Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Л. Кудрявцев, L_p -неравенства для разностей и производных положительного порядка для функций со спектром в шаре или шаровом слое, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 3, 433–444

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 03:34:50

L_p -неравенства для разностей и производных положительного порядка для функций со спектром в шаре или шаровом слое

Н. Л. Кудрявцев

В настоящей работе доказываются неравенства типа Рисса, Бернштейна и Бора–Фавара в метрике пространств L_p при $0 < p < \infty$ для функций, спектр которых содержится в замкнутом шаре или замкнутом шаровом слое. В качестве приложения приводится дискретное описание пространств Лизоркина–Трибеля через координатные разности положительных порядков.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm9196

1. Введение. Оценки производных функций с компактным спектром (= носителем преобразования Фурье) играют важную роль в изучении пространств дифференцируемых функций. Первые результаты, часть из которых первоначально была получена в периодическом случае, относились к равномерной метрике и связаны с именами Бернштейна, Рисса и Бора. Бернштейн [1] показал, что для производной тригонометрического полинома степени не выше k справедливо неравенство

$$\|T'_k\|_\infty \leq k \|T_k\|_\infty,$$

которое им же позднее было распространено на целые функции экспоненциального типа. Рисс [2] получил оценку нормы производной T_k через первую разность

$$\|T'_k\|_\infty \leq \frac{k}{2} \left\| T_k \left(\cdot + \frac{\pi}{2k} \right) - T_k \left(\cdot - \frac{\pi}{2k} \right) \right\|_\infty,$$

а Бор [3] доказал, что для функций, спектр которых лежит вне отрезка $[-\sigma, \sigma]$, имеет место оценка

$$\|f\|_\infty \leq C\sigma \|f'\|_\infty$$

(на производные более высоких порядков неравенство обобщено Фаваром [4]).

В дальнейшем эти неравенства обобщались в различных направлениях. Неравенство Рисса на производные и разности целых положительных порядков целых функций экспоненциального типа было распространено Бернштейном [5] (одномерный случай, $p = \infty$) и Никольским [6] (n -мерный случай, $1 \leq p \leq \infty$). На дробные

(нецелые) показатели производных неравенство Бернштейна было обобщено Лизоркиным [7]. Для дробных разностей и производных в многомерном случае неравенство типа Рисса было получено Вилмесом [8] ($1 < p < \infty$). Неравенство Бернштейна для целых показателей производных в метрике пространств L_p при $0 < p < 1$ приведено в [9; пп. 1.3.2 и 1.4.1] (см. цитированную там же литературу).

В настоящей работе доказываются неравенства типа Рисса, Бернштейна и Бора–Фавара в метрике пространств L_p при $0 < p < \infty$ для функций, спектр которых содержится в замкнутом шаре или замкнутом шаровом слое. Вывод этих неравенств основывается на использовании оценок через максимальную функцию Стейна–Феффермана–Петре и максимальных неравенств. В качестве приложения приводится дискретное описание пространств Лизоркина–Трибеля через координатные разности положительных порядков.

2. Используемые обозначения. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное действительное евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z, \dots$, скалярным произведением $xy = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ и нормой $|x| = \sqrt{xx}$. Через e_j , $j = 1, \dots, n$, обозначим векторы стандартного базиса $\mathbb{R}^n$, т.е. $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (единица стоит на j -м месте). Элементы единичной сферы $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ будем называть *направлениями*. Шар (замкнутый шар) радиуса R с центром в начале координат обозначим $B(R)$ ($\bar{B}(R)$).

Для $0 < p \leq \infty$ под $\|\cdot\|_p$ понимается стандартная (квази)норма в лебеговом пространстве $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$. Как обычно, символ $S = S(\mathbb{R}^n)$ используется для обозначения шварцева пространства комплекснозначных быстро убывающих бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, а символ $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ – для двойственного пространства умеренных распределений (см., например, [10]).

Если функция $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то через $\mathcal{F}f$, или $\hat{f}$, обозначается ее (прямое) преобразование Фурье

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(y) e^{-ixy} dy, \quad \int = \int_{\mathbb{R}^n}.$$

Соответственно через $\mathcal{F}^{-1}f$, или $\check{f}$, обозначается обратное преобразование Фурье функции f

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(y) e^{ixy} dy.$$

Для распределений $g \in S'$ прямое и обратное преобразования Фурье вводятся обычным образом.

Если Ω – компакт в $\mathbb{R}^n$, то положим

$$S^\Omega = \{\varphi \in S \mid \text{supp } \hat{\varphi} \subset \Omega\}, \quad L_p^\Omega = \{f \in S' \mid \text{supp } \hat{f} \subset \Omega\} \cap L_p$$

(напомним, что согласно теореме Пэли–Винера–Шварца (см., например, [10; с. 220]) распределения с компактным спектром являются регулярными распределениями, имеющими ограниченный рост и совпадающими с сужениями на $\mathbb{R}^n$ аналитических функций n переменных).

