Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Т. З. Нгуен, Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 2, 246–265

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9207>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 08:06:20

Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$

Т. Т. З. Нгуен

В данной статье предлагается общий подход к описанию аффинно-однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$. В 2-мерном строго псевдо-выпуклом (СПВ) случае в рамках такого подхода задача классификации решена для трех отдельных классов, составляющих всю совокупность изучаемых многообразий. Одним из них является класс поверхностей трубчатого типа.

Библиография: 22 названия.

DOI: 10.4213/mzm9207

Введение. В настоящей статье изучается один класс однородных вещественных подмногообразий 3-мерного комплексного пространства. Задача описания таких многообразий не решена пока в полном объеме. Имеется серия частных результатов [1]–[3] о вещественных голоморфно-однородных гиперповерхностях, имеющих “богатые” группы голоморфных преобразований. В большой работе [4] описаны вырожденные по Леви однородные гиперповерхности 3-мерных комплексных пространств. Имеется также работа [5] с классификацией голоморфно-однородных подмногообразий коразмерности 2 в 3-мерных комплексных пространствах.

В рамках изучения голоморфной однородности вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств естественно выделить более простую задачу классификации аффинно-однородных многообразий (см. [6]). В работах [7], [8] дано ее полное решение в случае пространства $\mathbb{C}^2$. Отметим, что голоморфно-однородные вещественные гиперповерхности 2-мерных комплексных пространств были полностью описаны еще в работе Картана [9]; при этом значительную часть списка Картана составляют именно аффинно-однородные поверхности.

Задача описания аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$ оказалась существенно сложнее 2-мерной ситуации. Здесь к настоящему времени известно лишь достаточно большое количество примеров однородных многообразий. Отметим среди них, прежде всего, трубчатые поверхности (трубки) вида $M = \Gamma + i\mathbb{R}^3$ над аффинно-однородными поверхностями Γ из $\mathbb{R}^3$. Большое семейство аффинно-однородных многообразий, не сводимых аффинными преобразованиями к трубкам, построено в работах [6], [10], [11].

В данной статье предлагается общий подход к описанию аффинно-однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$. В 2-мерном строго псевдо-выпуклом (СПВ)

случае в рамках такого подхода задача классификации решена для трех отдельных классов, составляющих всю совокупность изучаемых многообразий. Одним из них является класс поверхностей трубчатого типа.

Схему изучения аффинной однородности в $\mathbb{C}^3$ мы обсуждаем в статье на примере аналогичного класса СПВ-гиперповерхностей трубчатого типа (точное определение см. ниже). Отметим, что собственным подмножеством этого класса является геометрически интересный (см. [12]) подкласс трубчатых поверхностей над строго выпуклыми аффинно-однородными поверхностями.

Кроме того, имеющиеся примеры однородных поверхностей трубчатого типа (в $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3$) показывают их “опорную” роль в задаче описания всех аффинно-однородных гиперповерхностей комплексных пространств. Так в построенных в [7] семействах

$$\operatorname{Im} w = |z|^A e^{B \arg z}, \quad \operatorname{Im}(z\bar{w}) = |z|^A e^{B \arg z}, \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

однородных многообразий из пространства $\mathbb{C}^2$ поверхностям трубчатого типа соответствует значение параметра $A = 1$.

В пространстве $\mathbb{C}^3$ в результате применения нашей схемы была обнаружена однородная поверхность трубчатого типа

$$\operatorname{Re}(z_1\bar{w}) \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1|^2. \quad (2)$$

На основе этого уравнения легко строится 2-параметрическое семейство аффинно-однородных поверхностей (в том числе не относящихся к поверхностям трубчатого типа)

$$\operatorname{Re}(z_1\bar{w}) \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)^B = |z_1|^{2A}, \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Таким образом, обсуждаемый ниже класс аффинно-однородных гиперповерхностей трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ представляет собой удобную модель для проверки эффективности предлагаемой схемы изучения аффинной однородности. Полное описание класса пока не получено, но этот вопрос планируется закрыть в ближайшие несколько месяцев. Использование этой схемы, как ожидается, ускорит также получение описания всего семейства аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$.

