Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. О. Гринив, С. Ю. Доброхотов, А. А. Шкаликов, Операторная модель задачи о колебаниях жидкости на упругом основании, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 66–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm920>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 04:12:24

УДК 517

ОПЕРАТОРНАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Р. О. Гринив, С. Ю. Доброхотов, А. А. Шкаликов

В работе исследуется задача о малых колебаниях жидкости в слое конечной глубины на подстилающем упругом основании. Выписаны и объяснены уравнения задачи. Основная цель работы – представить эти уравнения в форме $\mathcal{A}\dot{w}(t) + \mathcal{T}w(t) = 0$, где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{T}$ – положительные операторы в некотором естественно связанном с задачей функциональном пространстве. Дальнейшая цель – изучить спектр линейного пучка $\lambda\mathcal{A} + \mathcal{T}$, определяющего динамику задачи.

Библиография: 19 названий.

Введение. Волновые движения жидкости в слое конечной глубины в большинстве известных нам работ рассматривались в предположении, что дно является абсолютно твердым. Для многих приложений это разумно. Однако есть задачи, представляющие существенный физический интерес, для которых такое предположение неприемлемо. В частности, такой является задача о поверхностных волнах, возбужденных источником, находящимся под основанием. Наиболее важным примером является задача о волнах цунами, вызываемых сейсмическими явлениями в коре земли на дне океана.

По-видимому, первым, кто начал изучение линейных моделей таких задач, был Подъяпольский [1]. Он рассмотрел весьма сложную модель, учитывающую турбулентные движения жидкости и силы гравитации внутри упругого основания, предполагая, что основание есть полупространство (плоское дно). В последующих работах [2], [3] рассматривались более упрощенные модели. Жидкость предполагалась потенциальной, а гравитационные силы в упругой среде не учитывались. Но и в такой постановке задача не была исследована достаточно полно. Здесь же отметим, что рассматриваемая задача имеет тесное отношение к теории оболочек, наполненных жидкостью (см., например, [4]), но имеются и существенные различия.

Рассматриваемая ниже система уравнений описывает модель, в которой жидкость предполагается идеальной и невращающейся. В отличие от [5] на поверхности жидкости учитываются силы тяжести (фактор, который может быть причиной возникновения поверхностных волн), и в отличие от [6] гравитационные (Архимедовы) силы учитываются также на границе раздела жидкости и упругой среды. Итак, рассматривается следующая система уравнений:

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-01000, № 00-15-96100 (Р. О. Гринив и А. А. Шкаликов), грант № 99-01-00415 (С. Ю. Доброхотов).

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad x \in S_0, \quad (0.1)$$

$$\Delta v = 0, \quad x \in \Omega_0, \quad (0.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = u_n := (\vec{u}, \vec{n}), \quad x \in S_1, \quad (0.3)$$

$$\rho \mu^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \vec{n} + \mu^2 (\rho - 1) u_3 n_3 \vec{e}_3 = \sigma_n(\vec{u}), \quad x \in S_1, \quad (0.4)$$

$$\mu^2 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \Delta^* \vec{u}, \quad x \in \Omega_1, \quad (0.5)$$

$$\vec{u} \rightarrow 0 \quad \text{при } x_3 \rightarrow -\infty. \quad (0.6)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; $\Omega_0 := \{x \mid -H(x_1, x_2) < x_3 < 0\}$ – область, заполненная жидкостью, $S_0 := \{x \mid x_3 = 0\}$ – ее внешняя поверхность, $S_1 := \{x \mid x_3 = -H(x_1, x_2)\}$ – поверхность раздела жидкости и упругой среды, заполняющей объем $\Omega_1 := \{x \mid x_3 < -H(x_1, x_2)\}$; $H(x_1, x_2)$ – гладкая положительная функция, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор нормали к S_0 и S_1 , направленный во внешнюю сторону области Ω_0 .

Функция $v = v(x, t)$ в уравнениях (0.1)–(0.5) обозначает потенциал перемещений жидкости; $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$ – вектор смещений упругого дна; $\sigma_n(\vec{u})$ – вектор нормальных граничных напряжений с компонентами

$$\sigma_{in}(\vec{u}) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u}) n_j,$$

где

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = (c^2 - 2) \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

– тензор напряжений; $\Delta^* \vec{u} = \Delta \vec{u} + (c^2 - 1) \nabla \operatorname{div} \vec{u}$ – дифференциальный оператор теории упругости; $\vec{e}_3 := (0, 0, 1)$; $\rho := \rho_w / \rho_c < 1$ – отношение плотности жидкости ρ_w и плотности коры земли ρ_c ; $c := c_l / c_t > \sqrt{2}$ – отношение скоростей продольных и поперечных волн в коре; $\mu := Lg / c_t$; L – характерный размер, g – ускорение свободного падения.

Прежде чем формулировать основные цели статьи, поясним, что уравнения (0.1)–(0.5) могут быть получены с помощью следующего вариационного принципа (мы используем безразмерные координаты). Пусть $\vec{u}(x, t)$, $x \in \Omega_0$, – вектор смещений жидкости. Если жидкость предполагается потенциальной, то (как обычно, точка означает дифференцирование по времени)

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{при } x \in \Omega_0. \quad (0.7)$$

Функция $\vec{u}(x, t)$ на поверхности основания S_1 удовлетворяет условию непротекания

$$(\vec{u}^+, \vec{n}) = (\vec{u}^-, \vec{n}) \quad \text{при } x \in S_1, \quad (0.8)$$

где $\vec{u}^+$ и $\vec{u}^-$ – граничные значения вектора $\vec{u}(x, t)$ на S_1 сверху и снизу соответственно.

Кинетическая энергия T рассматриваемой системы равна

$$T = \frac{\rho_w}{2} \int_{\Omega_0} |\vec{u}|^2 dx + \frac{\rho_c}{2} \int_{\Omega_1} |\vec{u}|^2 dx.$$

Потенциальная энергия состоит из энергии напряжений упругой коры, силы притяжения на поверхности жидкости и на границе раздела жидкости и упругой среды (энергии архимедовых сил, ср. [7]–[10]):

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{\rho_c}{2} \int_{\Omega_1} \left\{ c_t^2 \sum_{i=1}^3 \left(|\nabla u_i|^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + (c_l^2 - 2c_t^2) |\operatorname{div} \vec{u}|^2 \right\} dx \\ & + \frac{\rho_w}{2} \int_{S_0} |u_3|^2 ds + \frac{\rho_w - \rho_c}{2} \int_{S_1} n_3 |u_3|^2 ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим вариационную задачу

$$\int_{t_1}^{t_2} L_0(t, u, \dot{u}, \nabla u) dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt \rightarrow \min, \quad t_1 < t_2, \quad (0.9)$$

с граничными условиями

$$L_0(t_1) = L_0(t_2) = 0$$

и связями (0.7), (0.8). Следуя [9], [10], введем множители Лагранжа $\dot{v}(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ в условия (0.7) и (0.8) соответственно (для удобства мы берем $\dot{v}$ вместо v). Тогда получим эквивалентную задачу с лагранжианом

$$L(t, \vec{u}, \dot{\vec{u}}, \nabla \vec{u}, \nabla \dot{\vec{u}}, \dot{v}, \varphi) = T - \Pi + \int_{\Omega_0} \dot{v} \operatorname{div} \vec{u} dx + \int_{S_1} \varphi (\vec{u}^+ - \vec{u}^-, \vec{n}) ds.$$

ЛЕММА. *Уравнение Эйлера–Лагранжа для вариационной задачи*

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t) dt \rightarrow \min, \quad L(t_1) = L(t_2) = 0,$$

записанной в безразмерных координатах, совпадает с системой (0.1)–(0.5). Более того, $u = \nabla v$ в Ω_0 и $\varphi = \rho_w \ddot{v}$ на S_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно применить формулу Стокса к уравнению Эйлера–Лагранжа, исключить φ , выразить $\vec{u}(x, t)$ при $x \in \Omega_0$ в терминах функции $v(x, t)$ и перейти к безразмерным координатам $t = \sqrt{L/g} t_1$, $x = Lx_1$, $v = L^2 v_1$ и $\vec{u} = L \vec{u}_1$. Все вычисления проводятся непосредственно и здесь опущены.

