Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Чистяков, Абелевы группы без кручения конечного ранга как эндоморфные модули над своим кольцом эндоморфизмов, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 770–776

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 10:41:45

Абелевы группы без кручения конечного ранга как эндоморфные модули над своим кольцом эндоморфизмов

Д. С. Чистяков

В работе решается вопрос об аддитивности однородных отображений абелевых групп без кручения конечного ранга, а также рассматриваются некоторые близкие вопросы.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm9202

1. Постановка задачи. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, V, W – унитарные левые R -модули. Отображение $f: V \rightarrow W$, для всех $r \in R, v \in V$ удовлетворяющее условию $f(rv) = rf(v)$, называется *однородным*. Множество всех таких отображений обозначим $M_R(V, W)$. При этом множество $M_R(V, V)$, обозначаемое в дальнейшем $M_R(V)$, является почти кольцом относительно операций сложения и композиции отображений. Включение $E_R(V) \subseteq M_R(V)$ выполняется всегда. Если справедливо обратное включение, то R -модуль V называется *эндоморфным*. Если $M_R(V)$ – кольцо, то модуль V называется *полуэндоморфным*. Абелеву группу G будем называть *эндоморфной (полуэндоморфной)*, если она является эндоморфным (полуэндоморфным) модулем над своим кольцом эндоморфизмов $E(G)$. Если группа G эндоморфна, то $M_{E(G)}(G) = Z(E(G))$, где $Z(E(G))$ – центр кольца $E(G)$. Модуль V называется *модулем с однозначным сложением (UA-модулем)*, если для любого модуля W каждая биекция из $M_R(V, W)$ является модульным изоморфизмом. Это эквивалентно следующему: на множестве V невозможно задать новое сложение, не изменяя при этом действия кольца R на V . Данной и подобной тематике посвящены, например, работы [1]–[7]. Книги [8]–[10] служат признанным руководством по теории колец, модулей и абелевых групп; понятия и факты, используемые в настоящей статье, им соответствуют. В статье изучаются абелевы группы без кручения конечного ранга, являющиеся эндоморфными модулями, UA-модулями над своим кольцом эндоморфизмов.

2. Основные понятия и обозначения. При работе с абелевыми группами без кручения конечного ранга используются понятия квазиравенства и квазиэндоморфизма. Для удобства читателя приведем соответствующие определения.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы. Государственный контракт № 14.В37.21.0363.

Пусть A и B – абелевы группы без кручения. Будем говорить, что A *квазисодержится* в B , если $nA \subseteq B$ для некоторого натурального числа n . Если A квазисодержится в B и B квазисодержится в A (т.е., если $nA \subseteq B$, $mB \subseteq A$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$), то говорят, что A *квазиравна* B ($A \doteq B$). Квазиравенство $G \doteq \bigoplus_{i \in I} G_i$ называется *квазиразложением* (квазипрямым разложением) группы G , при этом подгруппы G_i называются *квазислагаемыми* группы G . Если группа G не обладает нетривиальными квазиразложениями, то ее называют *сильно неразложимой*.

Кольцо $\mathbb{Q} \otimes E(G)$ называется *кольцом квазиэндоморфизмов* группы G и обозначается $\mathcal{E}(G)$. Заметим, что

$$\mathcal{E}(G) = \{\alpha \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes G) \mid (\exists n \in \mathbb{N})(n\alpha \in E(G))\}.$$

Абелева группа без кручения G называется *квази- E -локально циклической*, если для любых $a, b \in G$ существует $c \in G$ такой, что $a, b \in \mathcal{E}(G)c$. Абелева группа G называется *жесткой*, если $\mathcal{E}(G) \cong \mathbb{Q}$.

Псевдоцоклем группы без кручения G (обозначение $\text{Soc } G$) называется сервантная подгруппа, порожденная всеми ее минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами (*phi*-подгруппами). Абелева группа без кручения называется *неприводимой*, если она не обладает собственными *phi*-подгруппами.

