Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов, О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 1, 97–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm92>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:55:32

УДК 517.984

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

Доказывается теорема о базисности Рисса в пространстве $L_2[0, 1]$ собственных и присоединенных функций интегрального оператора, некоторая производная ядра которого терпит разрыв на линии $t = 1 - x$.

Библиография: 20 названий.

В настоящей работе исследуется вопрос о базисности Рисса в пространстве $L_2[0, 1]$ собственных и присоединенных функций (СПФ) интегрального оператора

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t) dt, \quad x \in [0, 1]. \quad (1)$$

Предполагаем, что при $0 \leq t \leq x \leq 1$ существуют и непрерывны производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{j+s}}{\partial x^j \partial t^s} A(x, t), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad s = 0, 1, \\ \left. \frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x, t) \right|_{t=x} = \delta_{n-1, j}, \quad j = 0, \dots, n, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Операторы (1), (2) и более общего вида, когда ядро $A(x, t)$ допускает разрывы некоторых производных на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$, впервые рассматривались одним из авторов [1]. Была исследована задача точного обращения таких операторов и установлена равносходимость разложений по СПФ и в тригонометрический ряд Фурье [2], [3].

Для дифференциальных операторов с усиленно регулярными краевыми условиями базисность Рисса СПФ установлена в [4]–[6]. Эти работы стимулировали большое количество исследований. Отметим близкие к нам работы А. А. Шкаликова [7]–[9], А. М. Гомилко и Г. В. Радиевского [10], [11], А. Г. Баскакова и Т. К. Кацарана [12] по базисам Рисса из СПФ дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями. Широкое развитие получил новый метод исследования базисных свойств СПФ дифференциальных операторов, не привязанных к граничным

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента РФ “Ведущие научные школы”, грант № НШ-1295.2003.1, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00075.

условиям, предложенный впервые В. А. Ильиным [13]–[15]. Базисность Рисса СПФ интегральных операторов свертки установлена Б. В. Пальцевым [16]. Для интегральных операторов с ядрами, имеющими разрыв $(n-1)$ -й производной по x на линии $t = x$, установлена в [17], а для оператора (1), (2) при $n = 1$ в [18]. Случай $n > 1$ значительно более трудный и применяемый теперь метод является дальнейшим существенным развитием метода из [18].

1. Сведение к интегро-дифференциальному оператору в пространстве вектор-функций. Для определенности будем считать, что $n = 4q$.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор A^{-1} существует, причем A^{-1} представляет собой интегро-дифференциальный оператор*

$$A^{-1}y(x) = y^{(n)}(1-x) + \int_0^x N_{1,t}(x,t)y^{(n-1)}(1-t)dt \quad (3)$$

с краевыми условиями

$$y^{(k-1)}(1) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Здесь $N_1(x,t)$ – ядро интегрального оператора $N_1 = (E + A_{x^n})^{-1} - E$, E – единичный оператор,

$$A_{x^n}f(x) = \int_0^x A_{x^n}^{(n)}(x,t)f(t)dt, \quad A_{x^n}^{(n)}(x,t) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}A(x,t),$$

$$N_{1,t}(x,\xi) = \left. \frac{\partial N_1(x,t)}{\partial t} \right|_{t=\xi}, \quad y'(1-x) = y'_\xi(\xi)|_{\xi=1-x}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y(x) = Af(x)$. Тогда $y(x)$ удовлетворяет (4) и

$$y^{(n)}(1-x) = f(x) + A_{x^n}f(x).$$

Отсюда получаем (3).

Обратно, пусть $y(x)$ удовлетворяет (4), и правую часть (3) обозначим через $f(x)$. Проводя здесь интегрирование по частям с учетом $N_1(x,x) \equiv 0$, приходим к

$$y^{(n)}(1-x) = f(x) + A_{x^n}f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x A(x,t)f(t)dt.$$

Отсюда в силу (4) получаем

$$y(1-x) = \int_0^x A(x,t)f(t)dt.$$

Теорема доказана.

В пространстве вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ (T – знак транспонирования) введем интегральный оператор

$$Nf(x) = \int_0^{1/2} N(x,t)f(t)dt, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

где

$$\begin{aligned} N(x, t) &= B\Gamma^{-1}\tilde{N}(x, t)\Gamma, \quad \tilde{N}(x, t) = (\tilde{N}_{ij}(x, t))_{i,j=1}^2, \\ \tilde{N}_{11}(x, t) &= N_{1,t}\left(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - t\right)\varepsilon(t, x), \quad \tilde{N}_{12}(x, t) = 0, \\ \tilde{N}_{21}(x, t) &= N_{1,t}\left(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - t\right), \quad \tilde{N}_{22}(x, t) = N_{1,t}\left(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + t\right)\varepsilon(x, t), \end{aligned}$$

$\varepsilon(x, t) = 1$ при $t \leq x$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $t > x$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Обозначим, далее, через L интегро-дифференциальный оператор

$$Ly(x) = By^{(n)}(x) + Ny^{(n-1)}(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} U_k(y) &= P_1y^{(k-1)}(0) + Qy^{(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad k = 2r - 1, \quad r = 1, \dots, \frac{n}{2}, \\ U_k(y) &= P_2y^{(k-1)}(0) + Qy^{(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad k = 2r, \quad r = 1, \dots, \frac{n}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