Поясним кратко суть предлагаемой схемы.

Аффинная однородность поверхности $M \subset \mathbb{C}^3$ подразумевает транзитивное действие на ней некоторой подгруппы Ли $G(M)$ группы $\operatorname{Aff}(3, \mathbb{C})$. От такой группы можно перейти к ее алгебре Ли $g(M)$. Эту алгебру можно считать состоящей из квадратных матриц 4-го порядка и имеющей некоторые особенности в строении базисных матриц. Однако при обсуждении произвольных однородных поверхностей мы не имеем, вообще говоря, никакой информации о размерности алгебры $g(M)$ (кроме очевидной оценки снизу $\dim_{\mathbb{R}} g(M) \geq 5$).

Вопрос о возможных размерностях алгебр $g(M)$ можно считать одним из основных в задаче классификации однородных многообразий того или иного класса (см., например, [3]). Для аффинно-однородных поверхностей трубчатого типа этот вопрос решен (на основе коэффицентного подхода А. В. Лободы) в теореме 1 из п. 4 нашей работы. Здесь имеется три возможности для размерности $\dim_{\mathbb{R}} g(M)$: 5, 6 и 7.

В теореме 2 из п. 5 (см. также [13]) описаны все с точностью до аффинной эквивалентности аффинно-однородные поверхности трубчатого типа с “богатыми” (т.е. 6-мерными и 7-мерными) алгебрами $g(M)$. Отметим, что с использованием коэффициентного подхода такое описание получается относительно просто.

Случай 5-мерных матричных алгебр – самая сложная и содержательная часть изучаемой задачи. К этому случаю относятся практически все упоминавшиеся выше трубчатые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ над аффинно-однородными вещественными основаниями. Полное описание случая сводится в нашей схеме к изучению 5-мерных алгебр с базисами специального вида.

Рассмотрение попарных скобок базисных матриц по аналогии с теоремой 2 приводит здесь к большой системе квадратичных уравнений. Эту систему пока не удалось решить во всех случаях. Результатом ее изучения в одном из них является утверждение о том, что любая аффинно-однородная СПВ-трубка в $\mathbb{C}^3$ имеет аффинно-однородное основание (предложение 4 из п. 6). Завершает статью еще один пример семейства аффинно-однородных поверхностей трубчатого типа с 5-мерными алгебрами $g(M)$.

1. Основные понятия и подходы к задаче.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [14; с. 444]. Многообразие M называется *однородным относительно некоторой группы (преобразований) G* , если эта группа транзитивно действует на M , т.е. любую точку из M можно перевести в любую другую точку обсуждаемого многообразия подходящим преобразованием из группы G .

В нашей статье обсуждаются аффинно-однородные поверхности в $\mathbb{C}^3$. Это значит, что в качестве групп G рассматриваются подгруппы аффинной группы $\text{Aff}(3, \mathbb{C})$.

При этом свойство однородности интересует нас в локальном смысле, так что действие соответствующей аффинной подгруппы должно быть транзитивным лишь *вблизи* выделенной точки обсуждаемой поверхности M . Это означает, что фактически мы обсуждаем локальные группы Ли.

Любой из таких групп Ли, связанной с какой-либо однородной поверхностью M , соответствует совокупность (алгебра Ли) инфинитезимальных преобразований. Ее элементами являются аффинные векторные поля в пространстве $\mathbb{C}^3$, касательные к обсуждаемой аффинно-однородной вещественной гиперповерхности M .

Обозначим группу транзитивных аффинных преобразований, действующую на поверхности M , через $G(M)$, а соответствующую ей алгебру – через $g(M)$.

Каждое аффинное векторное поле в $\mathbb{C}^3$ имеет вид

$$Z = (A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 w + p) \frac{\partial}{\partial z_1} + (B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3 w + s) \frac{\partial}{\partial z_2} + (a z_1 + b z_2 + c w + q) \frac{\partial}{\partial w}, \quad (4)$$

где $A_k, B_k, a, b, c, p, s, q$ – комплексные константы.

