Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, Об эффективных алгоритмах деком-
плексификации матриц посредством унитарных подо-
бий и конгруэнций, *Матем. заметки*, 2012, том 92, вы-
пуск 6, 856–863

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 07:48:44

Об эффективных алгоритмах декомплексификации матриц посредством унитарных подобий и конгруэнций

Х. Д. Икрамов

Для заданной комплексной $(n \times n)$ -матрицы A требуется установить, может ли A быть овеществлена унитарным подобием или унитарной конгруэнцией. Предложены и обоснованы алгоритмы, решающие эти две задачи при дополнительном предположении о неприводимости матрицы A в первом случае и матрицы $A_L = \overline{A}A$ во втором. Неприводимость квадратной комплексной матрицы означает, что она никаким унитарным подобием не может быть переведена в прямую сумму матриц меньшего порядка. Предложенные алгоритмы эффективны в том смысле, что их реализация требует конечного числа арифметических операций.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Пусть $M_n(\mathbb{C})$ – множество комплексных $(n \times n)$ -матриц. Предположим, что для матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$ существует подобная ей вещественная матрица

$$B = Q^{-1}AQ. \quad (1)$$

В этом случае будем говорить, что A допускает *декомплексификацию посредством подобий*.

Необходимое и достаточное условие для возможности овеществить A состоит в том, что A должна иметь те же особенности спектра и жордановой структуры, какими обладают вещественные матрицы. Перечислим эти особенности:

- а) если невещественное число λ является собственным значением для A , то $\overline{\lambda}$ – также собственное значение, причем той же кратности;
- б) число и порядки жордановых клеток, относящихся к $\overline{\lambda}$, те же, что и для λ .

Наряду с подобиями мы будем рассматривать матричные преобразования еще одного типа, а именно псевдоподобия. Напомним, что *псевдоподобием* (consimilarity) называется преобразование вида

$$A \rightarrow B = \overline{Q}^{-1}AQ. \quad (2)$$

Как обычно, черта над символом матрицы обозначает поэлементное комплексное сопряжение. Если и здесь задаться вопросом о возможности овеществить A , то ответ значительно проще, чем для стандартных подобий: всякая матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ псевдоподобна некоторой вещественной матрице (см. [1; § 4.6]).

Сузим теперь класс допустимых преобразований, рассматривая в (1) и (2) вместо произвольных невырожденных матриц Q лишь унитарные матрицы. Тогда (1) превращается в описание унитарного подобия

$$B = Q^* A Q, \quad (3)$$

а (2) – в преобразование

$$A \rightarrow B = Q^T A Q, \quad (4)$$

которое вместо унитарного псевдоподобия будем называть *унитарной конгруэнцией*. И в том, и в другом случае нас будет интересовать вопрос: как распознать матрицы A , допускающие декомплексификацию.

С принципиальной точки зрения этот вопрос решен в работах автора (см. [2], [3]).

ТЕОРЕМА 1. *Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда может быть ове-
ществлена унитарным подобием, когда A и $\bar{A}$ унитарно подобны и подобие между
ними можно осуществить посредством матрицы Q , одновременно унитарной и
симметричной.*

Аналогичное утверждение справедливо для унитарных конгруэнций.

ТЕОРЕМА 2. *Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда может быть ове-
ществлена унитарной конгруэнцией, когда A и $\bar{A}$ унитарно конгруэнтны и конгру-
энцию между ними можно осуществить посредством матрицы Q , одновременно
унитарной и симметричной.*

К сожалению, теоремы 1 и 2 непригодны в качестве практических критериев. Возьмем, к примеру, теорему 1. Присутствующее в ней условие унитарного подобия матриц A и $\bar{A}$ можно проверить с помощью классической теоремы Шпехта (см. [1; теорема 2.2.6]):

ТЕОРЕМА 3 (ШПЕХТ). *Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ унитарно подобны тогда и толь-
ко тогда, когда*

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*) \quad (5)$$

для любого слова $W(s, t)$ от двух некоммутирующих переменных s и t .