Разность $\Delta_h^\alpha f$ дробного порядка $\alpha > 0$ с шагом $h \in \mathbb{R}^n$ комплекснозначной функции f в данной точке определяется как ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_\alpha^k f(\cdot - h), \quad (2.1)$$

где $C_\alpha^k = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)/k!$ – биномиальные коэффициенты. Если $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, то из асимптотики $C_\alpha^k \sim 1/k^{1+\alpha}$ биномиальных коэффициентов следует сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \|(-1)^k C_\alpha^k f(\cdot - h)\|_p$, что в свою очередь влечет абсолютную сходимость п.в. ряда (2.1) и оценку $\|\Delta_h^\alpha f\|_p \leq C(\alpha) \|f\|_p$. Если же $f \in L_p$, $0 < p < 1$ и $p(1 + \alpha) > 1$, то в силу неравенства

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right)^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^p, \quad a_k \geq 0,$$

справедлива оценка $\|\Delta_h^\alpha f\|_p \leq C(\alpha, p) \|f\|_p$.

Из свойств преобразования Фурье следует, что для функции $f \in L_1$

$$\widehat{\Delta_h^\alpha f}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_\alpha^k e^{-ikhy} \widehat{f}(y) = (1 - e^{-ihy})^\alpha \widehat{f}(y),$$

где под значением функции $(1 - e^{-ihy})^\alpha$ при $2\pi k < hy < 2\pi(k + 1)$ понимается значение $(2|\sin(hy/2)|)^\alpha e^{i\alpha(-hy + (2k+1)\pi)/2}$.

Частная производная $D_j^r \varphi$ порядка $r > 0$ по j -му аргументу функции $\varphi \in S$ определяется как $\mathcal{F}^{-1}[(iy_j)^r \widehat{\varphi}(y)](\cdot)$, где $(iy_j)^r = |y_j|^r e^{(ir\pi/2) \operatorname{sgn} y_j}$. Для произвольного направления ω производная $D_\omega^r \varphi$ порядка $r > 0$ определяется равенством

$$D_\omega^r \varphi = \mathcal{F}^{-1}[(i\omega y)^r \widehat{\varphi}(y)].$$

Постоянные, возникающие в оценках, обозначаются одним и тем же символом C и могут быть отличны друг от друга на протяжении одной выкладки.

3. Оценки функций и их (квази)норм. При целых $r > 0$ частные производные $D_j^r g$ функции $g \in S^{\overline{B}(R)}(\mathbb{R}^n)$ принадлежат L_p при любых $p > 0$. Для функций одной переменной известен следующий результат (см., например, [11; с. 355]): если функция ψ бесконечно дифференцируема и финитна, а число μ таково, что $\operatorname{Re} \mu > -1$, то при $y \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\int_0^\infty e^{iyx} \psi(x) x^\mu dx \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j y^{-j-1-\mu}, \quad \text{где} \quad a_j = i^{j+\mu+1} \frac{j!}{\Gamma(j + \mu + 1)} \psi^{(j)}(0)$$

при условии, что $\psi^{(j)}(0) \neq 0$ хотя бы для одного j . Отсюда следует, что если дано дробное $r > 0$ и функция $\varphi \in S(\mathbb{R})$ такая, что $\operatorname{supp} \widehat{\varphi} \subset [-R, R]$, то ее производная

$$(D^r \varphi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R (iy)^r \widehat{\varphi}(y) e^{iyx} dy$$

суммируема в любой степени $> 1/(1 + r)$.

Из приведенной асимптотической формулы следует также, что если $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, то $D^r \varphi$ не интегрируема ни в какой степени из $(0, 1/(1 + r))$.

ЛЕММА 1. Пусть $g \in S^{\overline{B}(R)}(\mathbb{R}^n)$ и дробное $r > 0$. Тогда для любого $p > 1/(1+r)$ частные производные $D_j^r g$, $j = 1, \dots, n$, суммируемы в степени p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R})$ имеет компактный спектр, причем $\widehat{\varphi}(y_j) = 1$, если $y_j \in [-R, R]$, пусть $\psi \in S(\mathbb{R}^{n-1})$ также имеет компактный спектр и $\widehat{\psi}(\overline{y}_j) = 1$, если $|\overline{y}_j| \leq R$ ($\overline{y}_j = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)$). Поскольку

$$(iy_j)^r \widehat{g}(y) = (iy_j)^r \widehat{\varphi}(y_j) \widehat{\psi}(\overline{y}_j) \widehat{g}(y),$$

а функция $\mathcal{F}^{-1}[(iy_j)^r \widehat{\varphi}(y_j) \widehat{\psi}(\overline{y}_j)] = (D^r \varphi)(x_j) \psi(\overline{x}_j) = \rho(x)$ суммируема в любой степени $> 1/(1+r)$, то

$$(D_j^r g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \rho(x-u) g(u) du, \quad \|D_j^r g\|_p \leq C \|\rho\|_{\overline{p}} \|g\|_p,$$

где $\overline{p} = \min(p, 1)$. Для $p \geq 1$ это неравенство Юнга и $C = 1$; для $p < 1$ неравенство доказано в [9; п. 1.5.1].