Используя матричное представление, удобно записывать поле (4) в виде (4×4) -матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & p \\ B_1 & B_2 & B_3 & s \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

При этом алгебра $g(M)$ превращается в матричную алгебру Ли (мы сохраним для нее то же обозначение) с операцией коммутирования матриц

$$[Z_1, Z_2] = Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1.$$

Можно построить описание всех однородных поверхностей на основе описания всех матричных алгебр Ли. Такой подход реализован в работе [15]. Важным начальным звеном нашей схемы является использование канонических уравнений изучаемых вложенных подмногообразий (см. [6], [16]). Получение оценок размерности изучаемых алгебр и последующий выход на итоговые результаты при этом существенно упрощаются.

2. Канонические уравнения поверхностей трубчатого типа. Пусть в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$ задана вещественно-аналитическая гиперповерхность M и выделена некоторая неособая точка ξ на ней. За счет сдвига можно считать эту точку совпадающей с началом координат пространства $\mathbb{C}^3$. Уравнение M можно разрешить в этой точке относительно одной из вещественных переменных и записать его с использованием степенных рядов в форме

$$v = F(z, \bar{z}, u) = \sum_{k,l,m \geq 0} F_{klm}(z, \bar{z}) u^m. \quad (6)$$

Здесь $z = (z_1, z_2)$, w – координаты в пространстве $\mathbb{C}^3$, $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$, F_{klm} – однородный многочлен суммарной степени k по z и l по $\bar{z}$.

Аналогично работе [17] будем считать, что переменные $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$ имеют вес 1, а переменной u припишем вес 2. Веса отдельных мономов, построенных из переменных $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, u$, будем определять по естественному принципу сложения весов. Например, вес монома $z_1 u$ равен 3.

Выделяя в степенном разложении функции $F(z, \bar{z}, u)$ однородные весовые компоненты, перепишем уравнение (6) в виде

$$v = F(z, \bar{z}, u) = F_0 + F_1(z, \bar{z}, u) + F_2(z, \bar{z}, u) + \dots \quad (7)$$

Напомним, что сдвигом осей координат мы уже добились равенства $F_0 = 0$, а поворотом осей в уравнении (7) уничтожаются весовая компонента $F_1(z, \bar{z}, u)$ и линейное по переменной u слагаемое из F_2 .

Тогда первым слагаемым в уравнении (7) является F_2 , содержащее голоморфные слагаемые, квадратичные по переменной $z = (z_1, z_2)$, антиголоморфные выражения, зависящие квадратично от $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ и эрмитову форму $H(z, \bar{z})$.

Если эрмитова форма $H(z, \bar{z})$ положительно-определена, то после аффинного преобразования можно получить (см. [6]) приведенное уравнение поверхности M вида

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + [(\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2) + \overline{(\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2)}] + F_3(z, \bar{z}, u) + \dots \quad (8)$$

При этом пара $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ вещественных неотрицательных чисел является аффинным инвариантом поверхности M .

ПРИМЕР 1. Пусть вещественно-аналитическая поверхность $\Gamma \in \mathbb{R}_{(x_1, x_2, u)}^3$ является строго выпуклой вблизи своей неособой точки Q . Тогда (см., например, [18];

с. 184]) уравнение Γ вблизи этой точки можно привести аффинными преобразованиями пространства $\mathbb{R}^3$ к виду

$$u = (x_1^2 + x_2^2) + \sum_{k+l \geq 3} f_{kl} x_1^k x_2^l. \quad (9)$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^3$ *трубчатую поверхность* (или, короче, *трубку*) над Γ , т.е. поверхность

$$M = \Gamma + i\mathbb{R}_{(y_1, y_2, v)}^3$$

с тем же уравнением (9). Заменяя в (9) u на v и переходя к (удвоенным для удобства) комплексным координатам, можно переписать уравнение такой трубки в виде

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) + \frac{1}{2}(\overline{z_1^2 + z_2^2}) + \frac{1}{2} \sum_{k+l \geq 3} f_{kl}(z_1 + \overline{z_1})^k (z_2 + \overline{z_2})^l. \quad (10)$$

Это означает, что для трубки $M = \Gamma + i\mathbb{R}^3$ над любым строго выпуклым вещественно-аналитическим основанием $\Gamma \in \mathbb{R}^3$ в произвольной точке M оба параметра $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ из уравнения вида (9) равны $1/2$.

