Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. И. Абдурагимов, Единственность положительного радиально-симметричного решения задачи Дирихле для одной нелинейной эллиптической системы второго порядка, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:53:38

Единственность положительного радиально-симметричного решения задачи Дирихле для одной нелинейной эллиптической системы второго порядка

Э. И. Абдурагимов

Доказано существование и единственность положительного радиально-симметричного решения задачи Дирихле для одной нелинейной эллиптической системы второго порядка. Указан также численный метод построения этого решения.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm9194

1. Введение. Рассмотрим в шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ ($n \geq 2$) задачу Дирихле

$$\Delta u_1 + |x|^{m_2} |u_2|^{q_2} = 0, \quad x \in S, \quad (1.1)$$

$$\Delta u_2 + |x|^{m_1} |u_1|^{q_1} = 0, \quad x \in S, \quad (1.2)$$

$$u_i|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.3)$$

где Γ – граница области S , $m_i \geq 0$, $q_i > 1$, $i = 1, 2$, – константы.

Очевидно, $u = (u_1, u_2) \equiv 0$ – тривиальное решение этой задачи. Под *положительным решением* задачи (1.1)–(1.3) понимается функция $u = (u_1, u_2)$ такая, что $u_i \in C^2(\bar{S})$, $i = 1, 2$, удовлетворяет уравнениям (1.1), (1.2), граничным условиям (1.3) и положительна в S .

Имеется много работ отечественных и зарубежных математиков, посвященных существованию и отсутствию положительных решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений и систем (см. [1]–[11] и цитированную в них литературу). Работ же, посвященных единственности положительного решения и построению таких решений численными методами, сравнительно мало.

Цель данной работы – показать существование и единственность положительного радиально-симметричного решения (ПР-СР) задачи (1.1)–(1.3) и указать численный метод его построения. Ранее единственность ПР-СР в шаре S была доказана в работах автора в случае одного уравнения

$$\Delta u + |x|^m |u|^q = 0$$

с $m \geq 0$ для значений $1 < q \leq (n+m)/(n-2)$ при $n \geq 3$ в [10], для произвольных значений $q > 1$ при $n = 2$ в [11]. Здесь указанные результаты обобщаются на систему (1.1), (1.2).

Получены достаточные условия: $q_i \leq (n+m_i)/(n-2)$ при $n \geq 3$ и $q_i = \infty$ при $n = 2$, $i = 1, 2$, существования единственного ПР-СР задачи (1.1)–(1.3) и указан численный метод его построения. Методом пробных функций [1] можно показать, что эти же условия гарантируют также отсутствие глобального нетривиального решения системы неравенств

$$-\Delta u_1 \geq |x|^{m_2} |u_2|^{q_2} \geq 0, \quad (1.4)$$

$$-\Delta u_2 \geq |x|^{m_1} |u_1|^{q_1} \geq 0. \quad (1.5)$$

То есть существование единственного ПР-СР задачи (1.1)–(1.3) и отсутствие глобального нетривиального решения системы неравенств (1.4), (1.5) обеспечивают одни и те же условия. Сходный факт заметил и Зоу, который в [6] показал, что для уравнения Лэйна–Эмдена $\Delta u + u^q = 0$ существование положительного решения в ограниченной гладкой области Ω равносильно отсутствию глобального положительного решения этого уравнения.

2. Существование и единственность ПР-СР при $n \geq 3$. Если существует радиально-симметричное решение $u = u(r)$ задачи (1.1), (1.2), то оно удовлетворяет системе

$$u_1'' + \frac{n-1}{r} u_1' + r^{m_2} |u_2|^{q_2} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (2.1)$$

$$u_2'' + \frac{n-1}{r} u_2' + r^{m_1} |u_1|^{q_1} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (2.2)$$

где $r = |x|$, и граничным условиям

$$u_i'(0) = 0, \quad u_i(1) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

С помощью линейного преобразования Ц. На [12]:

$$r = A^{\alpha} \bar{r}, \quad u_i = A^{\beta_i} \bar{u}_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.4)$$