Аналогичное утверждение имеет место и для производной $D_\omega^r g$ по произвольному направлению ω . Действительно, пусть A – вращение такое, что $Ae_1 = \omega$ и $g_A(\cdot) = g(A\cdot)$. Если $g \in S^\Omega$, то $g_A \in S^{A^{-1}\Omega}$. Непосредственные вычисления показывают, что $(D_1^r g_A)(A^{-1}\cdot) = (D_\omega^r g)(\cdot)$. Поэтому $D_\omega^r g \in L_p$ для любого $p > 1/(1+r)$ и при этом выполняется неравенство $\|D_\omega^r g\|_p \leq C \|g\|_p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если взять произвольную финитную функцию ψ такую, что $\widehat{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\widehat{\psi} = 1$ на $\overline{B}(R)$, то согласно доказанному $D_j^r \psi \in L_p$ для любого $p > 1/(1+r)$. Тогда для любой функции $g \in S^{\overline{B}(R)}$ имеет место представление $D_j^r g = D_j^r \psi * g$.

Зафиксируем число $d \in (0, 1)$ и введем следующие обозначения:

$$D(R) = \overline{B(R)} \setminus \overline{B(dR)}, \quad G(R) = B(R(1+\varepsilon)) \setminus \overline{B(dR(1-\varepsilon))}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

где R – данное положительное число.

ЛЕММА 2. Пусть $t, t_1 t_2 \in (0, 1]$, $r > 0$ и $\omega \in S^{n-1}$ произвольны. Тогда для любой функции $g \in S^{\overline{B}(R)}(\mathbb{R}^n)$ имеют место представления

$$D_\omega^r g = \frac{1}{(2\pi)^n} (tR^{-1})^{-r} \frac{1}{(tR^{-1})^n} \mu_\omega \left(\frac{\cdot}{tR^{-1}} \right) * \Delta_{tR^{-1}\omega}^r g, \quad (3.1)$$

$$\Delta_{tR^{-1}\omega}^r g = \frac{1}{(2\pi)^n} (\pi t R^{-1})^r \frac{1}{(tR^{-1})^n} \nu_\omega \left(\frac{\cdot}{tR^{-1}} \right) * D_\omega^r g, \quad (3.2)$$

$$\Delta_{t_1 R^{-1}\omega}^r g = \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^r \frac{1}{(t_1 R^{-1})^n} \nu_\omega \left(\frac{\cdot}{t_1 R^{-1}} \right) * \frac{1}{(t_2 R^{-1})^n} \mu_\omega \left(\frac{\cdot}{t_2 R^{-1}} \right) * \Delta_{t_2 R^{-1}\omega}^r g, \quad (3.3)$$

где ядра $\mu_\omega, \nu_\omega \in S$, имеют компактный спектр и их L_1 -нормы не зависят от ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем радиальную функцию $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ такую, что

$$\widehat{\psi}(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq 1, \\ 0, & |y| \geq 1 + \varepsilon_1, \end{cases}$$

($\varepsilon_1 \in (0, 1)$ произвольно), и введем финитные функции $\hat{\mu}_\omega(y)$ и $\hat{\nu}_\omega(y)$ следующим образом

$$\hat{\mu}_\omega(y) = \frac{(i\omega y)^r}{(1 - e^{-i\omega y})^r} \hat{\psi}(y),$$

если $|y| < 1 + \varepsilon_1$ и $\hat{\mu}_\omega(y) = 0$ для $|y| \geq 1 + \varepsilon_1$, а

$$\hat{\nu}_\omega(y) = \frac{(1 - e^{-i\omega y})^r}{(i\omega y)^r} \hat{\psi}(y).$$

Как $(1 - e^{-is})^r / (is)^r$, так и $(is)^r / (1 - e^{-is})^r$ бесконечно дифференцируемы (после соответствующего доопределения в нуле) на интервале $(-2\pi, 2\pi)$, ибо

$$\frac{(1 - e^{-is})^r}{(is)^r} = \left(\frac{\sin(s/2)}{s/2} \right)^r e^{-irs/2}.$$

Обозначим через $\mu_\omega = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\mu}_\omega]$, $\nu_\omega = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\nu}_\omega]$. Из сказанного выше следует, что $\mu_\omega, \nu_\omega \in S^{\bar{B}(1+\varepsilon_1)}$.