Трубчатые поверхности, как известно, играют важную роль в задачах об однородности (см. [2], [16]). Например, при любых n трубки над аффинно-однородными вещественными основаниями из пространства $\mathbb{R}^n$ являются однородными относительно комплексных аффинных (и, следовательно, голоморфных) преобразований пространства $\mathbb{C}^n$. Иногда оказываются справедливыми обратные импликации (см. [19]).

Наша статья связана с обобщением класса однородных трубчатых СПВ-поверхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вещественно-аналитическую СПВ-гиперповерхность M пространства $\mathbb{C}^3$ (с координатами z_1, z_2, w) с выделенной точкой ξ на ней назовем *поверхностью трубчатого типа* в этой точке, если для коэффициентов ее приведенного уравнения (8) выполняется условие

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}.$$

Так как у аффинно-однородной поверхности точечные аффинные инварианты одинаковы во всех точках, определение 2 позволяет говорить без каких-либо двусмысленностей об *аффинно-однородных поверхностях трубчатого типа*.

В уравнении (8) можно получить еще некоторые упрощения, зависящие от значений параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. В первую очередь такие упрощения связаны со следующей весовой компонентой F_3 уравнения (8). Она имеет вид

$$\begin{aligned} F_3 &= F_3(z, \bar{z}, u) = uF_3^{(1)}(z, \bar{z}) + F_3^{(0)}(z, \bar{z}) \\ &= [(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)u + (\text{C.C.})] + [(F_{3\bar{0}} + F_{2\bar{1}}) + (\text{C.C.})], \end{aligned} \quad (11)$$

где (C.C.) – это краткое обозначение комплексного сопряженного (complex conjugate) к выражению, написанному в начале формулы.

Далее о мономе $z_1^k z_2^l \bar{z}_1^m \bar{z}_2^n u^r$ из разложения (11) мы будем говорить, что он имеет *тип* (k, l, m, n, r) . Для коэффициентов перед такими мономами будем использовать (достаточно громоздкие, но не допускающие разных смыслов) пятииндексные обозначения f_{klmnr} . Если несколько последних индексов у такого коэффициента нулевые, считаем возможным отбросить любое количество таких нулей. Например, $f_{02010} = f_{0201}$ будет у нас обозначать коэффициент перед мономом $z_2^2 \bar{z}_2$ в разложении (11). Наиболее важный в наших обсуждениях многочлен $F_3(z, \bar{z}, u)$ содержит голоморфную компоненту $F_{3, \bar{0}}(z)$, которую в соответствии с введенными договоренностями можно записать как

$$F_{3, \bar{0}}(z) = f_{30} z_1^3 + f_{21} z_1^2 z_2 + f_{12} z_1 z_2^2 + f_{03} z_2^3.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2$ за счет линейного преобразования координат можно подчинить коэффициенты уравнения (8) следующим дополнительным ограничениям:

- 1) $\operatorname{Re} \alpha_1 = 0, \operatorname{Re} \alpha_2 = 0$;
- 2) $\operatorname{Re} f_{201} = 0, \operatorname{Re} f_{0201} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим замену координат

$$\begin{cases} z_1 = z_1^* + M_1 w^*, \\ z_2 = z_2^* + M_2 w^*, \\ w = w^* \end{cases}$$

с некоторыми коэффициентами M_1, M_2 . Так мы получим уравнение поверхности

$$\begin{aligned} v^* &= |z_1^* + M_1 w^*|^2 + |z_2^* + M_2 w^*|^2 \\ &+ \frac{1}{2} [(z_1^* + M_1 w^*)^2 + (z_2^* + M_2 w^*)^2] + \frac{1}{2} [\overline{(z_1^* + M_1 w^*)}^2 + \overline{(z_2^* + M_2 w^*)}^2] \\ &+ \{u[\alpha_1(z_1^* + M_1 w^*) + \alpha_2(z_2^* + M_2 w^*)] + (\text{C.C.})\} \\ &+ [(F_{3\bar{0}} + F_{2\bar{1}}) + (\text{C.C.})] + F_4 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Решая это уравнение относительно переменной

$$v^* = F_2^* + F_3^* + F_4^* + \dots,$$

выделим в нем компоненты младших весов. В весах 0 и 1 имеем тривиальные тождества $0 = 0$.