где α, β_1, β_2 – некоторые константы, A – положительный параметр преобразования, систему (2.1), (2.2) можно записать в виде

$$A^{\beta_1-2\alpha} \left(\bar{u}_1'' + \frac{n-1}{\bar{r}} \bar{u}_1' \right) + A^{\alpha m_2 + \beta_2 q_2} \bar{r}^{m_2} |\bar{u}_2|^{q_2} = 0,$$

$$A^{\beta_2-2\alpha} \left(\bar{u}_2'' + \frac{n-1}{\bar{r}} \bar{u}_2' \right) + A^{\alpha m_1 + \beta_1 q_1} \bar{r}^{m_1} |\bar{u}_1|^{q_1} = 0.$$

Выберем α и β_i , $i = 1, 2$, так, чтобы эти уравнения не зависели от параметра A . Достаточно положить

$$\beta_1 - 2\alpha = \alpha m_2 + \beta_2 q_2, \quad (2.5)$$

$$\beta_2 - 2\alpha = \alpha m_1 + \beta_1 q_1. \quad (2.6)$$

Тогда u_i , $i = 1, 2$, будут удовлетворять уравнениям

$$\bar{u}_1'' + \frac{n-1}{\bar{r}} \bar{u}_1' + \bar{r}^{m_2} |\bar{u}_2|^{q_2} = 0, \quad (2.7)$$

$$\bar{u}_2'' + \frac{n-1}{\bar{r}} \bar{u}_2' + \bar{r}^{m_1} |\bar{u}_1|^{q_1} = 0. \quad (2.8)$$

Недостающие начальные условия для положительного решения краевой задачи (1.1)–(1.3) положим равными

$$u_1(0) = A, \quad u_2(0) = B, \quad (2.9)$$

где A и B – положительные числовые параметры. В новых координатах $(\bar{r}, \bar{u})$ (см. (2.4)) эти условия запишутся в виде

$$\begin{cases} A^{\beta_1} \bar{u}_1(0) = A, \\ A^{\beta_2} \bar{u}_2(0) = B. \end{cases} \quad (2.10)$$

Положим

$$\beta_1 = 1. \quad (2.11)$$

Тогда из (2.10) следует

$$\bar{u}_1(0) = 1, \quad \bar{u}_2(0) = \lambda,$$

где $\lambda = A^{-\beta_2} B$. Из (2.5), (2.6) и (2.11) имеем

$$\beta_2 = q_1 - \frac{(q_1 q_2 - 1)(m_1 + 2)}{m_2 + 2 + q_2(m_1 + 2)}, \quad (2.12)$$

$$\alpha = -\frac{q_1 q_2 - 1}{m_2 + 2 + q_2(m_1 + 2)}. \quad (2.13)$$

Таким образом, $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ является решением задачи Коши для уравнений (2.7), (2.8) с начальными условиями

$$\bar{u}_1(0) = 1, \quad \bar{u}_2(0) = \lambda, \quad (2.14)$$

$$\bar{u}_1'(0) = \bar{u}_2'(0) = 0. \quad (2.15)$$

ЛЕММА 1. *Если выполняются неравенства*

$$1 < q_i \leq \frac{n + m_i}{n - 2}, \quad i = 1, 2, \quad (2.16)$$

то при любом $\lambda > 0$ существуют единственные положительные числа $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ такие, что задача Коши (2.7), (2.8), (2.14), (2.15) имеет единственное решение $\bar{u}_i \in C^2[0, \bar{r}_i]$, $i = 1, 2$, причем, $\bar{u}_i(\bar{r}_i) = 0$, $u_i(\bar{r}) > 0$, $i = 1, 2$, при $\bar{r} \in [0, \bar{r}_i]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнения (2.7), (2.8) на $\bar{r}^{n-1}$ и интегрируя полученные равенства от 0 до $\bar{r}$ с учетом начальных условий (2.15), получаем

$$\bar{u}_1'(\bar{r}) = -\frac{1}{\bar{r}^{n-1}} \int_0^{\bar{r}} s^{m_2+n-1} |\bar{u}_2(s)|^{q_2} ds < 0, \quad (2.17)$$

$$\bar{u}_2'(\bar{r}) = -\frac{1}{\bar{r}^{n-1}} \int_0^{\bar{r}} s^{m_1+n-1} |\bar{u}_1(s)|^{q_1} ds < 0. \quad (2.18)$$

Отсюда следует, что функции $\bar{u}_i(\bar{r})$, $i = 1, 2$, убывающие при $\bar{r} > 0$.