ТЕОРЕМА 2. Если $y(x)$ является собственной (присоединенной) функцией оператора A для характеристического числа λ , то $u(x) = \Gamma^{-1}(y(1/2+x), y(1/2-x))^T$, $x \in [0, 1/2]$, является собственной (присоединенной) функцией оператора L для собственного значения λ ; и наоборот, если $u(x)$ является собственной (присоединенной) функцией оператора L , то $y(x) = (\Gamma u(1/2-x))_2$ при $x \in [0, 1/2]$, $y(x) = (\Gamma u(x-1/2))_1$ при $x \in [1/2, 1]$, является собственной (присоединенной) функцией оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем лишь для случая собственных функций (для присоединенных функций оно аналогично, лишь несколько более громоздкое). Пусть $y(x) = \lambda Ay(x)$ и $y(x) \neq 0$. Тогда по теореме 1

$$y^{(n)}(1-x) + \int_0^x N_{1,t}(x, t)y^{(n-1)}(1-t) dt = \lambda y(x). \quad (6)$$

Перейдем в (6) от x к $x + 1/2$. Тогда при $x \in [-1/2, 1/2]$ получим

$$y^{(n)}\left(\frac{1}{2} - x\right) + \int_{1/2}^x N_{1,t}\left(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + t\right)y^{(n-1)}\left(\frac{1}{2} - t\right) dt = \lambda y\left(\frac{1}{2} + x\right). \quad (7)$$

Положим $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(1/2+x)$, $z_2(x) = y(1/2-x)$, $x \in [0, 1/2]$. Тогда, записывая (7) отдельно при $x \in [0, 1/2]$ и $x \in [-1/2, 0]$ и во втором случае вместо x записывая $-x$, придем к

$$z^{(n)}(x) + \tilde{N}z^{(n-1)}(x) = \lambda \tilde{B}z(x), \quad (8)$$

где $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Положим $u(x) = \Gamma^{-1}z(x)$. Тогда (8) переходит в

$$Lu(x) = \lambda u(x). \quad (9)$$

Займемся получением граничных условий (5) для $u(x)$. По теореме 1

$$z_1^{(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (10)$$

и, кроме того, очевидно, что $z_1^{(k-1)}(0) = (-1)^{k-1}z_2^{(k-1)}(0)$, $k = 1, \dots, n$. В матричном виде эти соотношения запишутся так:

$$\begin{pmatrix} 1 & (-1)^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^{(k-1)}(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z^{(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Выполнив здесь подстановку $z(x) = \Gamma u(x)$, придем к (5).

Обратно, пусть $u(x)$ удовлетворяет (9) и (5). Рассуждая в обратном порядке, получим, что $y(x)$, определяемая из $u(x) = \Gamma^{-1}(y(1/2 + x), y(1/2 - x))^T$, удовлетворяет $A^{-1}y(x) = \lambda y(x)$. Теорема доказана.

2. Резольвента оператора L .

1. Сначала займемся резольventой $R_{0,\lambda} = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ оператора L_0 :

$$L_0 y = B y^{(n)}(x),$$

где вектор-функция $y(x)$ удовлетворяет краевым условиям

$$U(y) = 0 \quad (12)$$

и $U(y) = (U_1^T(y), \dots, U_n^T(y))^T$.

Положим $\lambda = \rho^n$, где $\arg \rho \in [0, 2\pi/n]$. Последний сектор разобьем на четыре сектора S_j , $j = 1, 2, 3, 4$, где $S_j = \{\rho \mid \arg \rho \in [\gamma_{j-1}, \gamma_j]\}$, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = \pi/2n$, $\gamma_2 = \pi/n$, $\gamma_3 = 3\pi/2n$, $\gamma_4 = 2\pi/n$, и для определенности будем рассматривать сектор S_1 (остальные рассматриваются аналогично). Обозначим через ω_k , $k = 1, \dots, n$, корни n -й степени из 1, занумерованные так, чтобы

$$\operatorname{Re} \rho \omega_1 \geq \operatorname{Re} \rho \omega_2 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho \omega_{n/2} \geq 0 \geq \operatorname{Re} \rho \omega_{n/2+1} \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho \omega_n,$$

и через ω_k , $k = n+1, \dots, 2n$, корни n -й степени из -1 , для которых

$$\operatorname{Re} \rho \omega_{n+1} \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho \omega_{3n/2} \geq 0 \geq \operatorname{Re} \rho \omega_{3n/2+1} \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho \omega_{2n}.$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} g_1(x, t, \rho) &= \frac{1}{n\rho^{n-1}} \left\{ \varepsilon(x, t) \sum_{k=n/2+1}^n \omega_k \exp \rho \omega_k (x-t) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon(t, x) \sum_{k=1}^{n/2} \omega_k \exp \rho \omega_k (x-t) \right\}, \\ g_2(x, t, \rho) &= \frac{1}{n\rho^{n-1}} \left\{ \varepsilon(x, t) \sum_{k=3n/2+1}^{2n} \omega_k \exp \rho \omega_k (x-t) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon(t, x) \sum_{k=n+1}^{3n/2} \omega_k \exp \rho \omega_k (x-t) \right\}, \end{aligned}$$