L_1 -нормы функций μ_ω и ν_ω не зависят от ω . Действительно, пусть A – вращение такое, что $Ae_1 = \omega$. Поскольку $\hat{\psi}$ является радиальной функцией, то функция

$$\hat{\mu}_\omega(Ay) = \frac{(iy_1)^r}{(1 - e^{-iy_1})^r} \hat{\psi}(y) \equiv \hat{\mu}(y)$$

не зависит от ω . В силу свойств интеграла и преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \int |\mu_\omega(x)|^p dx &= \int |\mu_\omega(Ax)|^p dx \\ &= \int |(\mathcal{F}^{-1}[\hat{\mu}_\omega(A \cdot)])(x)|^p dx = \int |(\mathcal{F}^{-1}[\hat{\mu}(\cdot)])(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} (i\omega y)^r \hat{g}(y) &= (tR^{-1})^{-r} \hat{\mu}_\omega(tR^{-1}y) (1 - e^{-itR^{-1}\omega y})^r \hat{g}(y), \\ (1 - e^{-itR^{-1}\omega y})^r \hat{g}(y) &= (tR^{-1})^r \hat{\nu}_\omega(tR^{-1}y) (i\omega y)^r \hat{g}(y), \end{aligned}$$

применив обратное преобразование Фурье, получаем справедливость формул (3.1) и (3.2).

Чтобы доказать последнюю формулу заметим, что

$$(1 - e^{-it_1 R^{-1}\omega y})^r \hat{g}(y) = \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^r \hat{\mu}_\omega(t_2 R^{-1}y) \hat{\nu}_\omega(t_1 R^{-1}y) (1 - e^{-it_1 R^{-1}\omega y})^r \hat{g}(y).$$

Взяв от обеих частей этого тождества обратное преобразование Фурье, получаем формулу (3.3). При этом отметим, что свертка ядер $\mu_\omega * \nu_\omega$ является функцией из $S^{\bar{B}(1+\varepsilon)}$ и ее L_1 -норма не зависит от ω .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $g \in S^{\bar{B}(R)}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (0, \infty]$, $t, t_1 t_2 \in (0, 1]$, $r > 0$ и $\omega \in S^{n-1}$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\|D_\omega^r g\|_p \leq C t^{-r} R^r \|\Delta_{tR^{-r}\omega}^r g\|_p, \quad (3.4)$$

$$\|\Delta_{tR^{-1}\omega}^r g\|_p \leq Ct^r R^{-r} \|D_\omega^r g\|_p, \quad (3.5)$$

$$\|\Delta_{t_1 R^{-1}\omega}^r g\|_p \leq C \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^r \|\Delta_{t_2 R^{-1}\omega}^r g\|_p \quad (3.6)$$

с постоянными, не зависящими от g , R , t , t_1 , t_2 и ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что правые части неравенств конечны (если правые части неравенств бесконечны, то оценки очевидны). Для $p \in [1, +\infty]$ оценки (3.4), (3.5) и (3.6) следуют из неравенства Юнга и интегральных представлений (3.1)–(3.3). Если $p < 1$, то выберем положительное $q < p$ и положим $a = n/q$. Тогда

$$\begin{aligned} |(D_\omega^r g)(x)| &\leq C(tR^{-1})^{-r} \int (tR^{-1})^{-n} |\mu_\omega((tR^{-1})^{-1}(u))| (1 + (tR^{-1})^{-1}|u|)^a du \\ &\quad \times \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \frac{|(\Delta_{tR^{-1}\omega}^r g)(x - u)|}{(1 + (tR^{-1})^{-1}|u|)^a} \\ &\leq Ct^{-r} R^r \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \frac{|(\Delta_{tR^{-1}\omega}^r g)(x - u)|}{(1 + R|u|)^a}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

ибо интеграл $\int \mu_\omega(u)(1 + |u|)^a du$ сходится и его значение не зависит от ω . Взяв от обеих частей (3.7) L_p -квазинорму и применив неравенство

$$\left\| \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(\cdot - z)|}{(1 + |Rz|)^a} \right\|_p \leq C \|f\|_p, \quad (3.8)$$

справедливое для любой функции $f \in L_p^{\overline{B}(R)}$ с постоянной C , не зависящей от f и R [9; п. 1.6.2] к максимальной функции, получаем (3.4).