С помощью замены $t = \bar{r}^{2-n} > 0$ уравнения (2.7), (2.8) для $v_i(t) = \bar{u}_i(t^{1/(2-n)})$ можно записать в виде

$$v_1'' = -\frac{1}{(n-2)^2} t^{-(m_2+2n-2)/(n-2)} |v_2|^{q_2}, \quad (2.19)$$

$$v_2'' = -\frac{1}{(n-2)^2} t^{-(m_1+2n-2)/(n-2)} |v_1|^{q_1}. \quad (2.20)$$

При этом начальные условия (2.14), (2.15) перейдут в условия на бесконечности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v_2(t) = \lambda, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v_i'(t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.21)$$

Так как

$$v_i'(t) = -\frac{1}{n-2} \bar{u}_i'(\bar{r}) t^{-(n-1)/(n-2)} > 0$$

в силу (2.17), (2.18), то v_i – возрастающие функции при $t > 0$ и поэтому $v_1(t) \leq 1$, $v_2(t) \leq \lambda$.

Таким образом, $v_i(t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют уравнениям (2.19), (2.20) и начальным условиям (2.21).

Покажем, что $v_i(0) < 0$, $i = 1, 2$. Предположим противное, т.е. $v_i(0) \geq 0$, $i = 1, 2$. Дважды интегрируя уравнения (2.19), (2.20) от t до ∞ с учетом (2.21), получим

$$v_1(t) = 1 - \frac{1}{(n-2)^2} \int_t^\infty s^{-(m_2+2n-2)/(n-2)} (s-t) |v_2(s)|^{q_2} ds,$$

$$v_2(t) = \lambda - \frac{1}{(n-2)^2} \int_t^\infty s^{-(m_1+2n-2)/(n-2)} (s-t) |v_1(s)|^{q_1} ds.$$

Так как $v_i(0) \geq 0$ по предположению, отсюда имеем

$$1 \geq \frac{1}{(n-2)^2} \int_0^\infty s^{1-(m_2+2n-2)/(n-2)} |v_2(s)|^{q_2} ds, \quad (2.22)$$

$$\lambda \geq \frac{1}{(n-2)^2} \int_0^\infty s^{1-(m_1+2n-2)/(n-2)} |v_1(s)|^{q_1} ds. \quad (2.23)$$

Поскольку $v_1(t)$ и $v_2(t)$ – возрастающие функции от 0 до 1 и от 0 до λ соответственно, найдется точка $T > 0$ такая, что $v_1(T) \geq 1/2$, $v_2(T) \geq \lambda/2$. В силу (2.19), (2.20) $v_i'' \leq 0$, $i = 1, 2$. Следовательно, $v_i(t)$, $i = 1, 2$ – выпуклые вверх функции. Тогда легко проверить, что $v_i(t) \geq (v_i(T)/T)t$ при $t \in [0, T]$. Следовательно, $v_1(t) \geq t/(2T)$, $v_2(t) \geq (\lambda t)/(2T)$. Поэтому из (2.22) и (2.23) имеем

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{1}{(n-2)^2} \int_0^T s^{1-(m_2+2n-2)/(n-2)} |v_2(s)|^{q_2} ds \\ &\geq \frac{1}{(n-2)^2} \left(\frac{\lambda}{2T} \right)^{q_2} \int_0^T s^{q_2+1-(m_2+2n-2)/(n-2)} ds, \\ \lambda &\geq \frac{1}{(n-2)^2} \int_0^T s^{1-(m_1+2n-2)/(n-2)} |v_1(s)|^{q_1} ds \\ &\geq \frac{1}{(n-2)^2} \left(\frac{1}{2T} \right)^{q_1} \int_0^T s^{q_1+1-(m_1+2n-2)/(n-2)} ds. \end{aligned}$$

В силу (2.16) отсюда следует, что $1 \geq \infty$ и $\lambda \geq \infty$. Получено противоречие. Следовательно, $v_i(0) < 0$, $i = 1, 2$. Поэтому из возрастания и непрерывности $v_i(t)$, $i = 1, 2$, следует, что существует единственная точка $t_i > 0$ такая, что $v_i(t_i) = 0$, $v_i(t) > 0$ при $t \in (t_i, \infty]$, $i = 1, 2$.