и через $g(x, t, \rho)$ обозначим матрицу-функцию

$$g(x, t, \rho) = \begin{pmatrix} g_1(x, t, \rho) & 0 \\ 0 & g_2(x, t, \rho) \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 1. Если

$$y(x, \rho) = \int_0^{1/2} g(x, t, \rho) f(t) dt,$$

то $y(x, \rho)$ удовлетворяет уравнению

$$By^{(n)}(x, \rho) - \lambda y(x, \rho) = f(x). \quad (13)$$

Это утверждение очевидно.

Обозначим

$$\begin{aligned} \sigma_k(x, \rho) &= \exp \rho \omega_k \left(x - \frac{1}{2} \right), \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2}, n+1, \dots, \frac{3n}{2}, \\ \sigma_k(x, \rho) &= \exp \rho \omega_k x, \quad k = \frac{n}{2} + 1, \dots, n, \frac{3n}{2} + 1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Тогда система $\{\sigma_k(x, \rho)\}_{k=1}^{2n}$ линейно независима и $|\sigma_k(x, \rho)| \leq 1$.

ЛЕММА 2. Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$y(x, \rho) = Y(x, \rho)c + \int_0^{1/2} g(x, t, \rho) f(t) dt, \quad (14)$$

где $Y(x, \rho) = (Y_1(x, \rho), \dots, Y_n(x, \rho))$, $Y_k(x, \rho) = \begin{pmatrix} \sigma_k(x, \rho) & 0 \\ 0 & \sigma_{n+k}(x, \rho) \end{pmatrix}$, $c = (c_1, \dots, c_{2n})^T$, и c_k – произвольные постоянные.

Утверждение леммы следует из леммы 1 и того, что $Y_k(x, \rho)$, $k = 1, \dots, n$, образуют фундаментальную систему решений однородного матричного уравнения

$$BY^{(n)} - \lambda Y = 0.$$

ЛЕММА 3. Для резольвенты $R_{0,\lambda}$ имеет место формула

$$R_{0,\lambda} f = \int_0^{1/2} G_0(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} G_0(x, t, \lambda) &= g(x, t, \rho) + G_1(x, t, \rho), \\ G_1(x, t, \rho) &= -Y(x, \rho)U^{-1}(Y)U(g(x, t, \rho)), \\ U(Y) &= \left(\frac{1}{\rho^{j-1}} U_j(Y_k) \right)_{j,k=1}^n, \quad U(g) = \left(U_1^T(g), \frac{1}{\rho} U_2^T(g), \dots, \frac{1}{\rho^{n-1}} U_n^T(g) \right)^T \end{aligned} \quad (16)$$

и U_j применяется к $g(x, t, \rho)$ по переменной x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y(x, \rho) = R_{0,\lambda} f(x)$. Тогда $y(x, \rho)$ удовлетворяет (13) и условиям (12). По лемме 2 для $y(x, \rho)$ имеет место представление (14). Постоянный вектор c находится из условий (12), которые нам удобно записать в таком виде: $U_j(y)/\rho^{j-1} = 0, j = 1, \dots, n$. Тогда

$$U(Y)c + \int_0^{1/2} U(g(x, t, \rho))f(t) dt = 0.$$

Находя отсюда c и подставляя в (14), получим (15), (16). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Определитель $\Delta(\rho)$ матрицы $U(Y)$ имеет следующую асимптотику:*

$$\Delta(\rho) = a + b \exp \rho i + O\left(\exp\left(\frac{1}{2}\rho\omega_{3n/2+1}\right)\right), \quad (17)$$

где a и b – постоянные числа, отличные от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\Delta_1(\rho)$ определитель, получающийся из $\Delta(\rho)$ заменой элементов, содержащих экспоненты, кроме $\exp(\frac{1}{2}\rho\omega_{n/2+1})$ и $\exp(-\frac{1}{2}\rho\omega_{n/2})$, на нуль. Тогда, так как все элементы $\Delta(\rho)$ ограничены по ρ , получим

$$\Delta(\rho) = \Delta_1(\rho) + O\left(\exp\left(\frac{1}{2}\rho\omega_{3n/2+1}\right)\right). \quad (18)$$

