Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Агапов, Д. Н. Александров, Полиномиальные интегралы четвертой степени натуральной механической системы на двумерном торе, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 790–793

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 18:18:48

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Полиномиальные интегралы четвертой степени натуральной механической системы на двумерном торе

С. В. Агапов, Д. Н. Александров

1. Введение. Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(x, y),$$

где V – периодическая функция на плоскости $\mathbb{R}^2$ с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Наличие у гамильтоновой системы (1) первого интеграла $F = F(x, y, p_1, p_2)$ эквивалентно занулению скобки Пуассона $\{H, F\} = 0$. Известны следующие случаи наличия дополнительного интеграла:

- 1) если $V(x, y) = V(\alpha x + \beta y)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то существует полиномиальный по импульсам интеграл вида $F_1 = \alpha p_2 - \beta p_1$;
- 2) если $V(x, y) = V_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + V_2(\alpha_2 x + \beta_2 y)$, где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ – некоторые константы, согласованные с решеткой Λ , то существует интеграл вида

$$F_2 = (d_1 + d_2)p_1^2 + 4p_1p_2 - (d_1 + d_2)p_2^2 + 2(d_1 - d_2)(V_1 + V_2),$$

$$d_i = \alpha_i / \beta_i.$$

Бялый [1] доказал, что в случае решетки $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, если у гамильтоновой системы (1) (с гладким потенциалом V) существует дополнительный интеграл третьей степени по импульсам, то существует интеграл первой степени. Козлов и Денисова [2] обобщили этот результат на произвольную решетку Λ . В [1] анонсирован аналогичный результат об интегралах четвертой степени. В [2] показано, что интеграл четвертой степени сводится к интегралам меньшей степени всегда за исключением случая, когда потенциал V имеет вид

$$V(x, y) = V_1(x) + V_2(x + y) + V_3(y) + V_4(y - x). \quad (2)$$

Недавно выяснилось, что методы работы [1] также не покрывают этот последний случай. Исследованию этого случая посвящена данная работа.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ МД-249.2011.1 и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00124а).

DOI: 10.4213/mzm9206

Разложим $V_i(z)$ в ряд Фурье

$$V_i(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_i^n e^{2\pi i n z}.$$

Из вещественности V_i следует, что $v_i^n = \overline{v_i^{-n}}$.

ТЕОРЕМА 1. Если гамильтонова система (1) с периодическим потенциалом (2) имеет полиномиальный по импульсам интеграл четвертой степени, то каждая из функций V_i содержит бесконечно много ненулевых коэффициентов Фурье в своем разложении.

ТЕОРЕМА 2. Пусть v_i^n быстро убывают с ростом $|n|$ (как коэффициенты Фурье достаточно гладкой функции). Тогда при условиях теоремы 1 имеют место равенства $|v_1^n| = |v_3^n|$, $|v_2^n| = |v_4^n|$.

В [3] изучалась система (1) в случае дополнительного полиномиального интеграла нечетной степени. Отметим, что в сингулярном случае система (1) может иметь интеграл четвертой степени. Например, в случае потенциала

$$V = \frac{a + b \sin x}{\cos^2 x} + \cos(x + y) + \frac{c + d \sin y}{\cos^2 y} - \cos(y - x), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

(см. [4]). Другие примеры можно найти в [5; с. 83–84].

Козлов и Трещев [6] доказали, что если гамильтонова система интегрируема и потенциал V является тригонометрическим полиномом, то дополнительный интеграл высокой степени по импульсам сводится к интегралу первой или второй степени.

2. Доказательство теорем 1, 2.

ЛЕММА 1. Если у системы (1) с периодическим потенциалом (2) существует полиномиальный интеграл четвертой степени по импульсам и при этом не существует интегралов меньшей степени, то коэффициенты v_i^k удовлетворяют уравнению

$$(m + n)(m v_2^n v_3^{m-n} - n v_1^{-m+n} v_2^m) - (m - n)(n v_1^{m+n} v_4^m + m v_3^{m+n} v_4^{-n}) = 0, \quad (3)$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, вопрос о существовании интеграла сводится к вопросу о существовании решений дискретного уравнения (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополнительный интеграл имеет вид