Основная цель статьи – представить задачу (0.1)–(0.6) в операторном виде

$$\mathcal{A} \ddot{w}(t) + \mathcal{T} w(t) = 0, \quad (0.10)$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{T}$ – самосопряженные операторы в подходящем гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и изучить спектр линейного пучка $\lambda \mathcal{A} + \mathcal{T}$, который в существенном определяет динамику уравнения (0.10). Важнейший момент при реализации операторной трактовки задачи – выбор функций, выступающих в качестве элементов функционального пространства, и конструкция самих пространств. Один такой выбор – функции $v_0 := v|_{S_0}$, $v_1 := v|_{S_1}$ и $\vec{u}$ – был предложен в [11]. Однако при таком выборе саму задачу не удалось представить в форме (0.10) с самосопряженными коэффициентами, хотя в [11] была найдена последовательность задач с самосопряженными коэффициентами, аппроксимирующих исходную.

Мы предлагаем другой выбор переменных, который представляется более естественным как с физической, так и с математической точек зрения. А именно, в качестве элементов ниже конструируемого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ выступают вектор-функции

$$\vec{w}(x, t) = \begin{pmatrix} \eta(x_1, x_2, t) \\ \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) \end{pmatrix},$$

где $\eta := (\partial v / \partial x_3)|_{S_0}$ – вертикальные перемещения жидкости относительно невозмущенной поверхности S_0 . При этом операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{T}$ оказываются положительными в $\mathcal{H}$, а энергия системы

$$(\mathcal{A}\dot{w}, \dot{w})_{\mathcal{H}} + (\mathcal{T}w, w)_{\mathcal{H}}$$

совпадает с $T - \Pi$ в (0.9) и оказывается независимой от времени. Это подтверждает правильность выбора переменных и функционального пространства. Отметим, что в работах [2], [9], [11] оценки решений системы по времени t получались экспоненциальными.

1. Функциональные пространства. Вспомогательные результаты. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – неограниченная область с равномерно липшицевой границей $\partial\Omega$. Напомним [12, § 1.1.9], что это условие означает следующее: в каждой точке $x \in \partial\Omega$ найдется окрестность U такая, что в некоторой декартовой системе координат (y_1, y_2, y_3) множество $U \cap \Omega$ определяется неравенством $y_3 < f_x(y_1, y_2)$, где функция f_x удовлетворяет условию Липшица

$$|f_x(y) - f_x(y')| \leq C|y - y'|,$$

причем постоянная C не зависит от x .

Через $W_2^1(\Omega)$ обозначим пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right)^{1/2}. \quad (1.1)$$

Обозначение $L_2^1(\Omega)$ резервируем для функций $u(x)$ таких, что $\partial u / \partial x_j \in L_2(\Omega)$ для всех $j = 1, 2, 3$. Через $V_2^1(\Omega)$ обозначим пополнение пространства $W_2^1(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{V_2^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \quad (1.2)$$

(так как Ω – бесконечная область, то $W_2^1(\Omega)$ не содержит ненулевых констант, поэтому (1.2) – норма). Очевидно, $V_2^1(\Omega)$ содержит $W_2^1(\Omega)$, но не содержится в $L_2(\Omega)$. Например, если $\Omega = \mathbb{R}^3$ и $\chi(x)$ – гладкая функция, аннулирующаяся в окрестности начала координат, то $\chi(x)|x|^{-1-\varepsilon} \in V_2^1(\Omega)$ не принадлежит $L_2(\Omega)$. Однако согласно неравенству Соболева

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}, \quad p \geq 6, \quad (1.3)$$

поэтому $V_2^1(\Omega)$ есть подмножество $L_6(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Неравенство (1.3) доказано в [12] для бесконечно гладких функций с компактным носителем в Ω . Чтобы показать, что оно остается справедливым для всех функций из $V_2^1(\Omega)$, воспользуемся следующим результатом [13, гл. VI, § 3]. Для областей Ω с равномерно липшицевой границей существует ограниченный оператор продолжения

$$\mathcal{E}: V_2^1(\Omega) \cap L_6(\Omega) \rightarrow V_2^1(\mathbb{R}^3) \cap L_6(\mathbb{R}^3).$$

Поэтому для $u \in V_2^1(\Omega)$ и $\tilde{u} := \mathcal{E}u \in V_2^1(\mathbb{R}^3)$ справедлива оценка

$$\|u\|_{L_6(\Omega)} \leq \|\tilde{u}\|_{L_6(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\tilde{u}\|_{V_2^1(\mathbb{R}^3)} \leq C_1 \|u\|_{V_2^1(\Omega)}.$$

Полезно отметить следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Имеем $V_2^1(\Omega) = L_6(\Omega) \cap L_2^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $V_2^1(\Omega) \subset L_6(\Omega) \cap L_2^1(\Omega)$ следует из (1.2) и (1.3). Обратно, пусть $u \in L_6(\Omega) \cap L_2^1(\Omega)$. Выберем функции $\eta(x)$ и $\nu(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ такие, что $\eta(x) \geq 0$, $\int \eta(x) dx = 1$, $0 \leq \nu(x) \leq 1$, $\nu(x) = 1$ при $|x| \leq 1$, и положим $\eta_\delta(x) := \delta^{-3}\eta(x/\delta)$, $\nu_\varepsilon(x) := \nu(x/\varepsilon)$. Тогда семейство функций

$$u_{\varepsilon,\delta}(x) := \nu_\varepsilon(x)u(x) * \eta_\delta(x)$$

(здесь “*” – свертка функций) обладает свойствами

$$u_{\varepsilon,\delta}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \nabla u_{\varepsilon,\delta}(x) = \nabla u(x) \quad \text{в } (L_2(\mathbb{R}^3))^3.$$

Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго утверждения заметим, что $\nabla u_{\varepsilon,\delta}(x) \rightarrow \nabla(\nu_\varepsilon u(x))$ при $\delta \rightarrow 0$ в норме пространства $(L_2(\mathbb{R}^3))^3$ (см. [13, гл. III, § 2]). Далее,

$$\nabla(\nu_\varepsilon u(x)) = \nabla \nu_\varepsilon \cdot u(x) + \nu_\varepsilon \cdot \nabla u(x) \rightarrow \nabla u(x) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