Абелева группа без кручения G называется *вполне транзитивной*, если для любых ненулевых элементов $a, b \in G$ таких, что $\chi(a) \leq \chi(b)$ ($\chi(g)$ – характеристика элемента $g \in G$ в группе G), существует эндоморфизм $\alpha \in E(G)$ со свойством $\alpha a = b$. К вполне транзитивным группам относятся алгебраически компактные, однородные сепарабельные, квазисервантно инъективные, сильно однородные абелевы группы. При изучении колец эндоморфизмов групп из этого класса важную роль играют сильно однородные кольца (см., например, [9; теорема 41.2]). Напомним, что кольцо R называется *сильно однородным*, если всякий его элемент есть целое кратное некоторого обратимого в R элемента. Сильно однородное кольцо является кольцом главных идеалов [9; предложение 19.9].

Подмодуль V' левого R -модуля V называется *чистым* (по П. Кону), если для любого правого R -модуля W естественный гомоморфизм $W \otimes_R V' \rightarrow W \otimes_R V$ является мономорфизмом. Модуль называется *чисто простым*, если он не содержит в себе собственных чистых подмодулей, и *чисто полупростым*, если он изоморфен прямой сумме чисто простых модулей. Подмножество A некоторого R -модуля называется *сильно R -замкнутым*, если для любых $r \in R$, $a \in A$ справедливо, что $ra \in A$. Непустое подмножество A левого R -модуля V называется *сильно R -сервантным*, если $0 \neq rv \in A$ влечет $v \in A$ для всех $r \in R$, $v \in V$.

Модуль называется *дистрибутивным*, если решетка его подмодулей дистрибутивна, при этом под *эндодистрибутивностью* модуля понимается его дистрибутивность как модуля над своим кольцом эндоморфизмов.

Для абелевой группы без кручения G примем такие обозначения: $r(G)$ – ранг группы G , $\Pi(G) = \{p \in P \mid pG \neq G\}$, где P – множество простых чисел, $M_0(G) = \{f: G \rightarrow G \mid f(0) = 0\}$. Заметим, что $M_0(G)$ – почтикольцо. Кроме того, $J_p(\mathbb{Q}_p^*)$ – группа (кольцо) целых p -адических чисел.

3. Максимальные подкольца почтикольца $M_0(G)$. Задача описания максимальных подколец почтикольца $M_0(G)$ поставлена в работе [4]. Там, например, доказано, что кольцо эндоморфизмов квази- E -локально циклической группы G

является максимальным подкольцом почтикольца $M_0(G)$ [4; теорема 1]. Заметим, что для групп без кручения конечного ранга G свойство квази- E -локальности цикличности равносильно цикличности $\mathcal{E}(G)$ -модуля $\mathbb{Q} \otimes G$ [4; лемма 1].

ТЕОРЕМА 1. *Если G – эндодистрибутивная абелева группа, то $E(G)$ – максимальное подкольцо почтикольца $M_0(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – подкольцо почтикольца $M_0(G)$, которое содержит кольцо $E(G)$, и пусть $g_1, g_2 \in G, s \in S$. Из дистрибутивности $E(G)$ -модуля G следует, что найдутся $\varphi_1, \varphi_2 \in E(G)$ такие, что $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ и $\varphi_1 g_1 \in E(G)g_2, \varphi_2 g_2 \in E(G)g_1$ [8; утверждение 9.2]. Имеем $\varphi_1 g_1 = \varphi'_1 g_2, \varphi_2 g_2 = \varphi'_2 g_1$ для некоторых $\varphi'_1, \varphi'_2 \in E(G)$, и $s = s \cdot 1 = s(\varphi_1 + \varphi_2) = s\varphi_1 + s\varphi_2$. Далее,

$$\begin{aligned} s\varphi_1(g_1 + g_2) &= s(\varphi_1 g_1 + \varphi_1 g_2) = s(\varphi'_1 g_2 + \varphi_1 g_2) = s(\varphi'_1 + \varphi_1)g_2 \\ &= (s\varphi'_1 + s\varphi_1)g_2 = s\varphi'_1 g_2 + s\varphi_1 g_2 = s\varphi_1 g_1 + s\varphi_1 g_2, \\ s\varphi_2(g_1 + g_2) &= s(\varphi_2 g_1 + \varphi_2 g_2) = s(\varphi_2 g_1 + \varphi'_2 g_1) = s(\varphi_2 + \varphi'_2)g_1 \\ &= (s\varphi_2 + s\varphi'_2)g_1 = s\varphi_2 g_1 + s\varphi'_2 g_1 = s\varphi_2 g_1 + s\varphi_2 g_2. \end{aligned}$$