Согласно уточнению этого критерия, найденному Пирси [4], равенства (5) доста-точно проверить для слов степени не больше $2n^2$. При этом *степенью* слова

$$W(s, t) = s^{m_1} t^{n_1} s^{m_2} t^{n_2} \dots s^{m_k} t^{n_k}$$

называется число

$$m_1 + n_1 + \dots + m_k + n_k.$$

Однако, даже убедившись в унитарном подобии матриц A и $\bar{A}$, мы не сможем проверить второе условие теоремы 1. Дело в том, что критерий Шпехта–Пирси не дает никакой информации об унитарной матрице Q , осуществляющей это подобие.

Те же недостатки присущи теореме 2. Наличие или отсутствие унитарной конгруэнции, связывающей A и $\bar{A}$, можно установить с помощью критерия типа Шпехта–Пирси, предложенного для проверки унитарной конгруэнтности в [5]. Но и этот критерий ничего не говорит о трансформирующей матрице Q .

Цель настоящей публикации – дать конструктивные ответы на вопрос о возможности овеществления при дополнительном предположении о неприводимости матрицы A или (в случае унитарных конгруэнций) матрицы

$$A_L = \overline{A}A. \quad (6)$$

Мы называем матрицу $A \in M_n(\mathbb{C})$ *неприводимой*, если не существует унитарного подобия, которое превращало бы A в прямую сумму матриц меньшего порядка. Конструктивный способ проверки неприводимости указан в [6].

Вопрос о декомплексификации посредством унитарных подобий разбирается в п. 2, заканчивающемся формулированием эффективного алгоритма, отвечающего на этот вопрос. Аналогичный вопрос относительно унитарных конгруэнций решается в п. 3.

2. Декомплексификация посредством унитарных подобий. Пусть уже установлено, что матрицы A и $\overline{A}$ унитарно подобны (в противном случае согласно теореме 1 A не может быть овеществлена). Как сказано во введении, для проверки этого подобия можно использовать критерий Шпехта–Пирси. Однако мы выберем другой способ, основанный на следующем общем наблюдении (см. [7]).

ЛЕММА 1. *Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ унитарно подобны тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица $P \in M_n(\mathbb{C})$ такая, что*

$$B = P^{-1}AP, \quad B^* = P^{-1}A^*P. \quad (7)$$

Если матрица P существует, то унитарный сомножитель Q ее полярного разложения осуществляет унитарное подобие между A и B .

Как найти невырожденную матрицу P для соотношений (7) или убедиться в ее отсутствии?

Перепишем условия (7) в виде

$$PB = AP, \quad PB^* = A^*P. \quad (8)$$

Будем интерпретировать соотношения (8) как систему линейных однородных уравнений относительно элементов p_{ij} матрицы P . Наша задача состоит теперь в том, чтобы выяснить, допускает ли эта система решение

$$\{p_{ij}\}_{i,j=1}^n,$$

которому соответствует невырожденная матрица P .

Заметим прежде всего, что наличие нетривиальных решений у заданной однородной системы линейных уравнений и в случае их наличия базис пространства решений (так называемую *фундаментальную систему*) можно определить посредством алгоритма, излагаемого в элементарных курсах линейной алгебры, а именно приведения матрицы системы к ступенчатому виду. Предположим теперь, что для уравнений (8) некоторая система фундаментальных решений уже найдена, и пусть этим решениям соответствуют матрицы $P_1, \dots, P_k$. Тогда любую матрицу, удовлетворяющую (8), можно представить в виде линейной комбинации

$$P = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_k P_k. \quad (9)$$

Положим

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \det(\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_k P_k). \quad (10)$$

Если этот определитель не обращается в нуль тождественно, то f есть многочлен от $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ степени не выше n по каждой переменной. (Полная степень f также не превышает n .)