Неравенство (3.5) доказывается аналогично. Чтобы доказать (3.6), надо оценить свертку (3.3) через максимальную функцию от разности $\Delta_{t_2 R^{-1}\omega}^r g$. Для этого проведем оценку свертки $F * G * H$ трех функций:

$$\begin{aligned} |(F * G * H)(x)| &= \left| \int F(x - u)(G * H)(u) du \right| \\ &\leq \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \frac{|F(x - u)|}{(1 + R|u|)^a} \int \left(\int |G(u - v)| |H(v)| (1 + R|u|)^a dv \right) du. \end{aligned}$$

Воспользовавшись очевидным неравенством

$$(1 + R|u|)^a \leq (1 + R|u - v|)^a (1 + R|v|)^a \leq (1 + t_1^{-1}R|u - v|)^a (1 + t_2^{-1}R|v|)^a,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} |(F * G * H)(x)| &\leq \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \frac{|F(x - u)|}{(1 + R|u|)^a} \int |G(u)| (1 + t_1^{-1}R|u|)^a du \int |H(u)| (1 + t_2^{-1}R|v|)^a dv. \end{aligned}$$

Применяя последнее неравенство к свертке (3.3), приходим к оценке

$$|(\Delta_{t_1 R^{-1}\omega}^r g)(x)| \leq C \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^r \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{|(\Delta_{t_2 R^{-1}\omega}^r g)(v)|}{(1 + R|x - v|)^a}.$$

Теперь (3.6) следует из полученной оценки и (3.8). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $p(1+r) > 1$, то из (3.4) может быть получено неравенство Бернштейна

$$\|D_\omega^r g\|_p \leq CR^r \|g\|_p \quad (3.9)$$

(постоянная C не зависит от функции $g \in S^{\overline{B}(R)}$, R и ω).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Неравенство (3.6) является следствием оценок (3.9) и (3.5) и оно означает, что разность $\|\Delta_{t_1 R^{-1} \omega}^r g\|_p$ оценивается сверху и снизу через

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^r \|\Delta_{t_2 R^{-1} \omega}^r g\|_p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Вопрос о принадлежности к $L_p(\mathbb{R}^n)$ преобразования Фурье функций вида $\lambda(x)\psi(x)$, где λ – однородная бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функция, а ψ – радиальная шварцева функция, рассматривался в [12].

ЛЕММА 3. Для любых $r > 0$, $t \in (0, \pi]$, $\omega \in S^{n-1}$ и произвольной функции $g \in S^{D(R)}$ имеют место интегральные представления

$$g = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^n R^n \alpha_j(R \cdot) * (\Delta_{t R^{-1} e_j}^r g)(\cdot),$$

$$g = \frac{1}{(2\pi)^n} R^{-r} \sum_{j=1}^n R^n \beta_j(R \cdot) * (D_j^r g)(\cdot),$$

причем функции $\alpha_j(\cdot)$, $\beta_j(\cdot) \in S(\mathbb{R}^n)$ и имеют компактный спектр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Компакт $D(1)$ содержится в открытом множестве $G(1)$, а для $G(1)$ имеет место разложение

$$G(1) = \bigcup_{j=1}^n Y_j(1), \quad \text{где } Y_j(1) = G(1) \cap \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid |y_j| > \frac{d}{\sqrt{n}}(1-\varepsilon) \right\}.$$

Это следует из того, что если $y \in G(1)$, то $|y| > d(1-\varepsilon)$, и следовательно, хотя бы одна из координат такова, что $|y_j| > (d/\sqrt{n})(1-\varepsilon)$.

Поскольку множества $Y_j(1)$ открыты, существуют функции $\widehat{\psi}_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\text{supp } \widehat{\psi}_j \subset Y_j(1)$, $\widehat{\psi}_j \geq 0$ и $\sum_{j=1}^n \widehat{\psi}_j(y) = 1$ в некоторой окрестности $D(1)$ [10; п. 1.4]. Тогда

$$\text{supp } \widehat{\psi}_j(R^{-r} \cdot) \subset Y_j(R) = G(R) \cap \left\{ y \mid |y_j| > R \frac{d}{\sqrt{n}}(1-\varepsilon) \right\},$$

$\sum_{j=1}^n \widehat{\psi}_j(R^{-1} \cdot) = 1$ на $D(R)$, а $D(R) \subset G(R) = \bigcup_{j=1}^n Y_j(R)$.

Введем функции $\widehat{\alpha}_j(y)$ и $\widehat{\beta}_j(y)$, которые определяются следующим образом:

$$\widehat{\alpha}_j(y) = (1 - e^{-ity_j})^{-r} \widehat{\psi}_j(y), \quad \widehat{\beta}_j(y) = (iy_j)^{-r} \widehat{\psi}_j(y),$$

если $y \in Y_j(1)$ и $\widehat{\alpha}_j(y) = 0$, $\widehat{\beta}_j(y) = 0$ в противном случае.