Отсюда $s(g_1 + g_2) = s(g_1) + s(g_2), s \in E(G)$. Следовательно, $S = E(G)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если G – периодическая абелева группа, то $E(G)$ – максимальное подкольцо почтикольца $M_0(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [11], что всякий периодический модуль над дедекиндовым кольцом эндодистрибутивен. Используя дедекиндовость кольца целых чисел и тот факт, что абелевы группы суть $\mathbb{Z}$ -модули, получаем требуемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если G – квази- E -локально циклическая абелева группа, то $M_{E(G)}(G, H) = \text{Hom}_{E(G)}(G, H)$ для любого $E(G)$ -модуля без кручения H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in G$. Существуют $c \in G$ и $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(G)$ с условием $a = \varphi c, b = \psi c$. Для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеем $n\varphi \in E(G), n\psi \in E(G)$. Далее для любого $f \in M_{E(G)}(G, H)$ получаем

$$\begin{aligned} nf(a + b) &= f(n\varphi c + n\psi c) = f((n\varphi + n\psi)c) = (n\varphi + n\psi)f(c) \\ &= n\varphi f(c) + n\psi f(c) = f(n\varphi c) + f(n\psi c) = nf(a) + nf(b), \end{aligned}$$

откуда следует $f \in \text{Hom}_{E(G)}(G, H)$, поэтому $M_{E(G)}(G, H) \subseteq \text{Hom}_{E(G)}(G, H)$. Обратное включение всегда справедливо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если G – вполне транзитивная абелева группа без кручения, то $M_{E(G)}(G)$ – кольцо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f, f_1, f_2 \in M_{E(G)}(G)$ и $x \in G$. Очевидны неравенства: $\chi(x) \leq \chi(f_1(x))$ и $\chi(x) \leq \chi(f_2(x))$. В силу вполне транзитивности группы G найдутся $\varphi, \psi \in E(G)$ с условием $\varphi(x) = f_1(x)$ и $\psi(x) = f_2(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(f_1 + f_2)(x) &= f(\varphi(x) + \psi(x)) = (\varphi + \psi)f(x) = \varphi f(x) + \psi f(x) \\ &= f(\varphi(x)) + f(\psi(x)) = ff_1(x) + ff_2(x). \end{aligned}$$

Закон левой дистрибутивности для всех элементов почтикольца $M_{E(G)}(G)$ выполнен, поэтому группа G полундоморфна.

4. Эндоморфные вполне транзитивные абелевы группы без кручения конечного ранга. Класс вполне транзитивных абелевых групп без кручения конечного ранга хорошо изучен (см. [9; гл. 7]). Некоторые важные свойства групп этого класса будут использованы при доказательстве основного результата данной работы, которым является следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – вполне транзитивная абелева группа без кручения конечного ранга. Следующие условия эквивалентны:

- 1) группа G эндодистрибутивна;
- 2) $M_{E(G)}(G, H) = \text{Hom}_{E(G)}(G, H)$ для любого $E(G)$ -модуля H без кручения;
- 3) группа G однородно разложима;
- 4) группа G разлагается в прямую сумму неприводимых вполне транзитивных слагаемых;
- 5) G – квази- E -локально циклическая группа;
- 6) $\mathbb{Q} \otimes G$ – циклический $\mathcal{E}(G)$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из того факта, что для любого $E(G)$ -модуля H $E(G)$ -однородное отображение $f: G \rightarrow H$ аддитивно. Действительно, согласно [8; утверждение 9.2], имеем: для любых $x, y \in G$ существуют такие $\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1 \in E(G)$, что $1 = \varphi + \psi$, $\varphi x = \varphi_1 y$, $\psi y = \psi_1 x$. Поэтому для каждого $f \in M_{E(G)}(G, H)$ получаем