В $\Delta_1(\rho)$ переставим столбцы так, чтобы элементы i -й строки снизу, стоящие в столбцах с номерами $n(i-1)/2 + k, k = 1, 2, \dots, n/2$, совпали при $i = 1, 2$ с $\omega_{n(i-1)/2+k}^{n-1}$, а при $i = 3, 4$ с $\omega_{n(i-1)/2+k}^{n-2}$. Полученный определитель обозначим $\Delta_2(\rho)$. Ясно, что $\Delta_1(\rho) = \pm\Delta_2(\rho)$. В $\Delta_2(\rho)$ переставим строки так, чтобы в каждой из последних $n/2$ строк первые $3n/2$ элементов равнялись нулю и в строках с номерами $n+1, \dots, 3n/2$ каждый из первых $n/2 - 1$ элементов равнялся нулю. Полученный определитель обозначим через $\Delta_3(\rho)$. Таким образом, $\Delta_2(\rho) = \pm\Delta_3(\rho)$. Далее, в определителе $\Delta_3(\rho)$ все элементы последних $n/2$ строк, кроме элементов последних $n/2$ столбцов, равны нулю, а минор γ , состоящий из элементов на пересечении последних $n/2$ строк и последних $n/2$ столбцов, есть определитель Вандермонда, образованный из $\omega_k^2, k = 3n/2 + 1, \dots, 2n$, и поэтому $\gamma \neq 0$. Поэтому по теореме Лапласа $\Delta_3(\rho) = \gamma\Delta_4(\rho)$, где $\Delta_4(\rho)$ есть определитель, состоящий из элементов, стоящих на пересечении первых $3n/2$ строк и первых $3n/2$ столбцов определителя $\Delta_3(\rho)$. Рассмотрим матрицу из последних $n/2$ строк определителя $\Delta_4(\rho)$. Все элементы этих строк, кроме элементов, стоящих на пересечении со столбцами с номерами $n/2, \dots, n$, равны нулю. Поскольку $\omega_{n/2} = -i$, то столбец с номером $n/2$ этой матрицы есть

$$\left(-i \exp \frac{\rho i}{2}, (-i)^3 \exp \frac{\rho i}{2}, \dots, (-i)^{n-1} \exp \frac{\rho i}{2}\right)^T$$

и столбцы с номерами $k = n/2 + 1, \dots, n$ образуют $(\omega, \omega_k^3, \dots, \omega_k^{n-1})^T$. Рассмотрим еще матрицу из первых n строк определителя $\Delta_4(\rho)$. В ней столбцы с номерами $k = n/2 + 2, \dots, n$ состоят из нулей, столбцы с номерами $k = 1, \dots, n/2, n+1, \dots, 3n/2$ образуют $(1, \omega_k, \dots, \omega_k^{n-1})^T$. Так как $\omega_{n/2+1} = i$, то столбец с номером $k = n/2 + 1$ есть

$$\left(\exp \frac{\rho i}{2}, i \exp \frac{\rho i}{2}, \dots, i^{n-1} \exp \frac{\rho i}{2}\right)^T.$$

Поэтому, разлагая определитель $\Delta_4(\rho)$ по минорам последних $n/2$ строк, получим

$$\Delta_4(\rho) = a_1 + b_1 \exp \rho i, \quad (19)$$

где a_1, b_1 отличны от нуля, так как представляют собой произведения ненулевых множителей на определители Вандермонда либо чисел ω_k , либо ω_k^2 . Из (18) и (19) получаем (17). Лемма доказана.

Обозначим через $S_{1,\delta}$ область, получающуюся удалением из S_1 всех точек $\rho_m = -i \ln(-a/b) + 2m\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$, являющихся нулями функции $a + b \exp \rho i$, вместе с круговыми окрестностями γ_m одного и того же достаточно малого радиуса δ .

ЛЕММА 5. В области $S_{1,\delta}$ при достаточно больших $|\rho|$ для $G_0(x, t, \lambda)$ имеет место асимптотическая формула

$$G_0(x, t, \lambda) = g(x, t, \rho) + \frac{1}{\rho^{n-1}} T(x, t, \rho),$$

где компоненты матрицы $T(x, t, \rho)$ являются линейными комбинациями функций $\sigma_k(x, \rho) \sigma_l(1/2 - t, \rho)$ с коэффициентами, являющимися ограниченными функциями ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 при $\rho \in S_{1,\delta}$ имеет место при больших $|\rho|$ оценка $|\Delta(\rho)| \geq c > 0$, где c не зависит от ρ . Поэтому $U^{-1}(Y)$ представляет собой матрицу, элементы которой являются ограниченными функциями ρ . Далее, $\rho^{n-k} U_k(g(x, t, \rho))$, $k = 1, \dots, n$, представляют собой матрицы, элементы которых являются линейными комбинациями функций $\sigma_j(1/2 - t, \rho)$ с постоянными коэффициентами. Утверждение леммы теперь есть простое следствие леммы 3.

СЛЕДСТВИЕ. В области $S_{1,\delta}$ имеют место оценки

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} G_{0,ij}(x, t, \lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^{n-1-k}}\right), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad i, j = 1, 2,$$

где $G_{0,ij}(x, t, \lambda)$ – элементы матрицы $G_0(x, t, \lambda)$.

2. Теперь изучим резольвенту $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ оператора L .