$$F = \frac{p_1^2 p_2^2}{2} + f_0 p_1^2 + f_1 p_1 p_2 + f_2 p_2^2 + f$$

(см. [2]). Условие $\{H, F\} = 0$ эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$f_{0x} = 0, \quad (4)$$

$$f_{0y} + f_{1x} = V_y = V_2'(x + y) + V_3'(y) + V_4'(y - x), \quad (5)$$

$$f_{1y} + f_{2x} = V_x = V_1'(x) + V_2'(x + y) - V_4'(y - x), \quad (6)$$

$$f_{2y} = 0, \quad (7)$$

$$-f_x + 2f_0 V_x + f_1 V_y = 0, \quad (8)$$

$$-f_y + f_1 V_x + 2f_2 V_y = 0, \quad (9)$$

Из (4)–(7) находятся f_0, f_1, f_2 . Из (8), (9) следует

$$2(V_3(y) - V_1(x))(V_2(x+y) + V_4(y-x)) + V_3'(y) \int (V_2(x+y) - V_4(y-x)) dx \\ - V_1'(x) \int (V_2(x+y) - V_4(y-x)) dy + F(y) - G(x) = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $e^{2\pi i(nx+my)}$ в последнем равенстве для $n \neq 0$, $m \neq 0$, получаем уравнение (3). Лемма 1 доказана.

Далее, пусть $m \neq n$, $m \neq -n$, $m \neq 0$ и $n \neq 0$. Поделим уравнение (3) на $mn(m-n) \times (m+n)$. Пусть $u_i^k = v_i^k/k$; тогда (3) примет вид

$$u_2^n u_3^{m-n} + u_1^{-m+n} u_2^m - u_1^{m+n} u_4^m + u_3^{m+n} u_4^{-n} = 0. \quad (10)$$

ЛЕММА 2. Если функция V_1 тождественно равна нулю, то интеграл F сводится к интегралам меньшей степени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $V_1 \equiv 0$. Тогда (10) принимает вид $u_2^n u_3^{m-n} + u_3^{m+n} u_4^{-n} = 0$. Отметим, что V_2, V_3, V_4 не могут быть константами, так как в противном случае интеграл F сводится к интегралам меньшей степени.

Рассмотрим сначала случай, когда V_3 содержит бесконечное число ненулевых слагаемых в разложении Фурье. Фиксируем $n > 0$ такое, что $u_2^n \neq 0$. Тогда

$$u_3^{m-n} = -u_3^{m+n} \frac{u_4^{-n}}{u_2^n}.$$

В силу того, что V_3 содержит бесконечное число слагаемых в разложении Фурье, существует m такое, что $u_3^{m-n} \neq 0$. Если $|u_4^{-n}/u_2^n| > 1$, то при $m < 0$ среди коэффициентов $|u_3^m|$ содержится расходящаяся геометрическая прогрессия; следовательно, ряд для V_3 расходится. Аналогично, если $|u_4^{-n}/u_2^n| < 1$, то при $m > 0$ среди коэффициентов $|u_3^m|$ содержится расходящаяся геометрическая прогрессия. Если $|u_4^{-n}/u_2^n| = 1$, то ряд для V_3 также расходится.

Теперь рассмотрим случай, когда $V_3(z) = \sum_{n=-k}^k v_3^n e^{2\pi i n z}$. Если V_2 и V_4 одновременно содержат лишь конечное число ненулевых слагаемых в разложениях Фурье, то по теореме Козлова–Трещева [6] интеграл F сводится к интегралу меньшей степени. Нетрудно понять, что и V_2 , и V_4 должны содержать бесконечно много ненулевых слагаемых в разложениях. Фиксируем $m-n=s$ так, чтобы $u_3^s \neq 0$. Тогда в силу того, что V_3 содержит конечное число слагаемых в разложении Фурье, существует $n_0 > 0$ такое, что для любого $n > n_0$ $u_3^{m+n} = 0$. Следовательно, $u_2^n = 0$ при всех $n > n_0$. Получаем противоречие. Лемма 2 доказана.

Таким образом, мы можем считать, что V_1 не равняется тождественно нулю. Доказательство теоремы 1 идейно не отличается от доказательства леммы 2, поэтому мы здесь его опускаем.