в норме $(L_2(\mathbb{R}^3))^3$, поскольку $\nu_\varepsilon \rightarrow 1$ и

$$\begin{aligned} \|\nabla \nu_\varepsilon \cdot u(x)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \nu_\varepsilon(x)|^2 |u(x)|^2 dx \\ &\leq \left(\int_{|\varepsilon x| \geq 1} |\nabla \nu_\varepsilon(x)|^3 dx \right)^{2/3} \left(\int_{|\varepsilon x| \geq 1} |u(x)|^6 dx \right)^{1/3} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из условия $u(x) \in L_6(\Omega)$ и неравенства

$$\int_{|\varepsilon x| \geq 1} |\nabla \nu_\varepsilon(x)|^3 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_y \nu(y)|^3 dy < \infty.$$

Итак, ограничения функций $u_{\varepsilon,\delta}(x)$ на Ω сходятся к $u(x)$ при $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$ в $V_2^1(\Omega)$ -норме, а потому $u(x) \in V_2^1(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Аналогично вводятся пространства $V_2^s(G)$ при любом $s \geq 0$ и области $G \subset \mathbb{R}^n$ с равномерно липшицевой границей ∂G . Пространство $V_2^s(\mathbb{R}^n)$ есть пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|u\|_{V_2^s(\mathbb{R}^n)} = \left\| \frac{1}{(2\pi)^n} \iint |p|^s e^{ip(x-y)} u(y) dy dp \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

где $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ и $|p| = \sqrt{p_1^2 + \dots + p_n^2}$. Пространство $V_2^s(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, можно определить как совокупность сужений на область G функций из $V_2^s(\mathbb{R}^n)$ с нормой факторпространства. Если G – неограниченная область и $s < n/2$, то $V_2^s(G)$ – гильбертово пространство и совпадает с $L_q(G) \cap L_2^s(G)$, где $q = 2n/(n - 2s)$. Доказательство проводится так же, как в предложении 1.1; обобщение неравенства (1.3) имеется в [12, § 1.4.1].

Далее, для области G с равномерно липшицевой границей оператор взятия следа $\Gamma: C^\infty(\overline{G}) \rightarrow C(\partial G)$ продолжается при $s > 1/2$ как ограниченный оператор (см. [13, гл. VI])

$$\Gamma: V_2^s(G) \rightarrow V_2^{s-1/2}(\partial G).$$

Этот оператор сюръективен, т.е. существует оператор продолжения $e: V_2^{s-1/2}(\partial G) \rightarrow V_2^s(G)$ такой, что $\Gamma \circ e$ есть единичный оператор в $V_2^{s-1/2}(\partial G)$.

Докажем еще одну важную лемму. Для функций $\vec{u} \in \mathbb{W}_2^1(\Omega) := (W_2^1(\Omega))^3$ положим

$$e_{ij}(\vec{u}) := \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad e(\vec{u}) := \left(\sum_{i,j=1}^3 |e_{ij}(\vec{u})|^2 \right)^{1/2}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть Ω – неограниченная область с равномерно липшицевой границей $\partial\Omega$. Тогда норма

$$\|\vec{u}\|_{E(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |e(\vec{u})|^2 dx \right)^{1/2}$$

эквивалентна норме пространства $\mathbb{V}_2^1(\Omega) := (V_2^1(\Omega))^3$. Более того, справедливо неравенство

$$2\|\vec{u}\|_{\mathbb{V}_2^1(\Omega)}^2 \leq \|\vec{u}\|_{E(\Omega)}^2 \leq 4\|\vec{u}\|_{\mathbb{V}_2^1(\Omega)}^2. \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правая оценка в (1.4) следует из неравенства

$$|e_{ij}(\vec{u})|^2 \leq 2 \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|^2.$$

Левая оценка – неравенство типа Корна. Заметим, что множество $(C_0^\infty(\bar{\Omega}))^3$ гладких функций с компактным носителем в $\bar{\Omega}$ является плотным подмножеством в $\mathbb{W}_2^1(\Omega)$ в силу существования ограниченного оператора продолжения $\mathcal{E}: W_2^1(\Omega) \rightarrow W_2^1(\mathbb{R}^3)$ (ср. [13, гл. VI, § 3]). Поэтому достаточно доказать (1.4) для $\vec{u} \in (C_0^\infty(\bar{\Omega}))^3$. Пусть

$$\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in (C_0^\infty(\bar{\Omega}))^3, \quad \eta_j(x) \geq 0, \quad \int \eta_j(x) = 1, \quad \vec{\eta}_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-3} \vec{\eta}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Положим $\vec{u}_\varepsilon(x) := \vec{u}(x) * \vec{\eta}_\varepsilon(x) \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^3))^3$. Тогда для $\vec{u}_\varepsilon(x)$ неравенство (1.4) выполняется согласно [14]. Так как $\vec{u}_\varepsilon(x) \rightarrow \vec{u}(x)$ в $\mathbb{W}_2^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (ср. [13]), то (1.4) остается справедливым для всех функций $\vec{u}(x) \in \mathbb{V}_2^1(\Omega)$.

В следующих двух пунктах мы построим операторы, которые играют основную роль в редукции задачи (0.1)–(0.5) к операторной модели. Оператор $\mathbb{A}$ связан с первыми тремя уравнениями задачи и определен в пространстве $L_2(S_0) \times L_2(S_1)$, а операторы $\mathbb{D}$, $\mathbb{B}_0$ и $\mathbb{B}_1$ порождены уравнениями в упругом основании и на его границе.

2. Конструкция оператора $\mathbb{A}$. Пусть $\dot{V}_2^1(\Omega_0)$ – замыкание $C_0^\infty(\Omega_0)$ в норме (1.2). Поскольку область Ω_0 ограничена в направлении x_3 -оси, для функций из $C_0^\infty(\Omega_0)$ выполняется неравенство Фридрихса. Следовательно, $\dot{V}_2^1(\Omega_0)$ совпадает с пространством $\dot{W}_2^1(\Omega_0)$, являющимся пополнением $C_0^\infty(\Omega_0)$ по норме (1.1), и ненулевым является подпространство $\tilde{V}_2^1(\Omega_0) := V_2^1(\Omega_0) \ominus \dot{V}_2^1(\Omega_0)$, где ортогональность понимается в (1.2)-норме. Поскольку $\dot{V}_2^1(\Omega_0)$ – ядро оператора следа Γ , то Γ отображает $\tilde{V}_2^1(\Omega_0)$ на $V_2^{-1/2}(\partial\Omega_0)$ биективно. Обозначим через $V_2^{-1/2}(\partial\Omega_0)$ пространство, дуальное к $V_2^{1/2}(\partial\Omega_0)$ по отношению к $L_2(\partial\Omega_0)$, а через Γ_1 замыкание в $V_2^1(\Omega_0)$ оператора следа нормальной производной $u \rightarrow (\partial u / \partial n)|_{\partial\Omega_0}$. Покажем, что оператор

$$\Gamma_1: \tilde{V}_2^1(\Omega_0) \rightarrow V_2^{-1/2}(\partial\Omega_0)$$

есть биекция. Сначала напомним известные понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $v \in V_2^1(\Omega_0)$ называется *обобщенным решением задачи*

$$\Delta v = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \quad (2.1)$$

$$\Gamma_1 v = f \quad \text{на } \partial\Omega_0, \quad (2.2)$$

если для любого $w \in V_2^1(\Omega_0)$ выполняется равенство

$$\int_{\Omega_0} \nabla w \nabla \bar{v} \, dx = \int_{\partial\Omega_0} (\Gamma w) \bar{f} \, ds. \quad (2.3)$$

Конечно, если обобщенное решение v – гладкая функция, то в силу формулы Грина она является классическим решением задачи (2.1), (2.2). Заметим, что в силу (2.3) любое обобщенное решение ортогонально пространству $\tilde{V}_2^1(\Omega_0)$ и потому принадлежит $\tilde{V}_2^1(\Omega_0)$.