Проверить, будет ли f отличен от тождественного нуля, можно следующим способом (см. [7]).

ЛЕММА 2. Пусть G^k – решетка в $\mathbb{C}^k$ со сторонами, параллельными координатным осям, и с $n+1$ узлами в каждом направлении. Если f – ненулевой многочлен от переменных $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ степени не выше n по каждой переменной, то в G^k найдется точка $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*)$ такая, что

$$f(\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*) \neq 0.$$

В применении к рассматриваемой задаче лемма 2 означает, что, выполняя конечное число арифметических операций, можно найти числа $\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*$, для которых

$$\det(\alpha_1^* P_1 + \dots + \alpha_k^* P_k) \neq 0,$$

или же убедиться в отсутствии таких чисел. Невырожденная матрица

$$P = \alpha_1^* P_1 + \dots + \alpha_k^* P_k \quad (11)$$

реализует одновременное подобие (7). Если же числа $\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*$ отсутствуют, то A и B не могут быть унитарно подобными.

В дальнейшем мы предполагаем, что для пары $A, B = \bar{A}$ невырожденная матрица (11) существует и была найдена, как это описано выше.

Роль предположения о неприводимости матрицы A раскрывается следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 4. Пусть матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ удовлетворяет соотношению

$$\bar{A} = Q^* A Q, \quad (12)$$

где матрица Q унитарная. Если A неприводима, то Q должна быть симметричной либо кососимметричной матрицей. При этом Q определена однозначно с точностью до умножения на числа модуля 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (12) выводим $A = Q^T \bar{A} \bar{Q}$ и

$$A = Q^T Q^* A Q \bar{Q} = (Q \bar{Q})^* A (Q \bar{Q}).$$

Итак, унитарная матрица $U = Q \bar{Q}$ перестановочна с A . Если U не является скалярной матрицей, то в ее спектре $\sigma(U)$ есть по меньшей мере два различных собственных значения. Рассмотрим произвольное разбиение

$$\sigma(U) = \sigma_1 \cup \sigma_2, \quad \sigma_1 \neq \emptyset, \quad \sigma_2 \neq \emptyset, \quad \sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset.$$

Подмножествам σ_1 и σ_2 отвечают ортогональные инвариантные подпространства матрицы U , дополняющие друг друга до $\mathbb{C}^n$. Эти же подпространства будут инвариантными для перестановочной с U матрицы A , что противоречит ее неприводимости.

Таким образом, $U = Q\bar{Q}$ должна быть скалярной матрицей, что возможно лишь в двух случаях, а именно

$$Q\bar{Q} = I \quad (13)$$

или

$$Q\bar{Q} = -I. \quad (14)$$

Соединяя условие унитарности $QQ^* = I$ соответственно с (13) и (14), получаем нужное утверждение.

Предположим теперь, что для унитарных матриц Q_1 и Q_2 справедливы равенства

$$\bar{A} = Q_1^* A Q_1 \quad \text{и} \quad \bar{A} = Q_2^* A Q_2.$$

Тогда

$$Q_1^* A Q_1 = Q_2^* A Q_2,$$

откуда

$$A = Q_1 Q_2^* A Q_2 Q_1^* = U^* A U,$$

где вместо $U = Q\bar{Q}$ имеем теперь

$$U = Q_2 Q_1^*.$$

Повторяя последующие рассуждения из первой части доказательства, приходим к тому, что U должна быть скалярной матрицей. Но равенство $U = \alpha I$ означает, что $Q_2 = \alpha Q_1$. Теорема доказана.

Объединяя теоремы 1 и 4, приходим к такому заключению.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть неприводимая матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ удовлетворяет соотношению (12). В таком случае A может быть овеществлена унитарным подобием, если и только если унитарная матрица Q симметрична.

