Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Невский, О минимальном положительном гомотетическом образе симплекса, содержащем выпуклое тело, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 448–456

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9200>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:58:55

О минимальном положительном гомотетическом образе симплекса, содержащем выпуклое тело

М. В. Невский

Пусть C – выпуклое тело, S – невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Доказывается, что минимальное $\sigma > 0$, для которого транслят σS содержит C , равно

$$\sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1,$$

где $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ – барицентрические координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно S . В случае $C = [0, 1]^n$ указанная величина приводится к виду $\sum_{i=1}^n 1/d_i(S)$, где $d_i(S)$ есть i -й осевой диаметр S , т.е. максимальная длина отрезка из S , параллельного i -й координатной оси.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm9200

1. Введение. Пусть C – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, т.е. компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Через σC обозначим результат гомотетии C относительно центра тяжести с коэффициентом σ . Будем говорить, что выпуклый многогранник *вписан* в C , если любая его вершина принадлежит границе C . Символом $d_i(C)$ обозначим i -й осевой диаметр C , представляющий собой максимальную длину отрезка, содержащегося в C и параллельного i -й координатной оси. Понятие осевого или, иначе говоря, аксиального диаметра было введено Скоттом [1], [2]. Через Q_n обозначим n -мерный единичный куб $[0, 1]^n$, а через $\text{ver}(Q_n)$ – совокупность его вершин. Под *транслятом* будем понимать результат параллельного переноса. Ниже $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ есть пространство многочленов от n переменных степени ≤ 1 .

Для выпуклых тел $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\alpha(C_1; C_2)$ минимальное $\sigma > 0$, для которого C_1 принадлежит трансляту σC_2 . Ранее были получены следующие соотношения. Из результата Скотта [1; теорема 1] следует, что если в C можно вписать куб, гомотетичный Q_n , то

$$\alpha(Q_n; C) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)}.$$

В [3; следствие 2] доказано, что последнее неравенство справедливо для любого выпуклого тела C . Если же C представляет собой невырожденный симплекс S , то это соотношение обращается в равенство, т.е. имеет место

$$\alpha(Q_n; S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \quad (1)$$

(см. [4; теорема 4]). Целью настоящей статьи является распространение (1) на произвольное C вместо Q_n . Как мы докажем ниже (см. теорему 1), для любого выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$

$$\alpha(C; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (2)$$

Здесь и далее $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ – барицентрические координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно S . Известно, что $\lambda_j \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$. В дальнейшем мы полагаем

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}. \quad (3)$$

2. Вспомогательные предложения. Пусть S – невырожденный симплекс, C – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Введем в рассмотрение величину

$$\psi(C; S) := \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1.$$

Положим также

$$\xi(C; S) := \min\{\sigma \geq 1 : C \subset \sigma S\}.$$

Очевидно, $\xi(C; S) = 1$ тогда и только тогда, когда $C \subset S$.

В этом пункте мы приведем ряд вспомогательных утверждений. Первые две леммы обобщают на случай произвольного C результаты лемм 1 и 2 из [4], в которых рассматривался случай $C = Q_n$.

ЛЕММА 1. Пусть $C \not\subset S$ и $1 \leq j \leq n$. Предположим, что j -я $(n-1)$ -мерная грань симплекса $\xi(C; S)S$ (параллельная грани S с уравнением $\lambda_j(x) = 0$) содержит точку C . Тогда

$$\xi(C; S) = (n+1) \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как j -я грань S удовлетворяет уравнению $\lambda_j(x) = 0$ и $\xi(C; S) > 1$, то j -я грань $\xi(C; S)S$ удовлетворяет уравнению $-\lambda_j(x) = \mu$ с некоторым $\mu > 0$. Обозначим через z точку C , принадлежащую j -й грани $\xi(C; S)S$. Пусть c – центр тяжести S , b – общая точка отрезка $[c, z]$ и границы S . Из определения $\xi(C; S)$ следует, что

$$\xi(C; S) = \frac{\|z - c\|}{\|b - c\|}. \quad (5)$$

Здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Точки c, b, z лежат на одной прямой, причем $z = \xi(C; S)(b - c) + c$. Поскольку λ_j – многочлен первой степени, нетрудно показать, что (5) эквивалентно равенству

$$\xi(C; S) = \frac{\lambda_j(z) - \lambda_j(c)}{\lambda_j(b) - \lambda_j(c)}. \quad (6)$$

Для этого достаточно преобразовать правую часть (6) с помощью (3). Остается привести (6) к нужному виду (4). Барицентрические координаты $\lambda_j(c)$ центра тяжести симплекса равны $1/(n+1)$. Кроме того, $\lambda_j(b) = 0$. Поскольку $C \subset \xi(C; S)S$, для $x \in C$ выполняется $-\lambda_j(z) = \mu \geq -\lambda_j(x)$. Следовательно, $-\lambda_j(z) = \max_{x \in C}(-\lambda_j(x))$. Таким образом, из (6) следует

$$\xi(C; S) = \frac{\lambda_j(z) - \lambda_j(c)}{\lambda_j(b) - \lambda_j(c)} = \frac{\lambda_j(z) - 1/(n+1)}{-1/(n+1)} = (n+1) \max_{x \in C}(-\lambda_j(x)) + 1.$$

Лемма 1 доказана.

Будем говорить, что n -мерный симплекс описан вокруг выпуклого тела C , если каждая $(n-1)$ -мерная грань этого симплекса содержит точку C .

ЛЕММА 2. Пусть S – невырожденный симплекс, C – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $C \not\subset S$. Если симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг C , то

$$\max_{x \in C}(-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in C}(-\lambda_{n+1}(x)). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию каждая $(n-1)$ -мерная грань $\xi(S)S$ содержит точку C . Из леммы 1 следует, что (4) выполняется при любом $j = 1, \dots, n+1$. Следовательно, $\max_{x \in C}(-\lambda_j(x))$ не зависит от j , т.е. имеет место (7).

ЛЕММА 3. Для $\sigma > 0$ и $t \in \mathbb{R}^n$

$$\psi(C; \sigma S + t) = \frac{1}{\sigma} \psi(C; S). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$ – вершины S , $y^{(1)}, \dots, y^{(n+1)}$ – вершины $\sigma S + t$. Очевидно,

$$y^{(k)} = \sigma(x^{(k)} - c) + c + t = \sigma x^{(k)} - t'.$$

Здесь c – центр тяжести S , $t' = -(1-\sigma)c - t$. Определим многочлены $\Lambda_j \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с помощью равенств

$$\Lambda_j(x) := \lambda_j\left(\frac{x+t'}{\sigma}\right), \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Тогда $\Lambda_j(y^{(k)}) = \lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$ (здесь δ_j^k – символ Кронекера). Поэтому $\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_{n+1}(x)$ суть барицентрические координаты x относительно симплекса $\sigma S + t$. Так как $\lambda_j \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, то

$$\lambda_j(x+s) = \lambda_j(x) + \lambda_j(s) - \lambda_j(0), \quad \lambda_j(\tau x) - \lambda_j(0) = \tau[\lambda_j(x) - \lambda_j(0)].$$

С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_j(x) &= \lambda_j\left(\frac{x+t'}{\sigma}\right) = \lambda_j\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \lambda_j\left(\frac{t'}{\sigma}\right) - \lambda_j(0) \\ &= \frac{1}{\sigma} \lambda_j(x) + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \lambda_j(0) + \lambda_j\left(\frac{t'}{\sigma}\right) - \lambda_j(0) = \frac{1}{\sigma} \lambda_j(x) + \lambda_j\left(\frac{t'}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} \lambda_j(0). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \psi(C; \sigma S + t) &= \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\Lambda_j(x)) + 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} \left[-\frac{1}{\sigma} \lambda_j(x) - \lambda_j\left(\frac{t'}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma} \lambda_j(0) \right] + 1 \\
 &= \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) - \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j\left(\frac{t'}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) + 1 \\
 &= \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \psi(C; S).
 \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j\left(\frac{t'}{\sigma}\right) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) = 1.$$

Равенство (8) доказано.

ЛЕММА 4. Пусть $p(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1}$. Тогда

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-p(x)) + p\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x_i = 0$ или $x_i = 1$, то $|(1/2) - x_i| = 1/2$. Поэтому для $x \in \text{ver}(Q_n)$

$$p\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) - p(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{1}{2} - x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \left|\frac{1}{2} - x_i\right| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Определим $x^* \in \text{ver}(Q_n)$ с помощью равенств: $x_i^* = 0$, если $a_i \geq 0$, и $x_i^* = 1$, если $a_i < 0$. Для $x = x^*$ неравенство, содержащееся в предыдущей цепочке, обращается в равенство. Это означает, что имеет место (9). Лемма 4 доказана.

Ниже нам понадобится еще выражение для осевых диаметров симплекса S через коэффициенты соответствующих многочленов λ_j (см. (3)).

ЛЕММА 5. Для любого $i = 1, \dots, n$

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (10)$$

Соотношение (10) доказано в [5; теорема 3.1].

3. Равенство для $\alpha(C; S)$. Приведем основной результат статьи. Упомянутое в условии теоремы 1 равенство (1) было доказано в [4; теорема 4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть C – выпуклое тело, S – невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\alpha(C; S) = \psi(C; S). \quad (11)$$

Если $C = Q_n$, то (11) эквивалентно (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $\alpha(C; S)$ и $\xi(C; S)$ следует, что существуют $\sigma > 0$ и $t \in \mathbb{R}^n$, для которых симплекс $S_1 := \sigma S + t$ не содержит C и выполняется $\alpha(C; S_1) = \xi(C; S_1)$. Заметим, что тогда симплекс $\xi(C; S_1)S_1$ описан вокруг C . (Предположим, что это не так. Тогда найдется число $\tau \in (0, 1)$ такое, что C принадлежит трансляту симплекса $(\tau\xi(C; S_1))S_1$. В этом случае будет иметь место $\alpha(C; S_1) \leq \tau\xi(C; S_1)$. Последнее противоречит равенству $\alpha(C; S_1) = \xi(C; S_1)$.)

Сначала покажем, что (11) выполняется для симплекса S_1 . Пусть $\lambda_j^*(x)$ – барицентрические координаты x относительно этого симплекса. Применяя к S_1 леммы 1 и 2, получим

$$\alpha(C; S_1) = \xi(C; S_1) = (n+1) \max_{x \in C} (-\lambda_1^*(x)) + 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j^*(x)) + 1 = \psi(C; S_1).$$

Теперь вернемся к симплексу S . Очевидно,

$$\alpha(C; S_1) = \alpha(C; \sigma S + t) = \frac{1}{\sigma} \alpha(C; S).$$

Кроме того, лемма 3 дает

$$\psi(C; S_1) = \psi(C; \sigma S + t) = \frac{1}{\sigma} \psi(C; S).$$

Поэтому из равенства $\alpha(C; S_1) = \psi(C; S_1)$ следует $\alpha(C; S) = \psi(C; S)$. Итак, (11) доказано.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть $C = Q_n$. Максимум многочлена из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ на выпуклом многограннике достигается в вершине многогранника. Поэтому $\max_{x \in Q_n} (-\lambda_j(x)) = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x))$. Из свойств барицентрических координат

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) = 1. \quad (12)$$

Применяя, кроме (12), еще леммы 4 и 5, получим

$$\begin{aligned} \psi(Q_n; S) &= \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in Q_n} (-\lambda_j(x)) + 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1 \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \left[-\lambda_j(x) + \lambda_j \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n |l_{ij}| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}. \end{aligned}$$

Итоговое выражение означает, что равенство $\alpha(Q_n; S) = \psi(Q_n; S)$ эквивалентно равенству $\alpha(Q_n; S) = \sum_{i=1}^n 1/d_i(S)$, т.е. соотношению (1). Теорема 1 доказана.

4. О гомотетическом образе выпуклого тела, содержащемся в симплексе. Пусть C – выпуклое тело, S – невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Определим $\beta(C; S)$ как максимальное σ , для которого S содержит транслят σC . Очевидно,

$$\beta := \beta(C; S) = \alpha(C; S)^{-1}. \quad (13)$$

ЛЕММА 6. *Для данных C и S транслят βC , принадлежащий S , является единственным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – любой транслят βC , принадлежащий S . Тогда S описан вокруг D , т.е. каждая $(n-1)$ -мерная грань S содержит точку D . (Предположим противное. Тогда для некоторого $0 < \tau < 1$ выпуклое тело D содержится в трансляте τS . Значит, S содержит транслят $(1/\tau)\beta C$. Это противоречит равенству $\beta = \max\{\sigma : \text{транслят } \sigma C \subset S\}$.) Любой транслят βC , отличный от D , не принадлежит S . Поэтому указанный в условии транслят βC является единственным. Лемма 6 доказана.

В дальнейшем единственный транслят βC , принадлежащий S , обозначается через C' . Иными словами, C' есть единственный максимально возможный гомотетический образ C , принадлежащий S .

Покажем, как для данных C и S можно вычислить C' . Ниже $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$ – вершины S , $\lambda_j(x)$ – барицентрические координаты x относительно S .

ТЕОРЕМА 2. *Пусть z – произвольная точка C . Положим*

$$\mu_j := \max_{x \in C} (\lambda_j(z) - \lambda_j(x)), \quad \tau_j := \frac{\mu_j}{\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k}, \quad z^* := \sum_{j=1}^{n+1} \tau_j x^{(j)}.$$

Справедливы равенства

$$\beta = \left(\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j \right)^{-1}, \quad (14)$$

$$C' = \{y \in \mathbb{R}^n : y = z^* + \beta(x - z), x \in C\}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (14) следует из соотношений (13), (2) и равенства $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(z) = 1$. Обозначим правую часть (15) через D и докажем, что $C' = D$. В силу леммы 6 достаточно показать, что D есть транслят βC , принадлежащий S . Так как

$$D = \{y : y = \beta x + z^* - \beta z, x \in C\}, \quad (16)$$

то D есть транслят результата гомотетии C с центром в начале координат и коэффициентом β . Следовательно, D есть транслят βC .

Покажем, что $D \subset S$. Так как $z \in C$, то

$$\mu_j = \max_{x \in C} (\lambda_j(z) - \lambda_j(x)) \geq \lambda_j(z) - \lambda_j(z) = 0.$$

Следовательно, $\tau_j \geq 0$. Так как $\sum_{j=1}^{n+1} \tau_j = 1$, то z^* есть выпуклая комбинация вершин S и, значит, $z^* \in S$. Принадлежность симплексу S других точек D следует из неравенства

$$\mu_j \geq \lambda_j(z) - \lambda_j(x), \quad x \in C \quad (17)$$

(неравенство $\mu_j \geq 0$ получается из (17), если взять $x = z$). Действительно, пусть $1 \leq s \leq n+1$. Положим $\varphi_s(x) := \lambda_s(x) - \lambda_s(0)$. Если $y \in D$, то для некоторого $x \in C$ верно $y = z^* + \beta(x - z)$. В силу линейности φ_s

$$\lambda_s(y) = \varphi_s(y) + \lambda_s(0) = \varphi_s(z^*) + \beta[\varphi_s(x) - \varphi_s(z)] + \lambda_s(0) = \lambda_s(z^*) + \beta[\lambda_s(x) - \lambda_s(z)].$$

Так как $\lambda_s(z^*) = \tau_s$, то

$$\lambda_s(y) = \tau_s - \beta[\lambda_s(z) - \lambda_s(x)] = \beta(\mu_s - [\lambda_s(z) - \lambda_s(x)]) \geq 0.$$

Мы применили (17). Таким образом, для любых $s = 1, \dots, n+1$ и $y \in D$ верно $\lambda_s(y) \geq 0$. Поэтому $D \subset S$.

То, что правая часть (15) не зависит от выбора $z \in C$, может быть доказано и непосредственно. Очевидно, β не зависит от z . Ввиду (16) достаточно показать, что указанным свойством обладает и $z^* - \beta z$. Применяя равенство $z = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(z)x^{(j)}$, получим

$$z^* - \beta z = \beta \left(\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j x^{(j)} - z \right) = \beta \sum_{j=1}^{n+1} (\mu_j - \lambda_j(z)) x^{(j)} = \beta \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) x^{(j)}.$$

Последнее выражение не зависит от z . Таким образом, правая часть (15) не меняется при любом выборе $z \in C$. Например, в качестве z можно взять центр тяжести C (см. ниже случай $C = Q_n$).

Теорема 2 доказана.

С помощью теоремы 2 нетрудно описать минимальный положительный гомотетический образ симплекса S , содержащий выпуклое тело C . Пусть $\alpha := \alpha(C; S)$, z и z^* – точки из условия теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. *Единственный транслят αS , содержащий C , имеет вид*

$$\tilde{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = z + \alpha(y - z^*), y \in S\}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя схему доказательства леммы 6 и определение α , нетрудно усмотреть, что любой транслят αS , содержащий C , описан вокруг C . Следовательно, такой транслят $\tilde{S}$ является единственным. Обозначим правую часть (18) через D . Очевидно, D есть гомотетический образ S с коэффициентом α . Так как $1/\beta = \alpha$ и $C' \subset S$, из (15) следует

$$C = \{x = z + \alpha(y - z^*) : y \in C'\} \subset \{x = z + \alpha(y - z^*) : y \in S\} = D.$$

Поэтому D есть транслят αS , содержащий C . Тем самым, $\tilde{S} = D$.

5. Примеры. Приведем примеры нахождения множества C' .

ПРИМЕР 1. *Случай, когда C – параллелепипед.* Сначала пусть $C = Q_n$. Из (13) и (1) имеем

$$\beta = \beta(Q_n; S) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \right)^{-1}. \quad (19)$$

Пусть $m^{(i)}$ есть центр (единственного) отрезка длины $d_i(S)$, принадлежащего S и параллельного i -й координатной оси. Обозначим через Q транслят куба βQ_n , центр которого совпадает с точкой

$$m := \beta \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} m^{(i)}. \quad (20)$$

В [3] было доказано, что $Q \subset S$. Лемма 6 сразу дает равенство $C' = Q$. Последний факт может быть установлен также с помощью (15), что мы и продемонстрируем.

Возьмем в качестве z центр $c = (1/2, \dots, 1/2)$ куба Q_n . Применим следующее равенство, доказанное в [5; теорема 3.1]:

$$m^{(i)} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{|l_{ij}|}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} x^{(j)}. \quad (21)$$

Здесь l_{ij} – коэффициенты λ_j (см. (3)). С учетом (20), (21) и (10) получаем

$$m = \sum_{i=1}^n \frac{\beta}{d_i(S)} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{d_i(S)}{2} |l_{ij}| x^{(j)} = \sum_{j=1}^{n+1} \beta \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |l_{ij}| \right) x^{(j)}.$$

Заметим, что при $z = c$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |l_{ij}| &= \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \left[l_{1j} \left(\frac{1}{2} - x_1 \right) + \dots + l_{nj} \left(\frac{1}{2} - x_1 \right) \right] \\ &= \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (\lambda_j(c) - \lambda_j(x)) = \max_{x \in Q_n} (\lambda_j(z) - \lambda_j(x)) = \mu_j, \end{aligned}$$

т.е. $m = \sum_{j=1}^{n+1} \beta \mu_j x^{(j)}$. Следовательно,

$$z^* = \sum_{j=1}^{n+1} \tau_j x^{(j)} = \sum_{j=1}^{n+1} \beta \mu_j x^{(j)} = m.$$

Поэтому (15) дает

$$C' = \{y : y = m + \beta(x - c), x \in Q_n\} = Q.$$

Пусть теперь S представляет собой невырожденный n -мерный параллелепипед V , ребра которого задаются линейно-независимыми векторами $v_1, \dots, v_n$. Через $a_i(V)$ обозначим длину v_i . Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ через $\delta_i^V(S)$ обозначим максимальную длину отрезка из S , параллельного v_i . Как доказано в [5], отрезок, принадлежащий S , параллельный v_i и имеющий длину $\delta_i^V(S)$, является единственным. Обозначим через $m^{(i)}$ центр этого отрезка. Справедливы равенства

$$\beta = \beta(V; S) = \alpha(V; S)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i(V)}{\delta_i^V(S)} \right)^{-1}. \quad (22)$$

Симплекс S содержит транслят βV , центр которого совпадает с точкой

$$m = \beta \sum_{i=1}^n \frac{a_i(V)}{\delta_i^V(S)} m^{(i)}. \quad (23)$$

Для обоснования этих утверждений заметим, что любой невырожденный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ аффинно-эквивалентен Q_n . Невырожденное аффинное преобразование переводит симплекс в симплекс и сохраняет отношение длин в любом фиксированном направлении. Поэтому справедливость равенств (22), (23) следует из их справедливости в рассмотренном выше случае $V = Q_n$.

В силу леммы 6 транслят βV , содержащийся в S , является единственным. Поэтому описанный с помощью (23) транслят βV совпадает с выпуклым телом C' из условия теоремы 2.

ПРИМЕР 2. *Случай, когда C – симплекс.* Пусть C представляет собой невырожденный симплекс S^* с вершинами $y^{(1)}, \dots, y^{(n+1)}$. Возьмем $z = y^{(n+1)}$. Тогда

$$\beta = \beta(S^*; S) = \left(\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j \right)^{-1},$$

где $\mu_j = \max_{x \in \text{ver}(S^*)} (\lambda_j(y^{(n+1)}) - \lambda_j(x))$. Выпуклое тело C' (максимальный гомотетический образ S^* , принадлежащий S) представляет собой симплекс с вершинами

$$z^* + \beta(y^{(j)} - y^{(n+1)}), \quad 1 \leq j \leq n+1,$$

так что $(n+1)$ -я вершина C' совпадает с z^* . Точка z^* определяется в условии теоремы 2. Наиболее просто формулы выглядят в случае

$$y^{(1)} = e_1, \quad \dots, \quad y^{(n)} = e_n, \quad y^{(n+1)} = 0,$$

где $e_1, \dots, e_n$ – канонический базис $\mathbb{R}^n$. Очевидно, $\mu_j = \max(-l_{1j}, \dots, -l_{nj}, 0)$, поэтому

$$\beta(S^*; S) = \alpha(S^*; S)^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{n+1} \max(-l_{1j}, \dots, -l_{nj}, 0) \right)^{-1}.$$

В этой ситуации C' есть симплекс с вершинами

$$z^* + \beta e_1, \quad \dots, \quad z^* + \beta e_n, \quad z^*.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. R. Scott, “Lattices and convex sets in space”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **36**:143 (1985), 359–362.
- [2] P. R. Scott, “Properties of axial diameters”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39**:3 (1989), 329–333.
- [3] М. В. Невский, “Об осевых диаметрах выпуклого тела”, *Матем. заметки*, **90**:2 (2011), 313–315.
- [4] M. Nevskii, “Properties of axial diameters of a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **46**:2 (2011), 301–312.
- [5] М. В. Невский, “Об одном свойстве n -мерного симплекса”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 580–593.

М. В. Невский

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

Поступило

05.07.2011

Исправленный вариант

14.02.2012