В весе 2 имеем

$$F_2^* = F_2(z, \bar{z}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \left[\frac{1}{2} (z_1^2 + z_2^2) + (\text{C.C.}) \right];$$

в весе 3 имеем

$$F_3^* = F_3 + \Delta F_3, \quad \text{где} \quad \Delta F_3 = \Delta F_{(1,0,1)} + \Delta F_3^{(0)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta F_{(1,0,1)} &= [(\overline{M_1} + M_1) z_1 + (\overline{M_2} + M_2) z_2] u + [(M_1 + \overline{M_1}) \bar{z}_1 + (M_2 + \overline{M_2}) \bar{z}_2] u \\ &= [(\overline{M_1} + M_1) z_1 + (\overline{M_2} + M_2) z_2] u + (\text{C.C.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [2 \operatorname{Re}(M_1)z_1 + 2 \operatorname{Re}(M_2)z_2]u + (\text{C.C.}), \\
\Delta F_3^{(0)} &= z_1(\overline{iM_1})F_2 + \overline{z_1}(iM_1)F_2 + z_2(\overline{iM_2})F_2 + \overline{z_2}(iM_2)F_2 \\
&\quad + (iM_1)z_1F_2 + (iM_2)z_2F_2 + (\overline{iM_1})\overline{z_1}F_2 + (\overline{iM_2})\overline{z_2}F_2 \\
&= \{[(\overline{iM_1}) + (iM_1)]z_1 + [(\overline{iM_2}) + (iM_2)]z_2\}F_2 + (\text{C.C.}) \\
&= [-2 \operatorname{Im}(M_1)z_1 - 2 \operatorname{Im}(M_2)z_2]F_2 + (\text{C.C.}).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1^* = 2 \operatorname{Re} M_1 + \alpha_1, \\ \alpha_2^* = 2 \operatorname{Re} M_2 + \alpha_2, \end{cases} \quad \begin{cases} f_{201}^* = f_{201} - 2 \operatorname{Im}(M_1), \\ f_{0201}^* = f_{0201} - 2 \operatorname{Im}(M_2). \end{cases}$$

Эти равенства означают, что, подбирая M_1 , M_2 , можно добиться выполнения условий 1) и 2) предложения 1.

Учитывая сказанное, будем далее записывать уравнение вещественно-аналитической СПВ гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^3$, имеющей трубчатый тип (в некоторой выделенной точке), в виде

$$\begin{aligned}
v &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) + (\text{C.C.}) \\
&\quad + i\alpha_1(z_1 - \overline{z_1})u + i\alpha_2(z_2 - \overline{z_2})u + F_3^{(0)}(z, \overline{z}) + \sum_{k \geq 4} F_k(z, \overline{z}, u) + \dots, \quad (13)
\end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, if_{201}, if_{0201} \in \mathbb{R}$.

Вид (13) будем называть *каноническим* видом уравнения поверхности, имеющей трубчатый тип (в выделенной точке).

В соответствии с определением 2 всякая трубка (с выпуклым основанием) в $\mathbb{C}^3$ имеет трубчатый тип в любой своей точке. При этом для комплексной аффинной однородности такой трубки является достаточной (вещественная) аффинная однородность ее основания.

Для нас наиболее важны в дальнейшем два следующих примера трубок в $\mathbb{C}^3$ с аффинно-однородными основаниями (полный список аффинно-однородных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ см. в [15]).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим

$$M = \{x_1^2 + x_2^2 \pm v^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^3, \quad x_1 = \operatorname{Re} z_1, \quad x_2 = \operatorname{Re} z_2, \quad v = \operatorname{Im} w \quad (14)$$

– трубки над сферой (знак “плюс” в формуле) и гиперboloидом (знак “минус”).