$$\begin{aligned} \varphi f(x + y) &= f(\varphi x + \varphi y) = f(\varphi_1 y + \varphi y) = f((\varphi_1 + \varphi)y) = (\varphi_1 + \varphi)f(y) \\ &= \varphi_1 f(y) + \varphi f(y) = f(\varphi_1 y) + \varphi f(y) = f(\varphi x) + \varphi f(y) = \varphi f(x) + \varphi f(y), \\ \psi f(x + y) &= f(\psi x + \psi y) = f(\psi x + \psi_1 x) = f((\psi + \psi_1)x) = (\psi + \psi_1)f(x) \\ &= \psi f(x) + \psi_1 f(x) = \psi f(x) + f(\psi_1 x) = \psi f(x) + f(\psi y) = \psi f(x) + \psi f(y). \end{aligned}$$

Отсюда

$$(\varphi + \psi)f(x + y) = (\varphi + \psi)f(x) + (\varphi + \psi)f(y),$$

и, следовательно, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Таким образом, $f \in \text{Hom}_{E(G)}(G, H)$, $M_{E(G)}(G, H) \subseteq \text{Hom}_{E(G)}(G, H)$. Обратное включение всегда имеет место, поэтому $M_{E(G)}(G, H) = \text{Hom}_{E(G)}(G, H)$.

2) $\Rightarrow$ 3) Если G – вполне транзитивная абелева группа без кручения конечного ранга, то согласно [9; следствие 43.9] имеем прямое разложение

$$G = G_1 \bigoplus \cdots \bigoplus G_k \bigoplus G_{k+1} \bigoplus \cdots \bigoplus G_{k+l},$$

где $\Pi(G_i) \cap \Pi(G_j) = \emptyset$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, k + l$. Для $i = 1, \dots, k$ группа G_i однородная вполне транзитивная, а для $i = k + 1, \dots, k + l$ группа G_i неоднородная вполне транзитивная и $\mathcal{E}(G_i)$ – тело. При этом, на основании [9; теорема 41.2, доказательство теоремы 42.2] все кольца $E(G_i)$ сильно однородны ($i = k + 1, \dots, k + l$) и $\text{Hom}(G_i, G_j) = 0$ для $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, k + l$.

Докажем, что группа G не имеет неоднородных прямых слагаемых. Пусть $l > 0$ и $s \in \{k + 1, \dots, k + l\}$, т.е. слагаемое G_s неоднородно. Поскольку для вполне транзитивной группы без кручения свойства однородности и неприводимости эквивалентны, то слагаемое G_s не может быть неприводимым. Пусть A – нетривиальная pfi -подгруппа группы G_s . Для $\varphi \in E(G_s)$ и $0 \neq a \in A$ рассмотрим уравнение $\varphi x = a$.

Так как кольцо $E(G_s)$ сильно однородно, найдутся такие $m \in \mathbb{N}$ и $\psi \in \text{Aut}(G_s)$, что $\varphi = m\psi$. Поэтому $\varphi x = m\psi x = a$. Сервантность подгруппы A в группе G_s дает $\psi x = a' \in A$. Поэтому $x = \psi^{-1}a' \in A$ и A – сильно $E(G_s)$ -сервантное подмножество в G_s . Так как подгруппа A вполне характеристична в G_s , то A – сильно $E(G_s)$ -замкнутое подмножество в G_s .

Построим однородную биекцию $f_s: G_s \rightarrow G_s$ по правилу

$$f_s(g) = \begin{cases} g, & g \in A, \\ -g, & g \in G_s \setminus A. \end{cases}$$

Легко проверить, что $f_s \in M_{E(G_s)}(G_s) \setminus Z(E(G_s))$. Поэтому группа G_s не эндоморфна как $E(G_s)$ -модуль и, следовательно, как $E(G)$ -модуль. Но в работе [2; лемма 2.3] доказано, что прямое слагаемое эндоморфного модуля эндоморфно. Следовательно, группа G не имеет вполне транзитивных неоднородных прямых слагаемых, $l = 0$, и тем самым доказана импликация $2) \Rightarrow 3)$.