Докажем теорему 2. Из (10) следует

$$u_2^n u_3^{m-n} + u_1^{-m+n} u_2^m - u_1^{m+n} u_4^m + u_3^{m+n} u_4^{-n} = 0, \\ u_2^n u_3^{-(m+n)} + u_1^{m+n} u_2^{-m} - u_1^{-m+n} u_4^{-m} + u_3^{-m+n} u_4^{-n} = 0, \\ u_2^m u_3^{-m+n} + u_1^{m-n} u_2^n - u_1^{m+n} u_4^n + u_3^{m+n} u_4^{-m} = 0, \\ u_2^m u_3^{-(m+n)} + u_1^{m+n} u_2^{-n} - u_1^{m-n} u_4^{-n} + u_3^{m-n} u_4^{-m} = 0.$$

Положим $w_k^j = a_k^j + i b_k^j$. Полученную систему запишем в виде $A_1 q_1(m, n) = 0$, где $q_1(m, n) = (a_1^{m+n}, b_1^{m+n}, a_1^{m-n}, b_1^{m-n}, a_3^{m+n}, b_3^{m+n}, a_3^{m-n}, b_3^{m-n})^\top$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_4^m & b_4^m & -a_2^m & -b_2^m & -a_4^n & -b_4^n & a_2^n & -b_2^n \\ -b_4^m & -a_4^m & -b_2^m & a_2^m & b_4^n & -a_4^n & b_2^n & a_2^n \\ -a_2^m & -b_2^m & -a_4^m & b_4^m & -a_2^n & -b_2^n & a_4^n & -b_4^n \\ b_2^m & -a_2^m & b_4^m & a_4^m & -b_2^n & a_2^n & -b_4^n & -a_4^n \\ -a_4^n & b_4^n & a_2^n & -b_2^n & -a_4^m & -b_4^m & -a_2^m & -b_2^m \\ -b_4^n & -a_4^n & b_2^n & a_2^n & b_4^m & -a_4^m & -b_2^m & a_2^m \\ -a_2^n & -b_2^n & a_4^n & b_4^n & -a_2^m & -b_2^m & -a_4^m & -b_4^m \\ b_2^n & -a_2^n & -b_4^n & a_4^n & -b_2^m & a_2^m & b_4^m & -a_4^m \end{pmatrix}.$$

Из условия $\det A_1 = 0$ получаем

$$((a_2^m)^2 + (b_2^m)^2 - (a_4^m)^2 - (b_4^m)^2 - (a_2^n)^2 - (b_2^n)^2 + (a_4^n)^2 + (b_4^n)^2)^4 = 0$$

или, эквивалентно,

$$\frac{|v_2^m|^2 - |v_4^m|^2}{m^2} = \frac{|v_2^n|^2 - |v_4^n|^2}{n^2}.$$

Фиксируем m . Тогда по теореме 1 найдется последовательность $n_1, n_2, \dots, n_s, \dots$ такая, что $q_1(m, n_s) \neq 0$. Левая часть последнего равенства остается постоянной, а правая стремится к нулю при $s \rightarrow +\infty$, так как $|v_2^{n_s}|$ и $|v_4^{n_s}|$ стремятся к нулю. Следовательно, $|v_2^m| = |v_4^m|$ для всех m . Аналогично доказывается $|v_1^m| = |v_3^m|$. Теорема 2 доказана.

Авторы благодарят научного руководителя А. Е. Миронова за постановку задачи и полезные обсуждения, а также М. Л. Бялого и В. В. Козлова за стимулирующий интерес к этой работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Л. Бялый, *Функц. анализ и его прил.*, **21**:4 (1987), 64–65. [2] Н. В. Денисова, В. В. Козлов, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 43–63. [3] А. Е. Миронов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 145–156. [4] G. Bozis, *Celestial Mech.*, **28**:4 (1982), 367–380. [5] А. М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Наука, М., 1990. [6] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *Матем. сб.*, **135**(177):1 (1988), 119–138.

С. В. Агапов

Новосибирский государственный университет

E-mail: nevermoreasv@yandex.ru

Поступило

30.06.2011

Исправленный вариант

13.11.2012

Д. Н. Александров

Новосибирский государственный университет

E-mail: alexandrovdmitrii@bk.ru