ПРИМЕР 3. Рассмотрим

$$M = \left\{ v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \overline{z_1}^2 + \overline{z_2}^2) \right\} = \{v = 2(x_1^2 + x_2^2)\} \quad (15)$$

– трубка над параболоидом.

3. Основное соотношение для аффинных векторных полей. Для каждого аффинного векторного поля, касательного к некоторой вещественной поверхности M пространства $\mathbb{C}^3$, факт касания можно записать в виде тождества

$$\operatorname{Re}\{Z(\Phi)\}|_M \equiv 0, \quad (16)$$

где $\Phi = -\operatorname{Im} w + F$ – определяющая функция поверхности.

Для аффинно-однородной вещественно-аналитической гиперповерхности из этого тождества можно получить большой объем информации. Эта информация относится и к векторным полям, и к коэффициентам канонического уравнения обсуждаемой аффинно-однородной поверхности.

Для этого представим тождество (16), которое будем называть далее *основным соотношением*, в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{[A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3(u + iF) + p] \frac{\partial F}{\partial z_1} + [B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3(u + iF) + s] \frac{\partial F}{\partial z_2} \right. \\ \left. + [az_1 + bz_2 + c(u + iF) + q] \frac{1}{2} \left(i + \frac{\partial F}{\partial u} \right) \right\} \equiv 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Левая часть тождества (17) есть некоторая аналитическая функция $H(z, \bar{z}, u)$ от переменных $z, \bar{z}, u$. Учитывая канонический вид исходного уравнения поверхности, разложим эту функцию в весовое разложение

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{[p + A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3(u + iF_3) + A_3(iF_3 + iF_4 + \dots)] \left[\frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \frac{\partial F_3}{\partial z_1} + \dots \right] \right. \\ + [s + B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3(u + iF_3) + B_3(iF_3 + iF_4 + \dots)] \left[\frac{\partial F_2}{\partial z_2} + \frac{\partial F_3}{\partial z_2} + \dots \right] \\ \left. + [az_1 + bz_2 + c(u + iF_3) + q + ic(F_3 + F_4 + \dots)] \frac{1}{2} \left[i + \frac{\partial F_3}{\partial u} + \frac{\partial F_4}{\partial u} + \dots \right] \right\} \equiv 0 \end{aligned} \quad (18)$$

и рассмотрим компоненты весов 0, 1, 2, 3 основного тождества (18).

Соответствующие уравнения имеют следующий вид:

- вес 0:

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{i}{2} q \right\} = 0; \quad (19)$$

- вес 1:

$$\operatorname{Re}\left\{ p \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + s \frac{\partial F_2}{\partial z_2} + \frac{1}{2} i(az_1 + bz_2) + \frac{1}{2} q[i(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)] \right\} \equiv 0; \quad (20)$$

- вес 2:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{ p \frac{\partial F_3}{\partial z_1} + (A_1 z_1 + A_2 z_2) \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + s \frac{\partial F_3}{\partial z_2} + (B_1 z_1 + B_2 z_2) \frac{\partial F_2}{\partial z_1} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (az_1 + bz_2) \frac{\partial F_3}{\partial u} + \frac{1}{2} ic(u + iF_2) + \frac{1}{2} q \frac{\partial F_4}{\partial u} \right\} \equiv 0; \end{aligned} \quad (21)$$

• вес 3:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ p \frac{\partial F_4}{\partial z_1} + (A_1 z_1 + A_2 z_2) \frac{\partial F_3}{\partial z_1} + A_3 (u + i F_2) \frac{\partial F_2}{\partial z_1} \right. \\ \left. + s \frac{\partial F_4}{\partial z_2} + (B_1 z_1 + B_2 z_2) \frac{\partial F_3}{\partial z_2} + B_3 (u + i F_2) \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} c (u + i F_2) \frac{\partial F_3}{\partial u} + \frac{1}{2} (a z_1 + b z_2) \frac{\partial F_4}{\partial u} + \frac{1}{2} q \frac{\partial F_5}{\partial u} + i c F_3 \frac{i}{2} \right\} \equiv 0. \quad (22) \end{aligned}$$