По построению $\text{supp } \widehat{\alpha}_j, \text{supp } \widehat{\beta}_j \subset Y_j(1)$, $\widehat{\alpha}_j, \widehat{\beta}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Если теперь $g \in S^{D(R)}$, то ее образ Фурье $\widehat{g}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\widehat{g}(y) &= \sum_{j=1}^n \widehat{\psi}_j(R^{-1}y) \widehat{g}(y) = \sum_{j=1}^n \widehat{\alpha}_j(R^{-1}y) (1 - e^{-itR^{-1}y_j})^r \widehat{g}(y), \\ \widehat{g}(y) &= R^{-r} \sum_{j=1}^n \widehat{\beta}_j(R^{-1}y) (iy_j)^r \widehat{g}(y).\end{aligned}$$

Переходя от образов Фурье к самим функциям, получаем, что

$$g = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^n R^n \alpha_j(R \cdot) * (\Delta_{tR^{-1}e_j}^r g)(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^n \alpha_{j,k} * \Delta_{tR^{-1}e_j}^r g,$$

где $\alpha_{j,k}(\cdot) \doteq R^n \alpha_j(R \cdot)$ и

$$g = \frac{1}{(2\pi)^n} R^{-r} \sum_{j=1}^n 2^{kn} \beta_j(R \cdot) * (D_j^r g)(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^n} R^{-r} \sum_{j=1}^n \beta_{j,k} * D_j^r g,$$

где $\beta_{j,k}(\cdot) \doteq R^n \beta_j(R \cdot)$.

В силу определения ядра $\beta_{j,k}(\cdot), \gamma_{j,k}(\cdot) \in S(\mathbb{R}^n)$, причем L_1 -нормы этих функций не зависят от k и g (норма $\alpha_{j,k}(\cdot)$ зависит от t).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $g \in S^{D(R)}(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leq \infty$, $r > 0$ и $t \in (0, 1]$. Тогда справедливы неравенства

$$\|g\|_p \leq C t^{-r} \sum_{j=1}^n \|\Delta_{tR^{-1}e_j}^r g\|_p, \quad (3.10)$$

$$\|g\|_p \leq C R^{-r} \sum_{j=1}^n \|D_j^r g\|_p \quad (3.11)$$

с постоянными, не зависящими от g и R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО такое же, как и для неравенств (3.4)–(3.6). Только чтобы вывести (3.10), сначала получаем неравенство $\|g\|_p \leq C \sum_{j=1}^n \|\Delta_{R^{-1}e_j}^r g\|_p$, из которого в силу (3.6) следует требуемое неравенство.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Неравенства типа Бора–Фавара для определенного вида операторов, связанных с дробным дифференцированием, приводятся в работе [13].

Очевидно, что в неравенствах (3.10) и (3.11) порядки разностей и производных можно брать разными по разным переменным. Если спектр функции отделен от координатных гиперплоскостей, то правые части (3.10) и (3.11) можно заменить на (квази)нормы смешанной разности или на произведение смешанной частной производной и соответствующих множителей, взятых по всем переменным. Оценки (3.4)–(3.6) также могут быть переписаны для смешанных разностей и производных.

Чтобы распространить предыдущие результаты на пространства L_p^Ω , воспользуемся плотностью в них при $0 < p < \infty$ пространств S^Ω [14; с. 40] при условии,

что область Ω обладает свойством сегмента. Это свойство заключается в том, что существуют конечное покрытие открытыми шарами K_j , $j = 1, \dots, N$, замыкания $\overline{\Omega}$ и векторы $y^j \in \mathbb{R}^n$ такие, что $(\overline{\Omega} \cap K_j) + ty^j \subset \Omega$ для $0 < t \leq 1$, $j = 1, \dots, N$. Очевидно, что $\overline{B}(R)$ и $D(R)$ обладают этим свойством.

Пусть область Ω совпадает либо с $\overline{B}(R)$, либо с $D(R)$, дробное $r > 0$, $f \in L_p^\Omega$ произвольна ($p \in (1/(1+r), \infty)$) и $\varphi_k \in S^\Omega$ такова, что $\varphi_k \xrightarrow{L_p} f$ при $k \rightarrow \infty$. В силу неравенства (3.5) последовательности $(D_j^r \varphi_k)$, $j = 1, \dots, n$, и $(D_\omega^r \varphi_k)$ фундаментальны в L_p . Следовательно, существуют функции $f_j, f_\omega \in L_p$ такие, что $D_j^r \varphi_k \xrightarrow{L_p} f_j$ и $D_\omega^r \varphi_k \xrightarrow{L_p} f_\omega$. Ясно, что $f_j, f_\omega \in L_p^\Omega$. Из неравенства Никольского разных метрик [9; п. 1.4.1] следует, что последовательности сходятся и в любом пространстве L_q с $p < q \leq \infty$ (в частности имеет место равномерная сходимость). Поэтому функции f_j являются частными производными $D_j^r f$ порядка r функции f , совпадающими с лиувиллевскими обобщенными частными производными в смысле определения Лизоркина [13].

Что касается функции f_ω , то она совпадает с $D_\omega^r f$, которая определяется равенством $D_\omega^r f(\cdot) = (D_1^r f_A)(A^{-1} \cdot)$, где A – вращение такое, что $Ae_1 = \omega$, а $D_1^r f_A$ лиувиллевская обобщенная частная производная по первому аргументу функции $f_A(\cdot) = f(A \cdot)$.