ЛЕММА 2.1. Для любой функции $f \in V_2^{-1/2}(\partial\Omega_0)$ существует единственное обобщенное решение задачи (2.1), (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in V_2^{-1/2}(\partial\Omega_0)$, то

$$\left| \int_{\partial\Omega_0} (\Gamma w) \bar{f} \, ds \right| \leq \| \Gamma w \|_{V_2^{1/2}(\partial\Omega_0)} \| f \|_{V_2^{-1/2}(\partial\Omega_0)} \leq C \| w \|_{\tilde{V}_2^1(\Omega_0)} \| f \|_{V_2^{-1/2}(\partial\Omega_0)}, \quad (2.4)$$

а потому правая часть (2.3) определяет линейный ограниченный функционал в пространстве $\tilde{V}_2^1(\Omega_0)$. Согласно теореме Рисса обобщенное решение существует и единственно.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Оператор Γ_1 осуществляет гомеоморфизм пространств $\tilde{V}_2^1(\Omega_0)$ и $V_2^{-1/2}(\partial\Omega_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.1 Γ_1 есть биекция указанных пространств. Кроме того, в силу (2.4) выполняется оценка

$$\| v \|_{\tilde{V}_2^1(\Omega_0)} \leq C \| \Gamma_1 v \|_{V_2^{-1/2}(\partial\Omega_0)},$$

т.е. Γ_1 – ограниченный оператор. В силу теоремы Банаха он ограниченно обратим.

Определим теперь оператор $\mathbb{A}$ равенством

$$\mathbb{A} := \Gamma \circ \Gamma_1^{-1} : V_2^{-1/2}(\partial\Omega_0) \rightarrow V_2^{1/2}(\partial\Omega_0).$$

Другими словами, $\mathbb{A}f = \Gamma v$, где v – обобщенное решение задачи (2.1), (2.2). В силу равенства

$$\int_{\partial\Omega_0} (\mathbb{A}f) \bar{f} \, ds = \int_{\Omega_0} |\nabla v|^2 \, dx > 0$$

оператор $\mathbb{A}$ симметричен и положителен в пространстве $L_2(S) = L_2(S_0) \times L_2(S_1)$. В этом произведении пространств он имеет естественное матричное представление

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где $A_{ij} \in \mathcal{L}(V_2^{-1/2}(S_j), V_2^{1/2}(S_i))$ (здесь через $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ обозначается пространство ограниченных операторов из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$). Например, $A_{00}f_0 = v_0|_{S_0}$, где v_0 – решение задачи (2.1), (2.2) для $f = \{f_0, 0\}$.

3. Конструкция операторов $\mathbb{D}, \mathbb{B}_0, \mathbb{B}_1$. Обозначим через N оператор скалярного умножения на единичный нормальный вектор в $(L_2(S_1))^3$, $N\vec{v} = (\vec{v}, \vec{n})$. Введем также операторы

$$\vec{N}\psi = \vec{n}\psi, \quad \psi \in L_2(S_1), \quad \vec{N}_3\vec{u} = n_3 u_3 \vec{e}_3, \quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in (L_2(S_1))^3.$$

С учетом представления (2.5) оператора $\mathbb{A}$ перепишем систему (0.1)–(0.5) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(A_{00}\eta + A_{01}N\Gamma\vec{u}) + \eta = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho\mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{N}(A_{10}\eta + A_{11}N\Gamma\vec{u}) + \mu^2(\rho - 1)\vec{N}_3\Gamma\vec{u} = \sigma_n(\vec{u}), \quad (3.2)$$

$$\mu^2 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \Delta^* \vec{u}, \quad (3.3)$$

где $\eta := (\partial v / \partial n)|_{S_0}$, $\vec{u} \in (V_2^1(\Omega_1))^3$ и $\Gamma\vec{u} = \vec{u}|_{S_1}$.

Отметим, что уравнения (3.1)–(3.3) уже можно записать в операторной форме $\mathcal{A}'u(t) - \mathcal{T}'\ddot{u}(t)$ в пространстве $L_2(S_0) \times (L_2(S_1))^3 \times (L_2(\Omega_1))^3$ (см. ниже п. 5). Однако, мы не можем показать симметричность и положительность операторов $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{T}'$.

Продолжим работу. В пространстве $L_2(\Omega_1) := (L_2(S_1))^3 \times (L_2(\Omega_1))^3$ рассмотрим оператор $\mathbb{D}_0$, определенный на области

$$\mathcal{D}(\mathbb{D}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{u}_\Gamma \\ \vec{u} \end{pmatrix} \mid \vec{u} \in \mathbb{W}_2^2(\Omega_1), \vec{u}_\Gamma = \Gamma\vec{u} \right\}$$

равенством

$$\mathbb{D}_0 \begin{pmatrix} \vec{u}_\Gamma \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_n(\vec{u}) \\ -\Delta^* \vec{u} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

ЛЕММА 3.1. *Оператор $\mathbb{D}_0$ положителен в пространстве $L_2(\Omega_1)$. Более того, справедлива оценка*

$$\|\vec{u}\|_{V_2^1(\Omega_1)}^2 \leq (\mathbb{D}_0 U, U) \leq \text{const} \|\vec{u}\|_{V_2^1(\Omega_1)}^2, \quad U = \begin{pmatrix} \vec{u}_\Gamma \\ \vec{u} \end{pmatrix},$$

где $\|\cdot\|_{V_2^1(\Omega_1)}$ – норма в пространстве $V_2^1(\Omega_1) := (V_2^1(\Omega_1))^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$(\Delta^* \vec{u})_j = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{jk}(\vec{u})}{\partial x_k}.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} -(\Delta^* \vec{u}, \vec{u}) &= - \sum_{j,k=1}^3 \int_{\Omega_1} \frac{\partial \sigma_{jk}(\vec{u})}{\partial x_k} \bar{u}_j dx \\ &= - \sum_{j,k=1}^3 \left(\int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{jk}(\vec{u}) \bar{u}_j) dx - \int_{\Omega_1} \sigma_{jk}(\vec{u}) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} dx \right) \\ &= \int_{S_1} (\sigma_n(\vec{u}), \Gamma\vec{u}) ds + (c^2 - 2) \int_{\Omega_1} |\text{div } \vec{u}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sum_{j,k=1}^3 \left| \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial x_i} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Согласно предложению 1.2 и неравенству $c \geq \sqrt{2}$ в результате получаем

$$\begin{aligned} (\mathbb{D}_0 U, U) &= -(\Delta^* \vec{u}, \vec{u}) - (\sigma_n(\vec{u}), \Gamma \vec{u})_{S_1} \\ &= (c^2 - 2) \int_{\Omega_1} |\operatorname{div} \vec{u}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sum_{j,k=1}^3 \left| \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial x_i} \right|^2 dx \\ &\geq \|\vec{u}\|_{\mathbb{V}_2^1(\Omega_1)}^2. \end{aligned}$$