ТЕОРЕМА 3. В области $S_{1,\delta}$ при больших $|\rho|$ справедливо представление

$$R_\lambda = R_{0,\lambda} - R_{0,\lambda} N(E + K)^{-1} D^{n-1} R_{0,\lambda}, \quad (20)$$

где $K = D^{n-1} R_{0,\lambda} N$, $D = d/dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y = R_\lambda f$. Тогда $By^{(n)} - \lambda y = f - Ny^{(n-1)}$. Отсюда

$$y = R_{0,\lambda} f - R_{0,\lambda} Ny^{(n-1)}. \quad (21)$$

Дифференцируем (21) $n-1$ раз. Тогда

$$y^{(n-1)} = D^{n-1} R_{0,\lambda} f - Ky^{(n-1)}. \quad (22)$$

Пусть $K(x, t, \rho) = (K_{ij}(x, t, \rho))_1^2$ – ядро интегрального оператора K . Тогда имеем

$$K_{ij}(x, t, \rho) = \sum_{k=1}^2 \int_0^{1/2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G_{0,i,k}(x, \tau, \lambda) N_{k,j}(\tau, t) d\tau.$$

Отсюда по лемме 5 и лемме 4 [19, с. 389] получаем, что $K_{ij}(x, t, \rho) = o(1)$ при $|\rho| \rightarrow \infty$ равномерно по x, t . Поэтому оператор $E + K$ обратим и из (21), (22) легко следует (20). Теорема доказана.

3. Вспомогательные предложения.

1. Обозначим через $\sigma(x, \rho, m)$ одну из функций $\sigma_i(x, \rho + 2m\pi)$, $\sigma_i(1/2 - x, \rho + 2m\pi)$, $i = 1, \dots, 2n$; $w(x, t, \rho, m)$ — одну из функций $\varepsilon(x, t) \exp(\rho + 2m\pi)\omega(x - t)$, когда ω — одно из чисел ω_k, ω_{n+k} при $k = n/2 + 1, \dots, n$; $\varepsilon(t, x) \exp(\rho + 2m\pi)\omega(x - t)$, когда ω — одно из ω_k, ω_{n+k} при $k = 1, \dots, n/2$. Имеет место очевидная формула

$$\sigma(x, \rho, m) = \sigma(x, \rho, 0)\sigma(x, 0, m). \quad (23)$$

Операторы

$$P_m g(x) = \int_0^{1/2} p(x, t, \rho, m) g(t) dt$$

будем называть *элементарными*. Здесь $p(x, t, \rho, m) = \sigma(x, \rho, m)\sigma(t, \rho, m)$ или $p(x, t, \rho, m) = w(x, t, \rho, m)$.

ЛЕММА 6. Если ядра всех операторов P_m отличаются лишь параметром m и ρ принадлежит ограниченной области, то

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|P_m g\|^2 \leq C \|g\|^2, \quad (24)$$

где C не зависит от ρ и нормы берутся в $L_2[0, 1/2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $p(x, t, \rho, m) = \sigma(x, \rho, m)\sigma(t, \rho, m)$. Тогда $P_m g = \sigma(x, \rho, m)b_m(g, \rho)$, где

$$b_m(g, \rho) = \int_0^{1/2} g(t)\sigma(t, \rho, m) dt.$$

Так как в силу (23)

$$b_m(g, \rho) = \int_0^{1/2} g_1(t, \rho)\sigma(t, 0, m) dt,$$

где $g_1(t, \rho) = g(t)\sigma(t, \rho, 0)$, то ряд $\sum_{m=1}^{\infty} |b_m(g, \rho)|^2$ по лемме 3.2 [9, с. 213] сходится и его сумма ограничена по ρ . Поскольку $|\sigma(x, \rho, m)| \leq 1$, то $\|P_m g\| \leq |b_m(g, \rho)|$, и (24) в этом случае установлено.

Пусть теперь $p(x, t, \rho, m) = w(x, t, \rho, m)$ и для определенности пусть $w(x, t, \rho, m) = \varepsilon(x, t) \exp(\rho + 2m\pi)\omega(x - t)$. Тогда

$$P_m g = \int_0^x g_2(x, t, \rho) \exp 2m\pi\omega t dt,$$

где $g_2(x, t, \rho) = g(x - t) \exp \rho\omega t$. Фиксируем x . Тогда опять по лемме 3.2 [9]

$$\sum_{m=1}^{\infty} |P_m g|^2 \leq C \int_0^x |g(x - t)|^2 dt \leq C \|g\|^2,$$

где C не зависит от x и ρ . Интегрируя это неравенство по x от 0 до $1/2$, приходим к (24). Лемма доказана.

2. Пусть $\lambda = \rho^n$, $\rho \in S_{1,\delta}$, $\rho = \rho_1 + 2m\pi$ и ρ_1 принадлежит ограниченной области комплексной плоскости.