$3) \Rightarrow 1)$ Доказана в [11; теорема 2.10].

$3) \Rightarrow 4)$ Для вполне транзитивной абелевой группы без кручения свойства однородности и неприводимости равносильны ([9; лемма 25.2]).

$4) \Rightarrow 5)$ По [4; теорема 6] неприводимая группа является квази- E -локально циклической. Из [4; лемма 1] следует, что прямая сумма таких групп снова будет квази- E -локально циклической группой.

$5) \Rightarrow 2)$ Следует из предложения 1.

$5) \Leftrightarrow 6)$ Доказана в [4; лемма 1].

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для вполне транзитивной абелевой группы G без кручения конечного ранга следующие условия эквивалентны:

- 1) группа G не является модулем с однозначным сложением над своим кольцом эндоморфизмов;
- 2) группа G полуэндоморфна, но не эндоморфна;
- 3) группа G имеет неразложимое неоднородное вполне транзитивное прямое слагаемое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположение об однородной разложимости группы G приводит к равенству $M_{E(G)}(G) = Z(E(G))$; следовательно, $E(G)$ -модуль G является эндоморфным. Однородно разложимая вполне транзитивная абелева группа без кручения является эндодистрибутивной, поэтому $M_{E(G)}(G, H) = \text{Hom}_{E(G)}(G, H)$. Это доказывает импликации $1) \Rightarrow 3)$ и $2) \Rightarrow 3)$. Если группа G не является однородно разложимой, то она не эндоморфна (см. доказательство теоремы 2). Кроме этого, новое сложение на слагаемом G_s зададим по правилу: $a +_s b = f_s^{-1}(f_s(a) + f_s(b))$, $a, b \in G_s$, где f_s – биекция, определенная в доказательстве теоремы 2. Новое сложение $\boxplus$ на группе G построим следующим образом:

$$(x_1, \dots, x_s, \dots, x_k) \boxplus (y_1, \dots, y_s, \dots, y_k) = (x_1 + y_1, \dots, x_s +_s y_s, \dots, x_k + y_k),$$

где $x_i, y_i \in G_i$, $i = 1, \dots, k$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если G – эндоморфная вполне транзитивная абелева группа без кручения конечного ранга, то ее кольцо эндоморфизмов $E(G)$ является максимальным подкольцом почтикольца $M_0(G)$.

5. Некоторые следствия для абелевых групп без кручения конечного ранга. Результаты предыдущих пунктов, а также работ [4], [5], [11], [12] позволяют указать равносильные эндоморфности свойства для некоторых классов абелевых групп без кручения.

ТЕОРЕМА 3. *Для абелевой группы без кручения G ранга 2 следующие условия эквивалентны:*

- 1) G – квази- E -локально циклическая группа;
- 2) $E(G)$ – максимальное подкольцо почтикольца $M_0(G)$;
- 3) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}(G) \geq 2$;
- 4) группа G не является жесткой;
- 5) группа G эндоморфна;
- 6) G – чисто простой или чисто полупростой модуль над кольцом $E(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий 1)–4) показана в [4; теорема 3], 4) $\Leftrightarrow$ 5) доказана в [5; теорема 5], 4) $\Leftrightarrow$ 6) доказана в [12; теорема 7].

ТЕОРЕМА 4. *Для сильно неразложимой абелевой группы без кручения G конечного ранга такой, что $G = \text{Soc } G$, следующие условия эквивалентны:*

- 1) G – квази- E -локально циклическая группа;
- 2) $r(E^+(G)) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}(G)) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes G) = r(G)$;
- 3) $\dim_{\mathcal{E}(G)}(\mathbb{Q} \otimes G) = 1$;
- 4) G – неприводимая группа;
- 5) G – эндоморфная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий 1)–4), 4) и 5) доказаны, соответственно, в [4; теорема 6], [5; теорема 4].