Согласно лемме 1 матрица Q является унитарным сомножителем в полярном разложении

$$P = HQ, \quad H = H^* > 0, \quad (15)$$

уже найденной нами матрицы P . Однако известно, что в общем случае полярное разложение матрицы нельзя найти в радикалах (см. [8]). Поскольку мы заинтересованы в эффективном алгоритме, придется поискать способ судить о симметрии или косой симметрии матрицы Q по косвенным признакам. К счастью, такой способ существует.

Предположим, что матрица Q в (15) симметрична. Тогда матрица

$$P_L = \bar{P}P = \bar{H}\bar{Q}HQ = \bar{H}(Q^*HQ) \quad (16)$$

есть произведение положительно определенных эрмитовых матриц $\bar{H}$ и Q^*HQ . Известно, что все собственные значения такого произведения вещественны и положительны (см., например, [1; теорема 7.6.3]). Положителен поэтому и его след.

Пусть теперь Q – кососимметричная матрица. Тогда $\bar{Q} = -Q^*$ и вместо (16) имеем

$$P_L = -\bar{H}(Q^*HQ).$$

В этом случае все собственные значения матрицы P_L и ее след должны быть отрицательными.

Все сказанное выше можно рассматривать как обоснование следующего алгоритма, проверяющего возможность декомплексификации неприводимой матрицы A посредством унитарных подобий.

АЛГОРИТМ 1.

Шаг 1. Найти невырожденную матрицу P , удовлетворяющую соотношениям (7), где $B = \bar{A}$, или убедиться в несуществовании такой матрицы. В последнем случае A не может быть о вещественна посредством унитарного подобия.

Шаг 2. Предположим, что на шаге 1 была найдена невырожденная матрица P . Тогда вычисляется след матрицы $P_L = \bar{P}P$. Если он положителен, то A допускает декомплексификацию посредством унитарных подобий; в противном случае декомплексификация невозможна.

3. Декомплексификация посредством унитарных конгруэнций. Будем следовать той же стратегии, что и в п. 2. Отправным пунктом является следующее утверждение (см. [7]).

ЛЕММА 3. Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ унитарно конгруэнтны тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица $P \in M_n(\mathbb{C})$ такая, что

$$B = P^{-1}A\bar{P}, \quad B^T = P^{-1}A^T\bar{P}. \quad (17)$$

Если P существует, то матрица $\bar{Q}$, где Q – унитарный сомножитель в полярном разложении матрицы P , осуществляет унитарную конгруэнцию между A и B .

Чтобы найти матрицу P , перепишем условия (17) в виде

$$PB = A\bar{P}, \quad PB^T = A^T\bar{P}. \quad (18)$$

Представив входящие сюда матрицы в алгебраической форме

$$P = P_R + iP_I, \quad A = A_R + iA_I, \quad B = B_R + iB_I,$$

будем рассматривать соотношения (18) как систему линейных однородных уравнений относительно вещественных и мнимых частей элементов p_{ij} матрицы P . Далее действуем как в п. 2 со следующими изменениями: переменные $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ принимают лишь вещественные значения и G^k , будучи решеткой в $\mathbb{C}^k$, составляется из узлов, имеющих вещественные координаты. В результате будет найдена невырожденная матрица P , удовлетворяющая условиям (17), либо установлено отсутствие такой матрицы. В первом случае матрицы A и B унитарно конгруэнтны, а во втором нет.

В дальнейшем мы предполагаем, что для пары $A, B = \bar{A}$ невырожденная матрица (11) существует и была найдена, как это описано выше. Роль предположения о неприводимости матрицы A раскрывается следующим аналогом теоремы 4.