ТЕОРЕМА 1. Если $f \in L_p^{\overline{B}(R)}(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$, $\omega \in S^{n-1}$, $t, t_1, t_2 \in (0, 1]$ произвольны, то

$$\|D_\omega^r f\|_p \leq Ct^{-r} R^r \|\Delta_{tR^{-1}\omega}^r f\|_p, \quad (3.12)$$

$$\|\Delta_{tR^{-1}\omega}^r f\|_p \leq Ct^r R^{-r} \|D_\omega^r f\|_p, \quad (3.13)$$

$$\|\Delta_{t_1 R^{-1}\omega}^r f\|_p \leq C \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^r \|\Delta_{t_2 R^{-1}\omega}^r f\|_p \quad (3.14)$$

с постоянными, не зависящими от f , R и t, t_1 и t_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сказанного выше относительно плотности $S^{\overline{B}(R)}$ в $L_p^{\overline{B}(R)}$ следует, что интегральные представления (3.1)–(3.3) и вытекающие из них оценки левых частей этих представлений через соответствующие максимальные функции остаются в силе и для функций из $L_p^{\overline{B}(R)}$. Тогда доказательство неравенств (3.12)–(3.14) ничем не отличается от доказательства (3.4)–(3.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если $p(1+r) > 1$, то из неравенства (3.12) может быть получено неравенство Бернштейна для производной по направлению $D_\omega^r f$ функции $f \in L_p^{\overline{B}(R)}$

$$\|D_\omega^r f\|_p \leq CR^r \|g\|_p$$

с постоянной C , не зависящей от R и f .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В одномерном случае неравенство типа Рисса для дробных показателей при $p > 1/2$ получено в [15].

ТЕОРЕМА 2. Если $f \in L_p^{D(R)}(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$ и $t \in (0, 1]$ произвольны, то

$$\|f\|_p \leq Ct^{-r} \sum_{j=1}^n \|\Delta_{tR^{-1}e_j}^r f\|_p, \quad (3.15)$$

$$\|f\|_p \leq CR^{-r} \sum_{j=1}^n \|D_j^r f\|_p \quad (3.16)$$

с постоянными, не зависящими от f , t и R .

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Выражение*

$$\|f\|^* = \|f\|_p + \sum_{j=1}^n \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksq} |\Delta_{t2^{-k}e_j}^r f|^q \right)^{1/q} \right\|_p$$

при любом $t \in (0, 1]$ является эквивалентной квазинормой в $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, если $r > s > n/\min(p, q)$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$.

Доказательство. Пусть $f \in F_{p,q}^s$ и выполнены условия теоремы. Тогда f ограничена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$ и $f \in L_p$ [9; п. 2.7.1]. Поэтому если $\varphi \in S^{\overline{B(R)}}$, то $\Delta_h^r(\varphi * f) = \varphi * \Delta_h^r f$.

Докажем, что $\|f\|_{F_{p,q}^s} \leq C\|f\|^*$, где

$$\begin{aligned} \|f\|_{F_{p,q}^s} &= \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} |\mathcal{F}^{-1}[\varphi_k \widehat{f}](\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_p, \\ \varphi_0 &\in S, \quad \text{supp } \varphi_0 \subset \overline{B(2)}, \\ \varphi_k(\cdot) &= \varphi(2^{-k}\cdot), \quad \varphi \in S, \quad \text{supp } \varphi \in \overline{B(2) \setminus B(2^{-1})}, \\ \varphi &> 0 \quad \text{на } B(\sqrt{2}) \setminus \overline{B(\sqrt{2^{-1}})} \end{aligned}$$

и $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k = 1$ одна из эквивалентных квазинормировок пространства $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ [9].

Действительно, поскольку $\mathcal{F}^{-1}[\varphi_k \widehat{f}] = C\mathcal{F}^{-1}\varphi_k * f$, при $k \geq 1$

$$\begin{aligned} |(\mathcal{F}^{-1}\varphi_k) * f|^q &= C \left| \sum_{j=1}^n \alpha_{j,k} * \Delta_{t2^{-k}e_j}^r (\mathcal{F}^{-1}\varphi_k * f) \right|^q \\ &\leq C \sum_{j=1}^n |\alpha_{j,k} * \mathcal{F}^{-1}\varphi_k * \Delta_{t2^{-k}e_j}^r f|^q. \end{aligned}$$

Функции $\alpha_{j,k} * \mathcal{F}^{-1}\varphi_k \in S$ как свертки двух функций из пространства S . Значит, их наименьшие убывающие мажоранты интегрируемы и, следовательно, свертки оцениваются через максимальные функции Харди–Литтлвуда [16; гл. 3, п. 2.2] $|\alpha_{j,k} * \mathcal{F}^{-1}\varphi_k * \Delta_{t2^{-k}e_j}^r f| \leq C\mathcal{M}\Delta_{t2^{-k}e_j}^r f$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \|f\|_{F_{p,q}^s} &\leq C \left(\|f\|_p + \sum_{j=1}^n \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksq} |\mathcal{M}\Delta_{t2^{-k}e_j}^r f|^q \right)^{1/q} \right\|_p \right) \\ &\leq C \left(\|f\|_p + \sum_{j=1}^n \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksq} |\Delta_{t2^{-k}e_j}^r f|^q \right)^{1/q} \right\|_p \right) = C\|f\|^* \end{aligned}$$

(на последнем шаге было применено неравенство Стейна–Феффермана (см., например, [9; п. 1.2.3])).