ЛЕММА 7. Каждая компонента вектор-функций $\rho^{n-1-j} D^j R_{0,\lambda} f$, $j = 0, \dots, n-1$, есть конечная сумма с ограниченными по ρ_1 и t коэффициентами элементарных операторов при всевозможных вариантах ядер $p(x, t, \rho_1, m)$, причем если $p(x, t, \rho_1, m) = w(x, t, \rho_1, m)$, то коэффициенты при $P_m g$ являются постоянными числами, не зависящими от ρ_1 и m ; $g(x)$ – одна из компонент вектора $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 имеем

$$D^j R_{0,\lambda} f = \int_0^{1/2} g_{x^j}^{(j)}(x, t, \rho) f(t) dt + \rho^{1-n} \int_0^{1/2} T_{x^j}^{(j)}(x, t, \rho) f(t) dt.$$

Далее,

$$\rho^{n-1-j} \int_0^{1/2} g_{x^j}^{(j)}(x, t, \rho) f(t) dt$$

есть вектор-функция, компоненты которой есть линейные комбинации с постоянными коэффициентами операторов $P_m g$, когда $p(x, t, \rho_1, m) = w(x, t, \rho_1, m)$;

$$\rho^{-j} \int_0^{1/2} T_{x^j}^{(j)}(x, t, \rho) f(t) dt$$

есть вектор-функция, компоненты которой есть линейные комбинации операторов $P_m g$, когда $p(x, t, \rho_1, m) = \sigma(x, \rho_1, m) \sigma(t, \rho_1, m)$ с коэффициентами, являющимися ограниченными функциями по m и ρ_1 . Лемма доказана.

Пусть Γ_m – образ в λ -плоскости окружности γ_m из определения $S_{1,\delta}$ и без ограничения общности будем считать, что γ_m находятся целиком в S_1 (в противном случае так же, как и в [20, с. 55], переходим к смещенному сектору). Тогда если $\rho \in \gamma_m$, то $\rho_1 = \rho - 2m\pi$ принадлежит фиксированной окружности радиуса δ . Пусть I – любой конечный набор достаточно больших номеров m .

ЛЕММА 8. Имеет место оценка

$$\left\| \sum_{m \in I} \int_{\Gamma_m} R_{0,\lambda} d\lambda \right\| \leq C,$$

где C не зависит от I и норма берется в пространстве операторов в $L_2^2[0, 1/2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sum_{m \in I} \int_{\Gamma_m} R_{0,\lambda} f d\lambda = \int_{\gamma} \Phi(f, \rho_1) d\rho_1,$$

где

$$\Phi(f, \rho_1) = n \sum_{m \in I} R_{0,\lambda} f \Big|_{\lambda=(\rho_1+2m\pi)^n} (\rho_1 + 2m\pi)^{n-1}.$$

По лемме 7 каждую компоненту вектор-функции $\Phi(f, \rho_1)$ представим в виде конечной суммы операторов

$$\Sigma = \sum_{m \in I} \alpha(\rho_1, m) P_m g, \quad (25)$$

где $\alpha(\rho_1, m)$ – ограниченные функции по ρ_1 и m ; ядра $p(x, t, \rho_1, m)$ состоят из одних и тех же функций, отличающихся лишь параметром m . Если $p(x, t, \rho_1, m) = w(x, t, \rho_1, m)$, то $\alpha(\rho_1, m)$ – константы, не зависящие от ρ_1 и m , и поэтому в этом случае $\int_{\gamma} \Sigma d\rho_1 = 0$. Поэтому рассмотрим лишь суммы (25), когда $p(x, t, \rho_1, m) = \sigma(x, \rho_1, m)\sigma(t, \rho_1, m)$. В этом случае

$$\Sigma = \sum_{m \in I} \alpha(\rho_1, m) \sigma_m(x, \rho_1, m) b_m(g, \rho_1),$$

и покажем, что по норме $L_2[0, 1/2]$

$$\|\Sigma\| \leq C \|g\|, \quad (26)$$

причем константа C не зависит от I и ρ_1 . Пусть $u(x) \in L_2[0, 1/2]$. Тогда

$$(\Sigma, u) = \sum_{m \in I} \alpha(\rho_1, m) b_m(u, \rho_1) b_m(g, \rho_1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |(\Sigma, u)| &\leq C \sum_{m=1}^{\infty} |b_m(u, \rho_1)| |b_m(g, \rho_1)| \\ &\leq C \left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m(u, \rho_1)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m(g, \rho_1)|^2 \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Значит, по теореме Банаха–Штейнгауза функционалы (Σ, u) имеют нормы $\|\Sigma\|$, ограниченные константой, не зависящей от I и ρ_1 . Теперь, применяя опять теорему Банаха–Штейнгауза к операторам Σ , получим оценку (26). Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *Имеет место оценка*

$$\left\| \sum_{m \in I} \int_{\Gamma_m} R_{0,\lambda} N(E + K)^{-1} D^{n-1} R_{0,\lambda} d\lambda \right\| \leq C,$$

где C не зависит от I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве предыдущей леммы, имеем

$$\sum_{m \in I} \int_{\Gamma_m} R_{0,\lambda} N(E + K)^{-1} D^{n-1} R_{0,\lambda} d\lambda = \int_{\gamma} \Phi(f, \rho_1) d\rho_1,$$

где теперь

$$\Phi(f, \rho_1) = n \sum_{m \in I} R_{0,\lambda} N(E + K)^{-1} D^{n-1} R_{0,\lambda} f \Big|_{\lambda=(\rho_1+2m\pi)^n} = (\rho_1 + 2m\pi)^{n-1}.$$