Оценка сверху формы $(\mathbb{D}_0 U, U)$ очевидна. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathbb{H}_D$ замыкание пространства $\mathbb{W}_2^2(\Omega_1)$ по норме

$$\|\vec{u}\|_D^2 := (\mathbb{D}_0 U, U), \quad U = \begin{pmatrix} \vec{u}_\Gamma \\ \vec{u} \end{pmatrix}.$$

Из леммы 3.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Пространства $\mathbb{H}_D$ и $\mathbb{V}_2^1(\Omega_1)$ совпадают, а нормы $\|\cdot\|_D$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{V}_2^1(\Omega_1)}$ в них эквивалентны.*

Обозначим через $\mathbb{D}$ расширение по Фридрихсу оператора $\mathbb{D}_0$ (см. [15, § 124]). Хотя область определения оператора $\mathbb{D}$ неизвестна, из определения следует, что область квадратного корня $\mathbb{D}^{1/2}$ совпадает с множеством функций

$$U = \begin{pmatrix} \vec{u}_\Gamma \\ \vec{u} \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \in \mathbb{V}_2^1(\Omega_1) = \mathbb{H}_D,$$

образующих подпространство в пространстве $\mathbb{V}_2^{1/2}(S_1) \times \mathbb{V}_2^1(\Omega_1)$. Обратный оператор допускает матричное представление

$$\mathbb{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma \mathbb{B}_0 & \Gamma \mathbb{B}_1 \\ \mathbb{B}_0 & \mathbb{B}_1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Здесь операторы $\mathbb{B}_0$ и $\mathbb{B}_1$ определены равенствами

$$\mathbb{B}_0 \vec{v}_0 = \vec{u}_0, \quad \mathbb{B}_1 \vec{v}_1 = \vec{u}_1,$$

где функции $\vec{u}_0$ и $\vec{u}_1$ являются решениями задач

$$\begin{aligned} -\Delta^* \vec{u}_0 &= 0, & \text{и} & & -\Delta^* \vec{u}_1 &= \vec{v}_1, \\ -\sigma_n(\vec{u}_0) &= \vec{v}_0 & & & -\sigma_n(\vec{u}_1) &= 0. \end{aligned}$$

В частности,

$$(\mathbb{B}_0 \vec{v}_0, \vec{w}_0)_D = (\vec{v}_0, \Gamma \vec{w}_0)_{L_2(S_1)} \quad \text{и} \quad (\mathbb{B}_1 \vec{v}_1, \vec{w}_1)_D = (\vec{v}_1, \vec{w}_1)_{L_2(\Omega_1)}.$$

По аналогии с конструкцией оператора $\mathbb{A}$ в (2.5) рассматриваются обобщенные решения (принадлежащие $\mathbb{V}_2^1(\Omega_1)$) соответствующих задач для функций $\{\vec{v}_0, \vec{v}_1\} \in (L_2(S_1))^3 \times (L_2(\Omega_1))^3$.

4. Редукция системы к уравнению в гильбертовом пространстве. Согласно определениям (3.4), (3.5) равенства (3.2) и (3.3) можно переписать в виде

$$-\ddot{\vec{u}} = \mu^2 \mathbb{B}_1 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \rho \mu^2 \mathbb{B}_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{N} (A_{10} \eta + A_{11} N \Gamma \vec{u}) + \mu^2 (\rho - 1) \mathbb{B}_0 \vec{N}_3 \Gamma \vec{u}.$$

Теперь вся система (0.1)–(0.5) запишется в виде

$$\mathcal{T} w(t) + \mathcal{A} \ddot{w}(t) = 0, \quad (4.1)$$

где $w(t) \in \mathcal{H} = L_2(S_0) \times \mathcal{H}_D$, и

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} N \Gamma \\ \mathbb{B}_0 \vec{N} A_{10} & \mathbb{B}_0 \vec{N} A_{11} N \Gamma \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 := \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{B}_1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{T} &:= \frac{1}{\rho \mu^2} \begin{pmatrix} \rho \mu^2 I & 0 \\ 0 & I + \mu^2 (\rho - 1) \mathbb{B}_0 \vec{N}_3 \Gamma \end{pmatrix}, \quad w(t) := \begin{pmatrix} \eta \\ \vec{u} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Изучим свойства операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{T}$.

ЛЕММА 4.1. *Оператор $\mathcal{A}$ положителен, а $\mathcal{T}$ равномерно положителен в $\mathcal{H}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определений получаем

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{T} \begin{pmatrix} \eta \\ \vec{u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} &= \|\eta\|_{L_2(S_0)}^2 + \frac{1}{\rho \mu^2} \|\vec{u}\|_D^2 + \frac{\rho - 1}{\rho \mu^2} (n_3 \Gamma \vec{u}_3, \Gamma \vec{u}_3)_{L_2(S_1)}^2 \\ &\geq \min \left\{ 1, \frac{1}{\rho \mu^2} \right\} \left\| \begin{pmatrix} \eta \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

так как $n_3 < 0$ и $\rho < 1$. Далее,

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{A}_0 \begin{pmatrix} \eta \\ \vec{u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} &= (A_{00} \eta, \eta) + (A_{01} N \Gamma \vec{u}, \eta) \\ &\quad + (\mathbb{B}_0 \vec{N} A_{10} \eta, \vec{u})_D + (\mathbb{B}_0 \vec{N} A_{11} N \Gamma \vec{u}, \vec{u})_D \\ &= (A_{00} \eta, \eta) + (A_{01} u_n, \eta) + (A_{10} \eta, u_n) + (A_{11} u_n, u_n) \\ &= \left(\mathbb{A} \begin{pmatrix} \eta \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta \\ u_n \end{pmatrix} \right)_{L_2(S)} > 0, \\ \left(\mathcal{A}_1 \begin{pmatrix} \eta \\ \vec{u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta \\ \vec{u} \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} &= \frac{1}{\rho} (\mathbb{B}_1 \vec{u}, \vec{u})_D = \frac{1}{\rho} \|\vec{u}\|_{L_2(\Omega_1)}^2 > 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если задачу рассматривать без учета сил гравитации (как это делалось в работе [6]), то слагаемое $\mu^2 (\rho - 1) u_3 n_3 \vec{e}_3$ в уравнении (0.4) отсутствует. В этом случае построенный оператор $\mathcal{T}$ ограничен и обратим (более того, $\mathcal{T} = \text{diag}(I, I/(\rho \mu^2))$), а уравнение (4.1) принимает вид

$$w(t) + \mathcal{A}' \ddot{w}(t) = 0$$

с положительным оператором $\mathcal{A}'$. Для этого уравнения корректна задача Коши, решение которой выписывается с помощью унитарной группы, генератором которой является расширение по Фридрихсу оператора $(\mathcal{A}')^{-1}$ (см., например, [16]).