Сильно однородные кольца возникают при изучении, так называемых, групп Мерли. Это абелевы группы без кручения конечного ранга из класса $\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ – класс всех редуцированных абелевых групп G таких, что $r_p(G) = \dim_{\mathbb{Z}_p}(G/pG) \leq 1$ для всех простых p . По [9; предложение 44.1] заключаем, что любая группа из $\mathcal{E}$ изоморфна какой-то сервантной подгруппе группы $\prod_{p \in P} J_p$.

ТЕОРЕМА 5. *Для редуцированной абелевой группы без кручения конечного ранга $G \in \mathcal{E}$ следующие условия эквивалентны:*

- 1) группа G эндоморфна,
- 2) группа G однородно разложима,
- 3) группа G эндодистрибутивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность 2) и 3) доказана в [11; теорема 2.11]. Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) следует из доказательства импликации 1) $\Rightarrow$ 2) теоремы 2. Доказательство 1) $\Rightarrow$ 2) проходит так же, как в теореме 2. Покажем это. Кольцо $\prod_{p \in P} \mathbb{Q}_p^*$ не имеет ненулевых нильпотентных элементов. Следовательно, их нет в кольце $E(G)$ для любой группы $G \in \mathcal{E}$. Поэтому, если ранг группы G конечен, то $G = \text{Soc } G$ [9; теорема 5.11]). По [9; следствие 44.3] заключаем, что $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$, множество I конечно и все кольца $E(G_i)$ сильно однородны и для каждого p такого, что $pE(G_i) \neq E(G_i)$ выполняется $E(G_i)/pE(G_i) \cong F_p$. Так же, как и в доказательстве теоремы 2, на неоднородном прямом слагаемом можно построить однородное не аддитивное отображение и тем самым прийти к противоречию. Теорема доказана.

Автор признателен О.В. Любимцеву за постановку задачи, П.А. Крылову за постоянное внимание к работе автора.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Fuchs, C. J. Maxson, G. Pilz, “On rings for which homogeneous maps are linear”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **112**:1 (1991), 1–7.
- [2] J. Hausen, J. A. Johnson, “Centralizer near-rings that are rings”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **59**:2 (1995), 173–183.
- [3] A. B. van der Merwe, “Unique addition modules”, *Comm. Algebra*, **27**:9 (1999), 4103–4115.
- [4] M. Dugas, C. J. Maxson, “Quasi-E-locally cyclic torsion-free abelian groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**:12 (2005), 3447–3453.
- [5] Д. С. Чистяков, О. В. Любимцев, “Абелевы группы как эндоморфные модули над своим кольцом эндоморфизмов”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:1 (2007), 229–233.
- [6] О. В. Любимцев, Д. С. Чистяков, “Абелевы группы как UA-модули над кольцом $\mathbb{Z}$ ”, *Матем. заметки*, **87**:3 (2010), 412–416.
- [7] Д. С. Чистяков, “Эндоморфные неразложимые абелевы группы без кручения ранга 3”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем., мех.*, **13**:1 (2011), 61–66.
- [8] А. А. Туганбаев, *Теория колец. Арифметические модули и кольца*, МЦНМО, М., 2009.
- [9] П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев, *Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов*, Факториал, М., 2006.
- [10] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 1, Мир, М., 1974; Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 2, Мир, М., 1977.
- [11] Е. В. Тараханов, “Эндодистрибутивные модули над дедекиндовыми кольцами”, *Абелевы группы и модули*, **9**, Томск. ун-т, Томск, 1990, 106–115.
- [12] М. А. Турманов, “Эндочистые подмодули абелевых групп без кручения ранга 2”, *Абелевы группы и модули*, **9**, Томск. ун-т, Томск, 1990, 119–124.

Д. С. Чистяков

Нижегородский коммерческий институт

E-mail: chistyakovds@yandex.ru

Поступило

28.06.2011

Исправленный вариант

20.12.2011