Каждую компоненту вектор-функции $\Phi(f, \rho_1)$ представим в виде суммы операторов вида

$$\Sigma = \sum_{m \in I} \alpha(\rho_1, m) P_m M_m P_m g,$$

где M_m — одна из компонент интегрального оператора $N(E+K)^{-1}$ при $\lambda = (\rho_1 + 2m\pi)^n$ и ядра операторов P_m , стоящих перед M_m в $P_m M_m P_m$, отличаются лишь параметром m и таким же свойством обладают ядра операторов P_m после M_m в $P_m M_m P_m$. Пусть $u(x) \in L_2[0, 1/2]$. Тогда

$$(\Sigma, u) = \sum_{m \in I} \alpha(\rho_1, m) (M_m P_m g, P_m^* u).$$

Так как ядра операторов M_m ограничены по m и ρ_1 , отсюда получаем оценку

$$|(\Sigma, u)| \leq C \sum_{m \in I} \|P_m g\| \|P_m^* u\|. \quad (27)$$

Аналогично лемме 6 можно показать, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|P_m^* u\|^2 \leq c \|u\|^2.$$

Поэтому из (27) в силу леммы 6 следует оценка $|(\Sigma, u)| \leq C \|g\| \|u\|$. Значит, $\|\Sigma\| \leq C$ и лемма доказана.

Из теоремы 3 и лемм 8, 9 получаем

ТЕОРЕМА 4. *Имеет место оценка*

$$\left\| \sum_{m \in I} \int_{\Gamma_m} R_\lambda d\lambda \right\| \leq C,$$

равномерная по I .

4. Базисы Рисса из собственных и присоединенных функций. Теперь приступаем к установлению базисности по Риссу системы СПФ оператора A .

ЛЕММА 10. *Все достаточно большие по модулю собственные значения оператора L однократны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 такие собственные значения оператора L_0 , образы которых в ρ -плоскости попадают в S_1 , однократны. Далее, воспользуемся теоремой 3. Так как компоненты ядра оператора $R_{0,\lambda} N$ суть $o(\rho^{1-n})$ при $|\rho| \rightarrow \infty$ и компоненты ядра $(E+K)^{-1} D^{n-1} R_{0,\lambda}$ суть $O(1)$, то в $S_{1,\delta}$ компоненты ядра $R_\lambda - R_{0,\lambda}$ суть $o(\rho^{1-n})$ при $|\rho| \rightarrow \infty$. Но известно, что если

$$R_\lambda f = \int_0^{1/2} G(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

то $\text{tr } A_m$, где

$$A_m = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \int_0^{1/2} G(x, x, \lambda) dx d\lambda$$

и $\text{tr } A_m$ – след матрицы A_m – равен кратности собственного значения λ_m , а так как при больших m $\text{tr } A_m^0$, где

$$A_m^0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \int_0^{1/2} G_0(x, x, \lambda) dx d\lambda,$$

равен 1, то и $\text{tr } A_m = 1$. Аналогичное рассуждение справедливо и для тех λ_m , образы которых в ρ -плоскости не попадают в S_1 . Лемма доказана.

Положим

$$E(\lambda_m) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_\lambda d\lambda,$$

где теперь λ_m , $m = 1, 2, \dots$, – все собственные значения оператора L и Γ_m – замкнутый контур в λ -плоскости, содержащий лишь одно собственное значение λ_m .

ЛЕММА 11. Если $f(x) \in L_2^2[0, 1/2]$ и $E(\lambda_m)f = 0$, $m = 1, 2, \dots$, то $f(x) = 0$ почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $E(\lambda_m)f = 0$, $m = 1, 2, \dots$, то $R_\lambda f$ – целая по λ , а в силу теоремы 3 и следствия леммы 5 отсюда по теореме Лиувилля $R_\lambda f \equiv 0$. Отсюда $f(x) = 0$ почти всюду.

ЛЕММА 12. Если система вектор-функций $\{(\varphi_k(x))\}_1^\infty$, где

$$\varphi_k(x) = (\varphi_{1,k}(x), \varphi_{2,k}(x))^T, \quad k = 1, 2, \dots,$$

образует базис Рисса в $L_2^2[0, 1/2]$, то система $\{g_k(x)\}_1^\infty$, где $g_k(x) = \varphi_{2,k}(1/2 - x)$ при $x \in [0, 1/2]$ и $g_k(x) = \varphi_{1,k}(x - 1/2)$ при $x \in [1/2, 1]$, образует базис Рисса в $L_2[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что система $\{r_k(x)\}_1^\infty$, где $r_k(x) = \varphi_{1,k}(x)$ при $x \in [0, 1/2]$ и $r_k(x) = \varphi_{2,k}(-x)$ при $x \in [-1/2, 0]$, образует базис Рисса в $L_2[-1/2, 1/2]$. В самом деле, пусть $f(x) \in L_2[-1/2, 1/2]$. Образует $F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T$, где $F_1(x) = f(x)$, $F_2(x) = f(-x)$ и $x \in [0, 1/2]$. Пусть система вектор-функций $\{\psi_k(x)\}_1^\infty$, где $\psi_k(x) = (\psi_{1,k}(x), \psi_{2,k}(x))^T$, биортогональна системе $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$. Тогда имеет место разложение

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (F, \psi_k)_2 \varphi_k(x), \quad (28)$$

где $(F, \psi_k)_2$ – скалярное произведение в $L_2^2[0, 1/2]$.