ТЕОРЕМА 5. Пусть матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ удовлетворяет соотношению

$$\bar{A} = Q^T A Q, \quad (19)$$

где матрица Q унитарная. Если матрица $A_L = \bar{A}A$ неприводима, то Q должна быть симметричной либо кососимметричной матрицей. При этом Q определена однозначно с точностью до умножения на -1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (19) выводим

$$A = Q^* \bar{A} \bar{Q} = Q^* Q^T A Q \bar{Q} = U^T A U, \quad (20)$$

где

$$U = Q \bar{Q}. \quad (21)$$

Используя соотношение (20) и его следствие

$$\bar{A} = U^* \bar{A} \bar{U},$$

имеем

$$A_L = \bar{A} A = U^* A_L U.$$

Итак, унитарная матрица U перестановочна с A_L . Отсюда, как и в теореме 4, выводим, что U должна удовлетворять одному из соотношений (13) или (14). Соединяя условие унитарности $Q Q^* = I$ соответственно с (13) и (14), получаем первое утверждение теоремы.

Предположим теперь, что для унитарных матриц Q_1 и Q_2 справедливы равенства

$$\bar{A} = Q_1^T A Q_1 \quad \text{и} \quad \bar{A} = Q_2^T A Q_2.$$

Тогда

$$Q_1^T A Q_1 = Q_2^T A Q_2,$$

откуда

$$A = \bar{Q}_1 Q_2^T A Q_2 Q_1^* = U^T A U,$$

где вместо (21) имеем теперь

$$U = Q_2 Q_1^*.$$

Повторяя последующие рассуждения из первой части доказательства, приходим к тому, что U должна быть скалярной матрицей. Но равенство $U = \alpha I$ означает, что $Q_2 = \alpha Q_1$. Соотношение (19) показывает, что $\alpha = \pm 1$. Теорема доказана.

Объединяя теоремы 2 и 5, приходим к такому заключению.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ удовлетворяет соотношению (19). Если соответствующая ей матрица A_L неприводима, то A может быть овеществлена унитарной конгруэнцией, если и только если унитарная матрица Q симметрична.

Напомним, что с точностью до поэлементного сопряжения матрица Q должна быть унитарным сомножителем в полярном разложении найденной нами матрицы P (см. (11)). Поэтому дальнейшие наши действия те же, что в п. 2.

Объединяя все сказанное выше, приходим к следующему алгоритму, проверяющему возможность декомплексификации матрицы A посредством унитарных конгруэнций. Предполагается, что соответствующая матрица A_L неприводима.

АЛГОРИТМ 2.

Шаг 1. Найти невырожденную матрицу P , удовлетворяющую соотношениям (17), где $B = \bar{A}$, или убедиться в несуществовании такой матрицы. В последнем случае A не может быть овеществлена посредством унитарной конгруэнции.

Шаг 2. Предположим, что на шаге 2 была найдена невырожденная матрица P . Тогда вычисляется след матрицы $P_L = \bar{P} P$. Если он положителен, то A допускает декомплексификацию посредством унитарных конгруэнций; в противном случае декомплексификация невозможна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.
- [2] Х. Д. Икрамов, “О комплексных матрицах, унитарно подобных вещественным матрицам”, *Матем. заметки*, **87**:6 (2010), 840–847.
- [3] Kh. D. Ikramov, “A note on complex matrices that are unitarily congruent to real matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **433**:4 (2010), 838–842.
- [4] C. Pearcy, “A complete set of unitary invariants for operators generating finite W^* -algebras of type I”, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 1405–1416.
- [5] Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов, “Критерий унитарной конгруэнтности матриц”, *ДАН*, **437**:1 (2011), 7–8.
- [6] Х. Д. Икрамов, “О конечном рациональном критерии неприводимости матриц”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем., кибернет.*, **2007**:3, 16–18.
- [7] Х. Д. Икрамов, “О конечных алгоритмах для проверки унитарного подобия и унитарной конгруэнтности пары комплексных матриц”, *Докл. РАН*, **437**:2 (2011), 151–153.
- [8] A. George, Kh. Ikramov, “Is the polar decomposition finitely computable?”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **17**:2 (1996), 348–354; Addendum, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **18**:1 (1997), 264.

Х. Д. Икрамов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило

14.07.2011