Пусть $w(t)$ – классическое решение уравнения (4.1). Под этим подразумеваем, что $w(t) \in W_2^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $w(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$, $\ddot{w}(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Тогда согласно теореме о промежуточных производных [17, гл. 1] $\dot{w}(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})$. Следовательно, корректно определен функционал энергии решения $w(t)$

$$E(t) := (\mathcal{A}\dot{w}(t), \dot{w}(t))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{T}w(t), w(t))_{\mathcal{H}}. \quad (4.2)$$

Дифференцируя $E(t)$ и используя равенство (4.1), получаем $\dot{E}(t) = 0$, т.е. $E(t) = \text{const}$. Более того, справедлив следующий результат.

ЛЕММА 4.2. *Если $w(t)$ – классическое решение уравнения (4.1), то его энергия не зависит от t и совпадает с функционалом $T - \Pi$, определенным в (0.9).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим функционал (4.2), воспользовавшись определениями операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{T}$. После несложных преобразований получим утверждение леммы.

5. Спектр задачи. Естественнo, что спектр задачи (0.1)–(0.6) следует определить как спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda) := \mathcal{A} - \lambda\mathcal{T}$. Однако спектр этого пучка можно понимать в разных смыслах (см. [18]).

Например, классический спектр можно определить так. Возьмем в качестве области определения пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ множество $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_F) \cap \mathcal{D}(\mathcal{T}_F)$, где $\mathcal{A}_F$ и $\mathcal{T}_F$ – расширения по Фридрихсу операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{T}$. Будем говорить, что $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ принадлежит классическому спектру $\sigma_{\text{cl}}(\mathcal{L})$, если и только если оператор $\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{T}$, определенный на $\mathcal{D}(\mathcal{L})$, не имеет ограниченного обратного в $\mathcal{H}$. Обобщенный спектр $\sigma_{\text{gen}}(\mathcal{L})$ определим как обычный спектр расширения по Фридрихсу оператора $\mathcal{A} = \mathcal{T}_F^{-1/2} \mathcal{A} \mathcal{T}_F^{1/2}$. Из определения следует, что $\sigma_{\text{gen}}(\mathcal{L}) \subset [0, \infty)$ и $\sigma_{\text{gen}}(\mathcal{L}) \supset \sigma_{\text{cl}}(\mathcal{L})$.

Для поиска спектра задачи удобнее вернуться к пучку, определяемому системой (3.1)–(3.3). Заметим, что спектральная задача для пучка $\mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{T}$ в пространстве $\mathcal{H}$ эквивалентна системе (3.1)–(3.3) в пространстве $\mathcal{H}' := L_2(S_0) \times (L_2(S_1))^3 \times (L_2(\Omega_1))^3$ (если $-\partial^2/\partial t^2$ заменить на λ) и эквивалентность осуществляется оператором $I \oplus \mathbb{D}$ (это следует из определения оператора $\mathbb{D}$). Поэтому достаточно изучить спектр линейного пучка

$$\mathcal{L}'(\lambda) = \mathcal{A}' - \lambda\mathcal{T}'$$

в пространстве $\mathcal{H}'$ с операторами

$$\mathcal{A}' := \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -\mu^2(\rho - 1)N_3 & \sigma_n \\ 0 & 0 & \Delta^* \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}' := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01}N & 0 \\ -\rho\mu^2\vec{N}A_{10} & -\rho\mu^2\vec{N}A_{11}N & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 \end{pmatrix}.$$

Сначала рассмотрим случай плоского дна. В этом случае проблем с областями определения операторов не возникает (не нужно делать акцент на фридрихсовских расширениях, в отличие от случая, когда поверхность S_1 имеет изломы). Пусть $H(x_1, x_2) \equiv h > 0$. Естественнo применить к пучку $\mathcal{L}'(\lambda)$ преобразование Фурье $\mathcal{F}$ по отношению к переменным x_1 и x_2 :

$$(\mathcal{F}f)(p_1, p_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(p_1x_1 + p_2x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Прямые вычисления приводят к следующему результату:

$$\mathcal{F}\mathbb{A}\mathcal{F}^{-1} = (|p|\operatorname{sh}(|p|h))^{-1} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(|p|h) & 1 \\ 1 & \operatorname{ch}(|p|h) \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{F}\Delta^*\mathcal{F}^{-1} = N_0\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + iN_1\frac{\partial}{\partial x_3} - N_2 =: L\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right), \quad (5.2)$$

$$\mathcal{F}\sigma_n\mathcal{F}^{-1} = -N_0\frac{\partial}{\partial x_3} - iN'_1 =: M\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right), \quad (5.3)$$

где

$$N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}, \quad N_1 = (c^2 - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 \\ (c^2 - 2)p_1 & (c^2 - 2)p_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = (c^2 - 1) \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & 0 \\ p_1p_2 & p_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + |p|^2 I.$$

Если $\{\eta(x_1, x_2), \vec{u}(x)\}$ – собственные функции пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ или решения системы (3.1)–(3.3) вида

$$\vec{u}(x, t) = \vec{u}(x)e^{i\omega t}, \quad \eta(x_1, x_2, t) = \eta(x_1, x_2)e^{i\omega t}, \quad \omega = \lambda^{1/2},$$

то после преобразования Фурье по переменным p_1, p_2 для образов Фурье

$$\hat{u}(p_1, p_2, z) := \mathcal{F}\vec{u}(x_1, x_2, x_3 + h), \quad \hat{\eta}(p_1, p_2) := \mathcal{F}\eta(x_1, x_2)$$

получаем равенства

$$\hat{\eta} - \frac{\omega^2}{|p|\operatorname{sh}(|p|h)} (\operatorname{ch}(|p|h) \hat{\eta} - \hat{u}_3(p_1, p_2, 0)) = 0, \quad (5.4)$$

$$\vec{N} \left\{ \mu^2 (\rho - 1) \hat{u}_3(p_1, p_2, 0) - \frac{\rho \mu^2 \omega^2}{|p|\operatorname{sh}(|p|h)} (\hat{\eta} - \operatorname{ch}(|p|h) \hat{u}_3(p_1, p_2, 0)) \right\}$$

$$= M\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \hat{u}(p_1, p_2, z)|_{z=0}, \quad (5.5)$$

$$- \omega^2 \mu^2 \hat{u}(p_1, p_2, z) = L\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \hat{u}(p_1, p_2, z). \quad (5.6)$$

Для фиксированного $p \in \mathbb{R}^2$ систему (5.4)–(5.6) можно рассматривать как задачу на собственные значения для линейного пучка

$$\hat{\mathcal{A}}_p - \lambda \hat{\mathcal{T}}_p =: \hat{\mathcal{L}}_p(\lambda)$$

в пространстве $\mathcal{H}'' := \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times L_2(-\infty, 0]$. Другими словами, мы должны разложить пространство $\mathcal{H}'$ и линейный пучок $\hat{\mathcal{L}}(\lambda) := \mathcal{F}(\mathcal{A}' - \lambda \mathcal{T}')\mathcal{F}^{-1}$ в прямой интеграл (см. [19, гл. XIII])

$$\mathcal{H}' = \int_{\mathbb{R}^2}^{\oplus} \mathcal{H}'' dp, \quad \hat{\mathcal{L}}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2}^{\oplus} \hat{\mathcal{L}}_p(\lambda) dp,$$

где dp – мера Лебега в $\mathbb{R}^2$. Из теории прямых разложений операторов следует, что $\hat{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda_0)$ существует и ограничен в $\mathcal{H}'$, если и только если $\hat{\mathcal{L}}_p^{-1}(\lambda_0)$ ограничен почти для всех $p \in \mathbb{R}^2$ и $\int_{\mathbb{R}^2} \|\hat{\mathcal{L}}_p^{-1}(\lambda_0)\| dp < \infty$. В частности, справедлив следующий результат (ср. [19, теорема XIII.85]).