Докажем обратное неравенство. Пусть $\omega_r(f, t2^{-k}) = \sup_{|h| \leq t2^{-k}, h \in \mathbb{R}^n} |\Delta_h^r f|$. Тогда из соображений монотонности

$$\begin{aligned} \|f\|^* &\leq \|f\|_p + \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksq} \omega_r^q(f, t2^{-k}) \right)^{1/q} \right\|_p \leq \|f\|_p + \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{ksq} \omega_r^q(f, t2^{-k}) \right)^{1/q} \right\|_p \\ &\leq C \left(\|f\|_p + \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^{sq} \int_{t2^k}^{t2^{k+1}} \tau^{-sq} \omega_r^q(f, \tau) d\tau / \tau \right)^{1/q} \right\|_p \right) \\ &\leq C \left(\|f\|_p + \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \omega_r^q(f, |h|) dh / |h|^n \right)^{1/q} \right\|_p \right). \end{aligned}$$

Выражение в скобках является эквивалентной нормой в пространствах $F_{p,q}^s$ при указанных значениях параметров [17]. Следовательно, $\|f\|^* \leq C \|f\|_{F_{p,q}^s}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В [18] изучалась связь обобщенных пространств Лизоркина–Трибеля с обобщенными разностями (последние включают в себя разности положительных порядков). В этой работе была получена оценка сверху нормы функций из обобщенного пространств Лизоркина–Трибеля через выражение вида $\|f\|^*$, содержащее обобщенные разности по координатным направлениям, взятые по фиксированной последовательности шагов.

В заключение автор хотел бы выразить признательность рецензенту, благодаря замечаниям которого был улучшен текст настоящей статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Бернштейн, “О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени”, *Собрание сочинений*, Т. 1, Изд. АН СССР, М., 1952, 11–104.
- [2] M. Riesz, “Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome”, *Deutsche Math. Ver.*, **23** (1914), 354–368.
- [3] H. Bohr, “Ein allgemeiner Satz über die Integration eines trigonometrischen Polynoms”, *Prace Mat.-Fiz.*, **43** (1935), 273–288.
- [4] J. Favard, “Application de la formule sommatoire d’Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques ou presque-périodiques”, *Mat. Tidsskr. B, København*, **1936** (1936), 81–94.
- [5] С. Н. Бернштейн, “Распространение неравенства С. Б. Стечкина на целые функции конечной степени”, *Докл. АН СССР*, **60:9** (1948), 1487–1490.
- [6] С. М. Никольский, “Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна”, *Докл. АН СССР*, **60:9** (1948), 1507–1510.
- [7] П. И. Лизоркин, “Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29:1** (1965), 109–126.
- [8] G. Wilmes, “On Riesz-type inequalities and K-functionals related to Riesz potentials in $\mathbb{R}^n$ ”, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **1:1** (1979), 57–77.
- [9] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств*, Мир, М., 1986.
- [10] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. 1. *Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986.

- [11] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton Math. Ser., **43**, Monographs in Harmonic Analysis, III, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [12] K. Runovski, H.-J. Schmeisser, “On some extensions of Bernstein’s inequality for trigonometric polynomials”, *Funct. Approx. Comment. Math.*, **29** (2001), 125–142.
- [13] П. И. Лизоркин, “Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. III*, Тр. МИАН СССР, **105**, 1969, 89–167.
- [14] H. Triebel, *Fourier Analysis and Function Spaces*, Teubner-Texte zur Mathematik, Teubner Verlag., Leipzig, 1977.
- [15] R. Taberski, “Estimates for entire functions of exponential type”, *Funct. Approx. Comment. Math.*, **13** (1982), 129–147.
- [16] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
- [17] Н. Л. Кудрявцев, “Дробные разности и пространства Лизоркина–Трибеля”, *Матем. заметки*, **71**:6 (2002), 845–854.
- [18] Г. А. Калябин, “Характеризация пространств типа Бесова–Лизоркина–Трибеля с помощью обобщенных разностей”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 12*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **181**, Наука, М., 1988, 95–116.

Н. Л. Кудрявцев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: nilkud@mech.math.msu.su

Поступило

12.07.2011

Исправленный вариант

10.06.2013