Положим $u_k(x) = \psi_{1,k}(x)$ при $x \in [0, 1/2]$ и $u_k(x) = \psi_{2,k}(-x)$ при $x \in [-1/2, 0]$. Тогда $(F, \psi_k)_2 = (f, u_k)$, где (f, u_k) – скалярное произведение в $L_2[-1/2, 1/2]$. Поэтому (28) переходит в

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k) r_k(x). \quad (29)$$

Далее, $(r_k, u_s) = (\varphi_k, \psi_s)_2 = \delta_{k,s}$. Поэтому (29) представляет собой разложение Фурье функции $f(x)$ по системе $\{r_k(x)\}_1^\infty$, для которой $\{u_k(x)\}_1^\infty$ является биортогональной. Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, u_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(F, \psi_k)_2|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |(f, r_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(F, \varphi_k)_2|^2 < \infty,$$

то $\{r_k(x)\}_1^\infty$ образует базис Рисса в $L_2[-1/2, 1/2]$. А тогда система $\{g_k(x)\}_1^\infty$ образует базис Рисса в $L_2[0, 1]$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. Система СПФ оператора A образует базис Рисса в $L_2[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E^*(\lambda_k)$ – оператор, сопряженный к $E(\lambda_k)$. Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E^*(\lambda_k) f \quad (30)$$

безусловно сходится к $f(x)$ в $L_2^2[0, 1/2]$. Пусть уже в (30) система $\{\lambda_k\}_1^\infty$ записана в каком-нибудь наперед заданном порядке. По лемме 11 система СПФ $\{\psi_k(x)\}_1^\infty$ оператора L^* полна в $L_2^2[0, 1/2]$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда существуют числа α_k , $k = 1, \dots, m$, и номер m такие, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k \right\| \leq \varepsilon.$$

Пусть

$$S_q = \sum_{k=1}^q E^*(\lambda_k).$$

Тогда при $q > m$

$$\begin{aligned} \|f - S_q f\| &\leq \left\| f - \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k - S_q \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k \right) \right\| + \left\| S_q \left(f - \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k \right) \right\| \\ &\leq \varepsilon + \|S_q\| \varepsilon \leq (1 + c) \varepsilon, \end{aligned}$$

так как по теореме 4 $\|S_q\|$ ограничена по q . Отсюда по лемме 10 следует, что система $\{\psi_k(x)\}_1^\infty$ образует перестановочный базис, а система $\{\psi_k(x)/\|\psi_k\|\}_1^\infty$ – базис Рисса. Следовательно, биортогональная к этой последней системе, которую обозначим через $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ и которая состоит из СПФ оператора L , – тоже базис Рисса. По лемме 12 система $\{g_k(x)\}_1^\infty$, где $g_k(x) = (\Gamma \varphi_k(1/2 - x))_2$ при $x \in [0, 1/2]$ и $g_k(x) = (\Gamma \varphi_k(x - 1/2))_1$ при $x \in [1/2, 1]$, образует базис Рисса в $L_2[0, 1]$ и в то же время по теореме 2 она является системой СПФ оператора A . Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность А. А. Шкаликову за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хромов А. П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 932–942.
- [2] Хромов А. П. Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // Сб. статей, посвященный 70-летию П. Л. Ульянова. М., 1999. С. 255–266.
- [3] Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 10. С. 33–50.
- [4] Михайлов В. П. О базисах Рисса в $L_2[0, 1]$ // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 5. С. 981–984.
- [5] Кесельман Г. М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Матем. 1964. № 2. С. 82–93.
- [6] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 3. М.: Мир, 1974.

- [7] Шкалик А. А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // УМН. 1979. Т. 34. № 5. С. 235–236.
- [8] Шкалик А. А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. 1982. № 6. С. 12–21.
- [9] Шкалик А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.
- [10] Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 3. С. 384–396.
- [11] Радзиевский Г. В. Краевые задачи и связанные с ними модули непрерывности // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 3. С. 87–90.
- [12] Баскаков А. Г., Кацаран Т. К. Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1424–1433.
- [13] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности в L_p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений и разложений по системам экспонент // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 789–793.
- [14] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений I // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 5. С. 771–794.
- [15] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений II // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 6. С. 980–1009.
- [16] Пальцев Б. В. Разложения по собственным функциям интегральных операторов свертки на конечном интервале с ядрами, преобразования Фурье которых рациональны. “Слабо несамо-сопряженные регулярные ядра” // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 3. С. 591–634.
- [17] Курдюмов В. П. Необходимые и достаточные условия оптимальности для дифференциально-операторного уравнения. Деп. ВИНТИ 02.07.85 № 4781. Саратов: Сарат. ун-т, 1985.
- [18] Курдюмов В. П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций некоторых интегральных операторов // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 555–564.
- [19] Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114(156). № 3. С. 378–405.
- [20] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Поступило
25.11.2002
Исправленный вариант
03.11.2003