ЛЕММА 5.1. Пусть точка λ_0 такая, что для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma_{\text{cl}}(\hat{\mathcal{L}}_p(\lambda)) \cap \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon\}\}$$

имеет положительную меру Лебега. Тогда $\lambda_0 \in \sigma_{\text{cl}}(\hat{\mathcal{L}})$.

Таким образом, чтобы доказать равенство $\sigma_{\text{cl}}(\hat{\mathcal{L}}) = [0, \infty)$ достаточно показать, что при любом $\lambda_0 \in [0, \infty)$ выполняются условия леммы 5.1. Для этого изучим спектр линейного пучка $\hat{\mathcal{L}}_p(\lambda)$. Очевидно, функция $y(p_1, p_2)e^{ik_0 z}$ является решением уравнения (5.6), если и только если k_0 и $y(p_1, p_2)$ являются собственным значением и собственной функцией квадратичного матричного пучка операторов в пространстве $\mathbb{C}^3$:

$$\mathcal{L}(k, \omega) := k^2 N_0 + k N_1 + N_2 - \omega^2 \mu^2 I.$$

Вычислив детерминант матрицы $\mathcal{L}(k, \omega)$, получим следующие собственные пары (ветви корня фиксируется условием $\arg \sqrt{z} \in [0, \pi)$ при $z \neq 0$):

$$\begin{aligned} k = k_1 &:= \sqrt{\frac{\omega^2 \mu^2}{c^2} - |p|^2}, \quad y_1^+ = (p_1, p_2, k_1); \quad k = -k_1, \quad y_1^- = (p_1, p_2, -k_1); \\ k = k_2 &:= \sqrt{\omega^2 \mu^2 - |p|^2}, \quad y_2^+ = (p_2, -p_1, 0); \quad k = -k_2, \quad y_2^- = (p_2, -p_1, 0); \\ k = k_2, \quad y_3^+ &= (p_1 k_2, p_2 k_2, -|p|^2); \quad k = -k_2, \quad y_3^- = (p_1 k_2, p_2 k_2, |p|^2). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Поэтому общее решение уравнения (5.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{u}(p_1, p_2, z) &= A_1^+ y_1^+ e^{ik_1 z} + A_1^- y_1^- e^{-ik_1 z} + A_2^+ y_2^+ e^{ik_2 z} + A_2^- y_2^- e^{-ik_2 z} \\ &\quad + A_3^+ y_3^+ e^{ik_2 z} + A_3^- y_3^- e^{-ik_2 z}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Из уравнения (5.5) следует, что вектор $M(\partial/\partial z)\hat{u}(p_1, p_2, z)|_{z=0}$ пропорционален вектору $\vec{N}$, что приводит к следующим соотношениям для коэффициентов в (5.8):

$$A_2^+ = A_2^-, \quad (5.9)$$

$$2k_1(A_1^+ - A_1^-) = (|p|^2 - k_2^2)(A_3^+ - A_3^-). \quad (5.10)$$

Из уравнения (5.4) выразим вектор $\hat{\eta}$

$$\hat{\eta} = -\frac{\omega^2}{|p| \operatorname{sh}(|p|h) - \omega^2 \operatorname{ch}(|p|h)} \hat{u}_3(p_1, p_2, 0) \quad (5.11)$$

и внесем его в (5.5):

$$\begin{aligned} &i(c^2 - 2)(p_1 \hat{u}_1(p_1, p_2, 0) + p_2 \hat{u}_2(p_1, p_2, 0)) + c^2 \frac{\partial \hat{u}_3(p_1, p_2, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ &= \left\{ \mu^2(\rho - 1) - \frac{\rho \mu^2 \omega^2}{|p|} \frac{|p| \operatorname{ch}(|p|h) - \omega^2 \operatorname{sh}(|p|h)}{|p| \operatorname{sh}(|p|h) - \omega^2 \operatorname{ch}(|p|h)} \right\} \hat{u}_3(p_1, p_2, 0). \end{aligned}$$

Подставив (5.8) в последнее уравнение, мы получим третье соотношение (дополнительное к (5.9) и (5.10)) для коэффициентов $A_j^\pm$, $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} & i(\omega^2 \mu^2 - 2|p|^2)(A_1^+ - A_1^-) - 2i|p|^2 k_2(A_3^+ + A_3^-) \\ &= \left\{ \mu^2(\rho - 1) - \frac{\rho \mu^2 \omega^2 |p| \operatorname{ch}(|p|h) - \omega^2 \operatorname{sh}(|p|h)}{|p| |p| \operatorname{sh}(|p|h) - \omega^2 \operatorname{ch}(|p|h)} \right\} (k_1(A_1^+ - A_1^-) - |p|^2(A_3^+ - A_3^-)). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Теперь мы можем найти все ограниченные по x решения системы (5.4)–(5.6) для фиксированного $|p|$. Рассмотрим следующие случаи:

- 1) $\omega^2 < \frac{|p|^2}{\mu^2}$;
- 2) $\frac{|p|^2}{\mu^2} \leq \omega^2 < \frac{c^2 |p|^2}{\mu^2}$;
- 3) $\omega^2 > \frac{c^2 |p|^2}{\mu^2}$.

В первом случае $k_j = i\kappa_j$, где $\kappa_j > 0$, $j = 1, 2$. Поэтому ограниченное при $x_3 \rightarrow -\infty$ решение возможно лишь если $A_1^+ = A_2^+ = A_3^+ = 0$. Учитывая этот факт, а также соотношения (5.9), (5.10) и (5.12), получаем следующее “дисперсионное соотношение” для собственных частот (ср. [11]):

$$4i|p|^2 k_1 k_2 + i(\omega^2 \mu^2 - 2|p|^2)^2 + \omega^2 \mu^4 (\rho - 1) k_1 = \frac{\rho \mu^4 \omega^4 k_1}{|p|} \frac{|p| \operatorname{ch}(|p|h) - \omega^2 \operatorname{sh}(|p|h)}{|p| \operatorname{sh}(|p|h) - \omega^2 \operatorname{ch}(|p|h)}. \quad (5.13)$$

Любое решение $\omega_0 < |p|^2/\mu^2$ этого уравнения порождает собственное значение $\lambda = \omega_0^2$ пучка $\hat{\mathcal{L}}'_p(\lambda)$, которому соответствует экспоненциально убывающий по z вектор

$$\frac{|p|^2 - k_2^2}{2k_1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -k_1 \end{pmatrix} e^{-ik_1 z} + \begin{pmatrix} p_1 k_2 \\ p_2 k_2 \\ |p|^2 \end{pmatrix} e^{-ik_2 z}, \quad (5.14)$$

где k_1 и k_2 определены соотношением (5.7). Известно (ср. [11]), что уравнение (5.13) имеет два решения в интервале $(0, |p|^2/\mu^2)$, т.е. спектр пучка $\hat{\mathcal{L}}'_p(\lambda)$ в этом интервале состоит из двух собственных значений.