Так как $v_i(t)$ – возрастающие функции, то $0 \leq v_1(t) \leq 1$, $0 \leq v_2(t) \leq \lambda$ при $t \in [t_i, \infty]$, $i = 1, 2$. А из уравнений (2.19), (2.20) следует, что v_i'' ограничены по модулю на $[t_i, \infty]$, $i = 1, 2$. Следовательно, $v_i \in C^2[t_i, \infty]$, $i = 1, 2$. Так как преобразование $\bar{r} = t^{2-n}$ однозначно отображает промежуток $[t_i, \infty]$ на $[0, \bar{r}_i]$ ($\bar{r}_i = t_i^{2-n}$), то $\bar{u}_i \in C^2[0, \bar{r}_i]$, $\bar{u}_i(\bar{r}_i) = 0$, $i = 1, 2$. Поскольку $v_i(t) > 0$ при $t \in (t_i, \infty]$, то $\bar{u}_i(\bar{r}) > 0$ при $\bar{r} \in [0, \bar{r}_i)$, $i = 1, 2$. Лемма доказана.

По лемме 1 каждому значению λ соответствуют единственные значения $\bar{r}_1(\lambda)$, $\bar{r}_2(\lambda)$ такие, что $\bar{u}_i(\bar{r}_i(\lambda)) = 0$, $i = 1, 2$. Таким образом, определены функции $\bar{r}_1(\lambda)$, $\bar{r}_2(\lambda)$.

ЛЕММА 2. *Функции $\bar{r}_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, непрерывны, $\bar{r}_1(\lambda)$ убывает, а $\bar{r}_2(\lambda)$ возрастает при $\lambda > 0$, причем*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{r}_1(\lambda) = \infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{r}_1(\lambda) = 0, \quad (2.24)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{r}_2(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{r}_2(\lambda) = \infty. \quad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем в уравнениях (2.7), (2.8) замену $\bar{u}_2 = \lambda \bar{U}_2$. Тогда эти уравнения примут вид

$$\bar{u}_1'' + \frac{n-1}{\bar{r}} \bar{u}_1' = -\bar{r}^{m_2} \lambda^{q_2} |\bar{u}_2|^{q_2} = 0, \quad (2.26)$$

$$\bar{u}_2'' + \frac{n-1}{\bar{r}} \bar{U}_2' = -\frac{\bar{r}^{m_1}}{\lambda} |\bar{u}_1|^{q_1} = 0. \quad (2.27)$$

Из условия $\bar{u}_2(0) = \lambda$ следует

$$\bar{U}_2(0) = 1. \quad (2.28)$$

Умножая уравнения (2.26), (2.27) на $\bar{r}^{n-1}$ и интегрируя полученные равенства от 0 до $\bar{r}$ с учетом начальных условий (2.14), (2.15) и (2.28), получим

$$\bar{u}_1(\bar{r}) = 1 - \frac{\lambda^{q_2}}{n-2} \int_0^{\bar{r}} (s^{2-n} - \bar{r}^{2-n}) s^{m_2+n-1} |\bar{U}_2(s)|^{q_2} ds,$$

$$\bar{U}_2(\bar{r}) = 1 - \frac{1}{\lambda(n-2)} \int_0^{\bar{r}} (s^{2-n} - \bar{r}^{2-n}) s^{m_1+n-1} |\bar{u}_1(s)|^{q_1} ds.$$

Так как $\bar{u}_1(\bar{r}_1) = \bar{U}_2(\bar{r}_2) = 0$, отсюда имеем

$$\lambda^{-q_2} = \frac{1}{n-2} \int_0^{\bar{r}_1} (s^{2-n} - \bar{r}_1^{2-n}) s^{m_2+n-1} |\bar{U}_2(s)|^{q_2} ds, \quad (2.29)$$

$$\lambda = \frac{1}{(n-2)} \int_0^{\bar{r}_2} (s^{2-n} - \bar{r}_2^{2-n}) s^{m_1+n-1} |\bar{u}_1(s)|^{q_1} ds. \quad (2.30)$$

