi)\Phi X$ – внутренним образом определенный эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, аннулирующий характеристический вектор ξ и перестановочный со структурным эндоморфизмом Φ (см. [6]).

Предположим, что характеристический вектор ξ является торсообразующим векторным полем. Тогда должно выполняться равенство $\nabla_X \xi = \rho X + a(X)\xi$. Значит,

$$-C\Phi(X) + \eta(\alpha^\#)X - \eta(X)\alpha^\# = \rho X + a(X)\xi. \quad (2.2)$$

На первом и втором фундаментальных распределениях равенство (2.2) примет вид соответственно

$$\begin{aligned} -C\Phi X_{\mathfrak{L}} + \eta(\alpha^\#)X_{\mathfrak{L}} &= \rho X_{\mathfrak{L}}, \\ \eta(\alpha^\#)X_{\mathfrak{M}} - \eta(X)\alpha^\# &= \rho X_{\mathfrak{M}} + a(X)\xi. \end{aligned}$$

Рассмотрим каждое из этих равенств отдельно. Имеем

$$\begin{aligned} -C\Phi X_{\mathfrak{L}} + \eta(\alpha^{\#})X_{\mathfrak{L}} &= \rho X_{\mathfrak{L}}, \\ \rho \cdot \text{id} &= -C\Phi + \eta(\alpha^{\#})\text{id}, \\ (2n)\rho &= \eta(\alpha^{\#})(2n), \\ \rho &= \eta(\alpha^{\#}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \eta(\alpha^{\#})X_{\mathfrak{M}} - \eta(X)\alpha^{\#} &= \rho X_{\mathfrak{M}} + a(X)\xi, \\ \eta(\alpha^{\#})\eta(X)\xi - \eta(X)\eta(\alpha^{\#})\xi &= \rho\eta(X)\xi + a(X)\xi, \\ a(X) &= -\rho\eta(X), \\ a(X) &= -\eta(\alpha^{\#})\eta(X). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, если на нормальном $lcQS$ -многообразии характеристический вектор ξ является торсообразующим векторным полем, то его определяющие элементы – скалярное и ковекторное поля ρ и a – определяются единственным образом следующими соотношениями:

$$\rho = \eta(\alpha^{\#}), \quad a(X) = -\eta(\alpha^{\#})\eta(X).$$

Покажем, что характеристический вектор ξ будет торсообразующим векторным полем, только если нормальная $lcQS$ -структура будет локально конформно косимплектической.

Пусть нормальная $lcQS$ -структура локально конформно косимплектична. Тогда согласно [6] $C = 0$. Кроме того, поскольку рассматриваемая структура нормальна, то согласно [6] $\alpha^{\#} \in \mathfrak{M}$, а значит,

$$\alpha^{\#} = \langle \alpha^{\#}, \xi \rangle \xi = \eta(\alpha^{\#})\xi.$$

С учетом этих соотношений тождество (2.1) запишется в виде

$$\nabla_X \xi = pX + a(X)\xi,$$

где $p = \eta(\alpha^{\#})$, $a(X) = -\eta(\alpha^{\#})\eta(X)$. Таким образом, ξ – торсообразующее векторное поле.

Обратно, пусть ξ – торсообразующее векторное поле на нормальном $lcQS$ -многообразии. Тогда

$$\nabla_X \xi = pX + a(X)\xi,$$

где с учетом (2.3) и (2.4)

$$p = \eta(\alpha^{\#}), \quad a(X) = -\eta(\alpha^{\#})\eta(X).$$

Подставляя эти соотношения в (2.2), получим

$$\Phi \circ C = C \circ \Phi = 0.$$

В частности, $\text{im } C \subset \ker \Phi = \mathfrak{M}$, а значит, $\text{im } C \subset \mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} = \{0\}$, т.е. $C = 0$, а значит, рассматриваемая структура локально конформно косимплектична [6]. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Характеристический вектор нормального $lcQS$ -многообразия является торсообразующим векторным полем тогда и только тогда, когда это многообразие локально конформно косимплектично. Его определяющие элементы – скалярное и ковекторное поля ρ и a – определяются единственным образом следующими соотношениями:*

$$\rho = \eta(\alpha^\#), \quad a(X) = -\eta(\alpha^\#)\eta(X). \quad (2.5)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Характеристический вектор нормального $lcQS$ -многообразия является рекуррентным векторным полем тогда и только тогда, когда это многообразие локально конформно косимплектично, а контактный вектор ξ параллелен в римановой связности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения рекуррентного векторного поля следует, что в этом случае $\rho = 0$. С учетом (2.5) получаем, что $\eta(\alpha^*) = 0$, а значит, $a = 0$, следовательно, $\nabla\xi = 0$. Обратное очевидно.

Из работы [6] известно, что для нормальной $lcQS$ -структуры $\alpha^\# \in \mathfrak{M}$ и контактная форма Ли определена следующим образом: $\alpha = \alpha(\xi)\eta$. Отсюда и из (2.4) следует, что определяющий ковектор a вычисляется по формуле $a(X) = -\alpha(X)$. Действительно, $\eta(\alpha^\#) = \langle \xi, \alpha^\# \rangle = \alpha(\xi)$. И так как контактная форма Ли α $lcQS$ -многообразия, будучи локально точной, замкнута [6] (а именно, $\forall p \in M \exists U = U_p \subset M \ \& \ \alpha|_U = d\sigma$, где σ – определяющая функция $lcQS$ -структуры, определенная в U), получаем, что локально на многообразии M справедливо соотношение

$$\nabla_X \xi = \rho X - d\sigma(X)\xi, \quad X \in \mathfrak{X}(U). \quad (2.6)$$

Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Торсообразующее векторное поле ξ нормальной $lcQS$ -структуры является конциркулярным векторным полем с определяющими элементами*

$$\rho = \eta(\alpha^\#) \quad \text{и} \quad a = -d\sigma.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Характеристический вектор нормального $lcQS$ -многообразия является конциркулярным векторным полем тогда и только тогда, когда это многообразие локально конформно косимплектично. Его определяющие элементы определяются единственным образом следующими соотношениями:*

$$\rho = \eta(\alpha^\#), \quad a = -d\sigma = -\alpha.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Характеристический вектор ξ многообразия Кенмоцу является конциркулярным векторным полем с определяющими элементами:*

$$\rho = 1, \quad a = -\eta.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Характеристический вектор ξ квази-сасакиева многообразия M является конциркулярным векторным полем тогда и только тогда, когда M – косимплектическое многообразие. Более того, в этом случае $\nabla_X(\xi) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вектор ξ квази-сасакиева многообразия конциркулярен, то ввиду очевидного равенства нулю его контактной формы Ли определяющие элементы вектора ξ равны нулю, а значит, $\nabla_X(\xi) = 0$. Кроме того, по доказанному (с учетом того, что $\alpha = 0$) многообразие является косимплектическим. Обратное очевидно: если многообразие является косимплектическим, то, в частности, $\nabla_X(\xi) = 0$, а ξ – конциркулярный вектор.

Пусть M – нормальное $lcQS$ -многообразие, характеристический вектор ξ которого конциркулярен. Согласно (2.6)

$$\nabla_X(\eta)Y = \rho\langle X, Y \rangle - \alpha(X)\eta(Y) = \rho\langle X, Y \rangle - \alpha(\xi)\eta(X)\eta(Y),$$

откуда следует, что $\nabla_X(\eta)Y = \nabla_Y(\eta)X$, а значит, $d\eta = 0$. Тем самым, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если характеристический вектор нормального $lcQS$ -многообразия конциркулярен, то контактная форма этого многообразия замкнута.

Обратно, локально конформно косимплектическая AC -структура с замкнутой контактной формой нормальна [6]. Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть M – $lcQS$ -многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $lcQS$ -структура нормальна и ее характеристический вектор конциркулярен;
- 2) $lcQS$ -структура локально конформно косимплектична и имеет замкнутую контактную форму.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Характеристический вектор ξ многообразия Сасаки не является конциркулярным векторным полем, так как многообразие Сасаки является контактным метрическим многообразием, а значит, его контактная форма незамкнута.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. S. Chern, “Pseudo-groupes continus infinis”, *Géométrie Différentielle, Colloq. Internat. CNRS*, **52**, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953, 119–136.
- [2] J. W. Gray, *Contact structures*, Abst. Short Communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Univ. Edinburgh, Edinburgh, 1958.
- [3] J. W. Gray, “Some global properties of contact structures”, *Ann. of Math.* (2), **69**:2 (1959), 421–450.
- [4] S. Sasaki, “On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. I”, *Tôhoku Math. J.* (2), **12**:3 (1960), 459–476; S. Sasaki, Y. Hatakeyama, “On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II”, *Tôhoku Math. J.* (2), **13**:2 (1961), 281–294.
- [5] Z. Olszak, “Locally conformal almost cosymplectic manifolds”, *Colloq. Math.*, **57**:1 (1989), 73–87.
- [6] В. Ф. Кириченко, Н. С. Баклашова, “Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 347–360.
- [7] В. Ф. Кириченко, Е. А. Полькина, “Геодезическая жесткость некоторых классов почти контактных метрических многообразий”, *Изв. вузов. Матем.*, 2007, №9, 42–49.
- [8] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progr. Math., **203**, Birkhäuser Boston, Boston, 2002.
- [9] В. Ф. Кириченко, “О геометрии многообразий Кенмоцу”, *ДАН*, **380**:5 (2001), 585–587.

- [10] В. Ф. Кириченко, “Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **6**:4 (2000), 1095–1120.
- [11] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, МПГУ, М., 2003.
- [12] D. E. Blair, *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*, Lecture Notes in Math., **509**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [13] А. В. Аминова, *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий*, Янус-К, М., 2003.

В. Ф. Кириченко

Московский педагогический государственный университет

Поступило

10.02.2011

М. А. Терпстра

Московский педагогический государственный университет

E-mail: maria_terpstra@mail.ru