Во втором случае $k_2 > 0$ и мы получаем решения с $A_2^+ = A_2^-$ вида

$$y_1(p_1, p_2, z) = A_2^\pm \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin k_2 z.$$

Одномерное пространство ограниченных решений, линейно независимых с y_1 , получается подстановкой $A_1^+ = A_2^+ = A_2^- = 0$. Соответствующие решения имеют вид

$$y_2(p_1, p_2, z) = A_1^- \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -k_1 \end{pmatrix} e^{-ik_1 z} + A_3^+ \begin{pmatrix} p_1 k_2 \\ p_2 k_2 \\ -|p|^2 \end{pmatrix} e^{ik_2 z} + A_3^- \begin{pmatrix} p_1 k_2 \\ p_2 k_2 \\ |p|^2 \end{pmatrix} e^{-ik_2 z} \quad (5.15)$$

с коэффициентами A_1^-, A_3^+, A_3^- , удовлетворяющими уравнениям (5.10) и (5.12). Теперь, фиксируя число $\lambda_0 = \omega_0^2 \in [|p|^2/\mu^2, c^2|p|^2/\mu^2)$, с помощью стандартной процедуры срезки можно построить *последовательность Вейля* для оператора $\widehat{\mathcal{L}}_p(\lambda_0)$, т.е. последовательность векторов $w_n := (\widehat{\eta}_n(p), \widehat{u}_{3,n}(p, 0), \widehat{u}_n(p, z))$, удовлетворяющих условиям

$$\|w_n\|_{\mathcal{H}''} \geq 1, \quad \|\widehat{\mathcal{L}}_p(\lambda_0)w_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Это означает, что любое число $\lambda_0 \in [|p|^2/\mu^2, c^2|p|^2/\mu^2)$ принадлежит спектру (причем *существенному* спектру) пучка $\widehat{\mathcal{L}}_p(\lambda)$.

Наконец, при $\omega^2 > c^2|p|^2/\mu^2$ в дополнение к функциям $Y_1(p_1, p_2, z)$ и $Y_2(p_1, p_2, z)$ мы имеем линейно независимое решение вида

$$y_3(p_1, p_2, z) = A_1^+ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ k_1 \end{pmatrix} e^{-ik_1 z} + A_3^+ \begin{pmatrix} p_1 k_2 \\ p_2 k_2 \\ -|p|^2 \end{pmatrix} e^{ik_2 z} + A_3^- \begin{pmatrix} p_1 k_2 \\ p_2 k_2 \\ |p|^2 \end{pmatrix} e^{-ik_2 z}, \quad (5.16)$$

где коэффициенты A_1^+, A_3^+, A_3^- удовлетворяют соотношениям (5.10) и (5.12) при $A_1^- = 0$. Как и ранее, с помощью процедуры срезки получаем, что любое число $\lambda_0 \in [c^2|p|^2/\mu^2, \infty)$ есть точка существенного спектра пучка $\widehat{\mathcal{L}}_p(\lambda)$.

Проведенные выкладки приводят нас к следующим результатам.

ТЕОРЕМА 5.1. *При любом фиксированном $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ классический спектр пучка $\widehat{\mathcal{L}}_p(\lambda)$ следующий:*

- а) два собственных значения $\omega_{\pm}^2 \in (0, |p|^2/\mu^2)$, являющиеся решениями дисперсионного уравнения, причем отвечающие им собственные функции определены посредством (5.14) и (5.11);
- б) существенный спектр кратности 2, покрывающий сегмент $[|p|^2/\mu^2, c^2|p|^2/\mu^2)$;
- с) существенный спектр кратности 3, покрывающий интервал $[c^2|p|^2/\mu^2, \infty)$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть дно S_1 есть плоскость, ортогональная направлению x_3 . Тогда спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ (а значит, и спектр задачи (0.1)–(0.6)) совпадает со всей положительной осью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение есть следствие леммы 5.1 и теоремы 5.1.

Рассмотрим теперь случай, когда поверхность дна отличается от плоской лишь на компакте (т.е. $H(x_1, x_2) = \text{const}$ при $|x|$ достаточно больших). В этом случае при любом фиксированном $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ и $p \in \mathbb{R}^2$ оператор $\widehat{\mathcal{L}}_p(\lambda_0)$ является компактным возмущением соответствующего оператора для случая плоского дна. Поэтому существенные спектры линейных пучков $\widehat{\mathcal{L}}_p(\lambda)$ для плоского и компактно возмущенного дна совпадают и при $p \rightarrow 0$ стремятся к $[0, \infty)$. Кроме того, спектр вещественный и отрицательных собственных значений быть не может. Поэтому справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.3. *В случае компактно возмущенного плоского дна спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ (или спектр задачи (0.1)–(0.6)) совпадает со всей положительной полуосью $[0, \infty)$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Подъяпольский Г. С. Возбуждение длинной гравитационной волны в океане сейсмическим источником в коре // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1968. № 1. С. 7–24.
- [2] Зволинский Н. В. О сейсмическом механизме возбуждения волн цунами // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 3. С. 3–15.
- [3] Зволинский М. В., Никитин И. С., Секерж-Зенькович С. Я. Генерация волн цунами и волн Релея гармоническим центром расширения // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. № 2. С. 34–44.
- [4] Асланян А. Г., Васильев Д. Г., Лидский В. Б. Частота свободных колебаний тонкой оболочки, взаимодействующей с жидкостью // Функцион. анализ и его прилож. 1981. Т. 15. № 3. С. 1–9.
- [5] Молотков И. А., Крауклисс П. В. Смешанные поверхностные волны на границе упругой среды и жидкости // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1971. № 8. С. 3–11.
- [6] Фрагела А. К. К задаче о движении идеальной жидкости в неограниченном упругом бассейне // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 8. С. 1417–1426.
- [7] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [8] Бердичевский Б. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.
- [9] Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глыбокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86–94.
- [10] Luke J. C. A variational principle for a fluid with a free surface // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. P. 395–397.
- [11] Доброхотов С. Ю., Толстова О. Л., Чудинович И. Ю. Волны в жидкости на упругом основании. Теория существования и точные решения // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 33–55.
- [12] Мазья В. Г. Пространства Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
- [13] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [14] Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
- [15] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
- [16] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
- [17] Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [18] Shkalikov A. A. Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics. Instability index formula // Operator Theory: Advances and Applications. V. 87. Basel: Birkhäuser Verlag, 1996. P. 258–285.
- [19] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.

(Р. О. Гринив) Институт прикладных проблем механики и математики
НАН Украины, г. Львов

Поступило
07.12.1999

(С. Ю. Доброхотов) Институт проблем механики РАН

(А. А. Шкаликов) Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова