Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Невский, Об осевых диаметрах выпуклого тела,
Матем. заметки, 2011, том 90, выпуск 2, 313–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:48:23

Об осевых диаметрах выпуклого тела

М. В. Невский

1. Введение. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \dots, x_n)$. Через $e_1, \dots, e_n$ обозначим канонический базис $\mathbb{R}^n$. Положим $Q_n := [0, 1]^n$.

Пусть C – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, т.е. компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Через τC обозначим результат гомотетии C относительно центра тяжести с коэффициентом τ . Под *транслятом* ниже понимается результат параллельного переноса. Для $i = 1, \dots, n$ введем в рассмотрение максимальную длину $d_i(C)$ отрезка, содержащегося в C и параллельного оси x_i . Величину $d_i(C)$ будем называть *i -м осевым диаметром* C . Понятие осевого или, иначе говоря, аксиального диаметра выпуклого тела было введено Скоттом [1], [2]. Из его результата [1; теорема 1] следует, что если в C можно вписать транслят куба Q_n , то

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)} \geq 1. \quad (1)$$

Доказательство, приведенное в [1], опирается на n -кратное применение к C симметризаций Штейнера. При этом существенно используется то, что все вершины указанного транслята принадлежат границе C . В настоящей заметке мы докажем неравенство (1) в более общей ситуации, когда подход работы [1] неэффективен. Как следствие мы получим, что для осевых диаметров любого выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)} \geq \alpha(C). \quad (2)$$

Здесь и далее символ $\alpha(C)$ обозначает минимальное $\tau > 0$, для которого некоторый транслят τC содержит Q_n .

2. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для выпуклого тела C

$$\sigma := \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)} \right)^{-1}.$$

Тогда C содержит транслят куба σQ_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $i = 1, \dots, n$ обозначим через D_i произвольный отрезок, принадлежащий C , параллельный i -й координатной оси и имеющий длину $d_i := d_i(C)$. Рассмотрим множество $V := \text{conv}(D_1, \dots, D_n)$. Пусть $\mu_i := \sigma/d_i$, $m^{(i)}$ – центр D_i . Положим $m := \sum_{i=1}^n \mu_i m^{(i)}$. Так как

$$\mu_i > 0, \quad \sum_{i=1}^n \mu_i = \sigma \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} = 1,$$

то m есть выпуклая комбинация точек V . Поэтому $m \in V$. Обозначим через Q транслят куба σQ_n , центр которого совпадает с m . Покажем, что $Q \subset V$. Произвольная вершина Q имеет вид

$$v = m + \left(\pm \frac{\sigma}{2}, \dots, \pm \frac{\sigma}{2} \right)$$

с некоторым сочетанием знаков $\pm$. Имеем

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^n \frac{\sigma}{d_i} m^{(i)} + \sigma \left(\pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2} \right) = \sigma \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} m^{(i)} + \sum_{i=1}^n \left(\pm \frac{1}{2} e_i \right) \right] \\ &= \sigma \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} \left(m^{(i)} \pm \frac{d_i}{2} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu_i \left(m^{(i)} \pm \frac{d_i}{2} e_i \right). \end{aligned}$$

Отрезок D_i параллелен i -й координатной оси, и его длина равна d_i , поэтому $m^{(i)} \pm (d_i/2)e_i \in D_i$. Точки $m^{(i)} \pm (d_i/2)e_i$ суть концы D_i . Таким образом, каждая вершина Q есть выпуклая комбинация концов отрезков $D_1, \dots, D_n$ и, следовательно, принадлежит V . Значит, $Q \subset V$, а так как $V = \text{conv}(D_1, \dots, D_n) \subset C$, то $Q \subset C$. Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть C содержит некоторый транслят Q_n и не содержит никакого транслята τQ_n при $\tau > 1$. Тогда имеет место (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что для некоторого C выполняется $\sum 1/d_i(C) < 1$. Положим $\sigma := (\sum 1/d_i(C))^{-1}$. По предыдущей теореме C содержит транслят куба σQ_n . Но так как $\sigma > 1$, это противоречит условию. Следствие 1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ справедливо (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $\alpha(\cdot)$ следует, что выпуклое тело $C' := \alpha(C)C$ удовлетворяет условию следствия 1. Для C' выполняется неравенство (1), т.е.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C')} \geq 1. \quad (3)$$

Остается заметить, что $d_i(C') = \alpha(C)d_i(C)$, поэтому (3) эквивалентно (2). Это завершает доказательство.

Нетрудно показать, что для любого выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ справедлива следующая нижняя оценка $\alpha(C)$ через осевые диаметры $d_i(C)$:

$$\alpha(C) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)}. \quad (4)$$

Равенство в (4) эквивалентно тому, что C есть гомотетическая копия Q_n .

3. Случай, когда C – симплекс. Пусть S – невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Обозначим вершины S через $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, $1 \leq j \leq n+1$. Матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Определитель $\mathbf{A}$ и объем S связаны соотношением $\text{vol}(S) = |\det(\mathbf{A})|/n!$. Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$.

Введем в рассмотрение величину $\xi(S) := \min\{\tau \geq 1 : Q_n \subset \tau S\}$. Включение $Q_n \subset S$ эквивалентно равенству $\xi(S) = 1$. В [3; теорема 3.1] автор показал, что для любого $i = 1, \dots, n$

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (5)$$

С помощью (5) в [3] было установлено неравенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S) \quad (6)$$

(см. там теорему 4.1 для случая $Q_n \not\subset S$ и следствие 4.2 для случая $Q_n \subset S$). Приведем формулировки утверждений, которые доказываются с помощью соотношений (5)–(6).

ТЕОРЕМА 2. *Неравенство*

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq 1$$

эквивалентно тому, что Q_n принадлежит трансляту S . Равенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} = 1$$

справедливо тогда и только тогда, когда Q_n принадлежит трансляту S и каждая $(n-1)$ -мерная грань последнего содержит вершину Q_n .

ТЕОРЕМА 3. *Имеют место равенства*

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|.$$

Таким образом, если C – невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$, то (2) является равенством. Обратное утверждение верно лишь для $n = 1$, когда любое выпуклое тело C есть отрезок и $\alpha(C) = 1/d_1(C)$. Если $n \geq 2$, то в качестве подходящего C , отличного от симплекса, можно взять множество $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, n \leq \sum x_i \leq 2n$. В этом примере $d_1(C) = \dots = d_n(C) = n$, $\alpha(C) = 1$, поэтому левая и правая части (2) одинаковы и равны 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] P. R. Scott, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **36:3** (1985), 359–362. [2] P. R. Scott, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39:3** (1989), 329–333. [3] М. В. Невский, *Матем. заметки*, **87:4** (2010), 580–593.

М. В. Невский

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

Поступило

28.12.2010