Дифференцируя эти равенства по λ , получим

$$-q_2 \lambda^{-q_2-1} = \bar{r}_1^{1-n} \frac{d\bar{r}_1}{d\lambda} \int_0^{\bar{r}_1} s^{m_2+n-1} |\bar{U}_2(s)|^{q_2} ds > 0,$$

$$1 = \bar{r}_2^{1-n} \frac{d\bar{r}_2}{d\lambda} \int_0^{\bar{r}_2} s^{m_1+n-1} |\bar{u}_1(s)|^{q_1} ds > 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{d\bar{r}_1}{d\lambda} = - \frac{\bar{r}_1^{n-1}}{q_2 \lambda^{q_2+1} \int_0^{\bar{r}_1} s^{m_2+n-1} |\bar{U}_2(s)|^{q_2} ds} < 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{d\bar{r}_2}{d\lambda} = \frac{\bar{r}_2^{1-n}}{\int_0^{\bar{r}_2} s^{m_1+n-1} |\bar{u}_1(s)|^{q_1} ds} > 0. \quad (2.32)$$

Следовательно, $\bar{r}_1$ убывает, а $\bar{r}_2$ возрастает по λ . Из (2.31), (2.32) следует, что $d\bar{r}_1/d\lambda$ и $d\bar{r}_2/d\lambda$ непрерывные по $\lambda > 0$ функции. Следовательно, $\bar{r}_1(\lambda)$ и $\bar{r}_2(\lambda)$ – также непрерывные по $\lambda > 0$ функции.

Поскольку $\bar{u}_i$, $i = 1, 2$, – убывающие функции, то $0 \leq \bar{u}_1(\bar{r}) \leq 1$ при $r \in [0, \bar{r}_1]$ и $0 \leq \bar{U}_2(\bar{r}) \leq 1$ при $r \in [0, \bar{r}_2]$ в силу (2.14) и леммы 1. Поэтому из (2.29) и (2.30) имеем, соответственно,

$$r_1^{m_2+2} \geq \frac{(m_2+2)(m_2+n)}{\lambda^{q_2}}, \quad (2.33)$$

$$r_2^{m_1+2} \geq \lambda(m_1+2)(m_1+n). \quad (2.34)$$

Из (2.33) следует

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\bar{r}_1) = \infty.$$

Из (2.34) следует

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\bar{r}_2) = \infty.$$

Так как правая часть равенства (2.29) больше 0 при $\bar{r}_1 > 0$, переходя в этом неравенстве к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{r}_1(\lambda) = 0.$$

Правая часть равенства (2.30) также больше 0. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{r}_2(\lambda) = 0.$$

Равенства (2.24), (2.25) выполняются. Лемма доказана.

Так как по лемме 1 функция $\bar{r}_1(\lambda)$ непрерывна и убывает от $+\infty$ до 0, а функция $\bar{r}_2(\lambda)$ непрерывна и возрастает от 0 до $+\infty$ при возрастании λ от 0 до $+\infty$, существует единственное значение λ_0 такое, что $\bar{r}_1(\lambda_0) = \bar{r}_2(\lambda_0) = r_0$, т.е. уравнение $\bar{r}_1(\lambda) = \bar{r}_2(\lambda)$ имеет единственное положительное решение $\lambda = \lambda_0$. Следовательно, справедлива

ЛЕММА 3. *Существует единственное значение $\lambda_0 > 0$, которому соответствует единственное значение $\bar{r}_0 > 0$ такое, что задача Коши (2.7), (2.8), (2.14), (2.15) имеет единственное решение $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ такое, что $\bar{u}_1(\bar{r}_0) = \bar{u}_2(\bar{r}_0) = 0$ и $\bar{u}_i(\bar{r}) > 0$ при $\bar{r} \in [0, \bar{r}_0)$, $i = 1, 2$.*

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Если выполняются условия (2.16), то задача Дирихле (1.1)–(1.3) имеет единственное ПР-СР.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 1 существует единственное значение $\lambda > 0$, которому соответствует единственное значение $\bar{r}_0 > 0$ такое, что задача Коши (2.7), (2.8), (2.14), (2.15) имеет единственное положительное решение $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in C^2[0, \bar{r}_0]$ такое, что $\bar{u}_1(\bar{r}_0) = \bar{u}_2(\bar{r}_0) = 0$ и $\bar{u}_i(\bar{r}) > 0$ при $\bar{r} \in [0, \bar{r}_0)$. Выберем параметр преобразования A в (2.4) так, чтобы значению $\bar{r} = \bar{r}_0$ соответствовало значение $r = 1$, т.е. из равенства

$$A^\alpha \bar{r}_0 = 1, \quad (2.35)$$

тогда в силу (2.4) $u_1(1) = u_2(1) = 0$. Из (2.35) A определяется единственным образом:

$$A = (\bar{r}_0)^{-1/\alpha},$$

где α определено равенством (2.13). Тогда в силу (2.4)

$$B = A^{\beta_2} \bar{u}_2(0) = A^{\beta_2} \lambda_0$$

также определяется единственным образом. Таким образом, решение краевой задачи (2.1)–(2.3) единственно, так как оно совпадает с единственным решением $u = (u_1, u_2) \in C^2[0, 1]$ задачи Коши для системы (2.1), (2.2) с начальными условиями $u_1(0) = A$, $u_2(0) = B$, $u'_1(0) = u'_2(0) = 0$. Следовательно, задача Дирихле (1.1)–(1.3) имеет единственное ПР-СР. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что если $m_1 = m_2 = m$, $q_1 = q_2 = q$, то по этой теореме при выполнении условия $1 < q \leq (n + m)/(n - 2)$ задача (1.1)–(1.3) имеет единственное ПР-СР, которое, очевидно, совпадает с единственным ПР-СР для одного уравнения $\Delta u + |x|^m |u|^q = 0$ (см. [10]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку заменой $x = Rt$ шар произвольного радиуса R : $S_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$ переводится в шар радиуса 1: $S_1 = \{t \in \mathbb{R}^n : |t| \leq 1\}$, то теорема 1 справедлива также для шара S_R произвольного радиуса $R > 0$.

На основании рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 1, можно указать алгоритм построения единственного ПР-СР задачи (1.1)–(1.3). Приведем схему алгоритма

Пусть m_i , q_i , $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям (2.16).

1) Берем произвольное значение $\lambda > 0$ и решаем задачу Коши (2.7), (2.8), (2.14), (2.15) каким-либо численным методом (например, методом Рунге–Кутты), начиная с $\bar{r} = 0$ до тех пор, пока в силу леммы 1 не найдем точки $\bar{r}_1(\lambda)$, $\bar{r}_2(\lambda)$ такие, что $\bar{u}_1(\bar{r}_1(\lambda)) = \bar{u}_2(\bar{r}_2(\lambda)) = 0$. Если при этом окажется $\bar{r}_1(\lambda) < \bar{r}_2(\lambda)$, то уменьшим λ на малую величину и снова решим задачу Коши (2.7), (2.8), (2.14), (2.15), начиная с $\bar{r} = 0$ до тех пор, пока в силу леммы 1 не найдем точки $\bar{r}_1(\lambda)$, $\bar{r}_2(\lambda)$ такие, что $\bar{u}_1(\bar{r}_1(\lambda)) = \bar{u}_2(\bar{r}_2(\lambda)) = 0$. При этом по лемме 2 $\bar{r}_1(\lambda)$ увеличится, а $\bar{r}_2(\lambda)$ уменьшится. Если окажется, что $\bar{r}_1(\lambda) = \bar{r}_2(\lambda)$, то вычисления прекращаем и переходим к пункту 2.

Если же окажется, что $\bar{r}_1(\lambda) > \bar{r}_2(\lambda)$, то увеличим λ и снова решаем задачу Коши (2.7), (2.8), (2.14), (2.15), начиная с $\bar{r} = 0$ до тех пор, пока в силу леммы 1 не найдем точки $\bar{r}_1(\lambda)$, $\bar{r}_2(\lambda)$ такие, что $\bar{u}_1(\bar{r}_1(\lambda)) = \bar{u}_2(\bar{r}_2(\lambda)) = 0$. При этом по лемме 2 $\bar{r}_1(\lambda)$ уменьшится, а $\bar{r}_2(\lambda)$ увеличится. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не окажется $\bar{r}_1(\lambda) = \bar{r}_2(\lambda)$. Обозначим через λ_0 значение λ , при котором $\bar{r}_1(\lambda) = \bar{r}_2(\lambda)$ и $\bar{r}_0 = \bar{r}_1(\lambda_0) = \bar{r}_2(\lambda_0)$.

2) Вычисляем α и β_2 по формулам (2.13) и (2.12), затем вычисляем $A = (\bar{r}_0)^{-1/\alpha} = \bar{u}_1(0)$ и $B = A^{\beta_2} \lambda_0 = \bar{u}_2(0)$.

3) Решаем задачу Коши для системы (2.1), (2.2) с начальными условиями $u_1(0) = A$, $u_2(0) = B$, $u'_1(0) = u'_2(0) = 0$, начиная с $r = 0$ до $r = 1$. Полученное решение и есть то ПР-СР задачи (1.1)–(1.3), существование и единственность которого доказано в теореме 1.

3. Существование и единственность ПР-СР при $n = 2$. В этом случае радиально-симметричное решение задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет системе

$$u''_1 + \frac{1}{r} u'_1 + r^{m_2} |u_2|^{q_2} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (3.1)$$

$$u''_2 + \frac{1}{r} u'_2 + r^{m_1} |u_1|^{q_1} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (3.2)$$

и граничным условиям

$$u'_i(0) = 0, \quad u_i(1) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Как и в п. 1, с помощью преобразования (2.4) система (3.1), (3.2) приводится к виду

$$\bar{u}''_1 + \frac{1}{\bar{r}} \bar{u}'_1 + \bar{r}^{m_2} |\bar{u}_2|^{q_2} = 0, \quad (3.4)$$

$$\bar{u}''_2 + \frac{1}{\bar{r}} \bar{u}'_2 + \bar{r}^{m_1} |\bar{u}_1|^{q_1} = 0. \quad (3.5)$$

Далее, рассуждая так же, как и в п. 1, приходим к начальным условиям для $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$

$$\bar{u}_1(0) = 1, \quad \bar{u}_2(0) = \lambda, \quad (3.6)$$

$$\bar{u}'_1(0) = \bar{u}'_2(0) = 0. \quad (3.7)$$

При этом константы β_1 , β_2 , α определяются по формулам (2.11)–(2.13).

Таким образом, $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ является решением задачи (3.4)–(3.7), где λ – положительное число.

ЛЕММА 4. Для произвольного положительного числа λ существуют единственные положительные числа $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ такие, что задача Коши (3.4)–(3.7) имеет единственное положительное решение $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, $\bar{u}_i \in C^2[0, \bar{r}_i]$, $\bar{u}_i(\bar{r}_i) = 0$, $\bar{u}_i(\bar{r}) > 0$ при $\bar{r} \in [0, \bar{r}_i]$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения (3.4), (3.5) с помощью замены $\bar{r} = e^{-t}$ приводятся к виду

$$v''_1 = -e^{-(m_2+2)t} |v_2|^{q_2}, \quad (3.8)$$

$$v''_2 = -e^{-(m_1+2)t} |v_1|^{q_1}, \quad (3.9)$$

где $v_i(t) = \bar{u}_i(e^{-t})$, $i = 1, 2$. При этом начальные условия (3.6), (3.7) перейдут в условия на ∞ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v_2(t) = \lambda, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v'_i(t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.10)$$

Из (3.8), (3.9) следует, что v_1, v_2 – выпуклые вверх функции. Интегрируя эти уравнения от t до ∞ с учетом (3.10), получим

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= \int_t^\infty e^{-(m_2+2)s} |v_2(s)|^{q_2} ds > 0, \\ v_2'(t) &= \int_t^\infty e^{-(m_1+2)s} |v_1(s)|^{q_1} ds > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $v_1(t), v_2(t)$ – выпуклые вверх возрастающие функции. Поэтому найдутся единственные точки $t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty)$ такие, что $v_i(t_i) = 0$, $i = 1, 2$. Так как $v_i(t)$ возрастающие функции, то в силу (3.10) $0 \leq v_1(t) \leq 1$ и $0 \leq v_2(t) \leq \lambda$ при $t \in [t_i, \infty]$, $i = 1, 2$. Тогда из (3.8), (3.9) следует, что $v_i \in C^2[t_i, \infty]$. Так как значению $t = t_i$ соответствует значение $\bar{r} = \bar{r}_i = e^{-t_i}$, а значению $t = \infty$ соответствует значение $\bar{r} = 0$, то $\bar{u}_i \in C^2[0, \bar{r}_i]$, причем $\bar{u}_i(\bar{r}_i) = 0$, $i = 1, 2$, и $\bar{u}_i(\bar{r}) > 0$ при $\bar{r} \in [0, \bar{r}_i]$. Лемма доказана.

По этой лемме каждому значению λ соответствуют единственные значения $\bar{r}_1(\lambda)$ и $\bar{r}_2(\lambda)$ такие, что $\bar{u}_1(\bar{r}_1(\lambda)) = \bar{u}_2(\bar{r}_2(\lambda)) = 0$. Таким образом, определены функции $\bar{r}_1(\lambda)$ и $\bar{r}_2(\lambda)$.

ЛЕММА 5. *Функции $\bar{r}_i(\lambda)$ непрерывны при $\lambda > 0$, при этом $\bar{r}_1(\lambda)$ убывает, а $\bar{r}_2(\lambda)$ возрастает и*

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{r}_1(\lambda) &= \infty, & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{r}_1(\lambda) &= 0, \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{r}_2(\lambda) &= 0, & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{r}_2(\lambda) &= \infty. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 2.

Из этой леммы следует, что существует единственное значение $\lambda = \lambda_0$ такое, что $\bar{r}_1(\lambda_0) = \bar{r}_2(\lambda_0) = \bar{r}_0$. Следовательно, справедлива

ЛЕММА 6. *Существует единственное значение $\lambda_0 > 0$ такое, что задача Коши (3.4)–(3.7) имеет единственное решение $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ такое, что*

$$\bar{u}_1(\bar{r}_1(\lambda_0)) = \bar{u}_2(\bar{r}_2(\lambda_0)) = 0$$

и $\bar{u}_i(\bar{r}) > 0$ при $\bar{r} \in [0, \bar{r}_0]$.

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Если $q_i > 1$, $i = 1, 2$, то задача Дирихле (1.1)–(1.3) имеет единственное ПР-СР.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что при $n = 2$ не потребовались никакие ограничения типа (2.6) на $q_i > 1$, $i = 1, 2$. Отметим еще, что в этом случае так же, как в случае $n \geq 3$ можно численным методом построить ПР-СР задачи Дирихле (1.1)–(1.3) по описанному для $n \geq 3$ алгоритму.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.
- [2] С. И. Похожаев, “Об одной задаче Л. В. Овсянникова”, *Ж. прикл. матем. и техн. физ.*, 1989, № 2, 5–10.
- [3] Е. И. Галахов, “Положительные решения квазилинейного эллиптического уравнения”, *Матем. заметки*, **78**:2 (2005), 202–211.
- [4] K.-S. Cheng, J.-T. Lin, “On the elliptic equations $\delta u = K(x)u^\alpha$ and $\delta u = K(x)e^{2u}$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **304**:2 (1987), 639–668.
- [5] B. Gidas, J. Spruck, “Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **34**:4 (1981), 525–598.
- [6] Х. Зоу, “Априорные оценки, существование и несуществование для кооперативных квазилинейных эллиптических систем”, *Матем. сб.*, **199**:4 (2008), 83–106.
- [7] E. N. Dancer, J. Shi, “Uniqueness and nonexistence of positive solutions to semipositone problems”, *Bull. London Math. Soc.*, **38**:6 (2006), 1033–1044.
- [8] N. Kawano, J. Satsuma, S. Yotsutani, “On the positive solutions of an Emden-type elliptic equation”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **61**:6 (1985), 186–189.
- [9] J. Jiang, “On radially symmetric solutions to singular nonlinear Dirichlet problems”, *Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl.*, **24**:2 (1995), 159–163.
- [10] Э. И. Абдурагимов, “О единственности положительного радиально-симметричного решения в шаре задачи Дирихле для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка”, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 12, 3–6.
- [11] Э. И. Абдурагимов, “О положительном радиально-симметричном решении задачи Дирихле для одного нелинейного уравнения и численном методе его получения”, *Изв. вузов. Матем.*, 1997, № 5, 3–6.
- [12] Ц. На, *Вычислительные методы решения прикладных граничных задач*, М., 1982.

Э. И. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет,
г. Махачкала

E-mail: abduragimov42@mail.ru

Поступило

12.07.2011

Исправленный вариант

28.07.2011