4. Оценка размерности алгебры $g(M)$ для однородных поверхностей трубчатого типа. Для однородной поверхности ее инфинитезимальные преобразования (или векторные поля) позволяют смещаться вдоль поверхности в любом касательном направлении к поверхности. Это означает, что параметры поля $p, s \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{R}$, задающие такое смещение в точке $O(0, 0, 0)$, должны быть свободными (см., например, [6], [20]).

Так получается очевидная нижняя оценка на размерность алгебры $g(M)$ или группы $G(M)$ для аффинно-однородной гиперповерхности:

$$5 \leq \dim_{\mathbb{R}} g(M).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На аффинно-однородной поверхности могут транзитивно действовать несколько разных (в том числе и по размерности) подгрупп аффинной группы. Говоря об алгебре Ли $g(M)$ и группе Ли $G(M)$ для конкретной поверхности, мы имеем в виду, что это максимально возможная (по размерности) алгебра и соответствующая ей группа. Максимальная размерность такой алгебры (и соответствующей группы) равна числу всех параметров, входящих в представление (5) и остающихся свободными.

Для аффинно-однородных поверхностей трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Если M – аффинно-однородная поверхность трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$, то

$$5 \leq \dim_{\mathbb{R}} g(M) \leq 7.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы нужно выяснить, какие из элементов A_k, B_k, a, b, c матриц вида (5) не выражаются через сдвиговые параметры p, s, q и, тем самым, повышают возможную размерность алгебры $g(M)$. Для выяснения этого вопроса рассмотрим более подробно три выписанные компоненты младших весов основного тождества.

Как уже отмечалось, из компоненты веса 0 (формула (19)) следует, что параметр q является вещественным: $q \in \mathbb{R}$.

Вес 1. Напомним, что

$$F_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) + \frac{1}{2}(\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2),$$

так что производные

$$\frac{\partial F_2}{\partial z_1} = z_1 + \bar{z}_1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z_2} = z_2 + \bar{z}_2$$

имеют вес 1. Отметим еще, что уравнения, связанные с переменной z_1 и переменной z_2 , можно рассматривать по отдельности. Тогда тождество веса 1 можно разбить на два уравнения, отвечающие типам $(1, 0, 0, 0)$ и $(0, 1, 0, 0)$ соответственно.

$$(1, 0, 0, 0) : \quad \operatorname{Re} \left\{ p(z_1 + \overline{z_1}) + \frac{i}{2} a z_1 + \frac{i}{2} q \alpha_1 z_1 \right\} = 0;$$

$$(0, 1, 0, 0) : \quad \operatorname{Re} \left\{ s(z_2 + \overline{z_2}) + \frac{i}{2} b z_2 + \frac{i}{2} q \alpha_2 z_2 \right\} = 0.$$

Пользуясь тем, что вещественные части комплексного числа и сопряженного к нему выражения одинаковы ($\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} \overline{A}$), можно переписать два последних уравнения в следующем виде:

$$a = 2i(2p_1 + qi\alpha_1), \quad p_1 = \operatorname{Re} p; \quad (23)$$

$$b = 2i(2s_1 + qi\alpha_2), \quad s_1 = \operatorname{Re} s. \quad (24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для краткости будем в такой ситуации записывать и сокращенный вариант полученных формул:

$$a = \varphi(p, s, q), \quad b = \varphi(p, s, q),$$

имея в виду, что интересующие нас величины в левых частях выражаются некоторыми (линейными) формулами через параметры, указанные в правых частях соответствующих формул.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В дальнейшем, как и при обсуждении веса 1, мы будем выделять вещественные и мнимые части различных (в том числе, пронумерованных) параметров и коэффициентов. При этом (по аналогии с $p_1 = \operatorname{Re} p$, $s_1 = \operatorname{Re} s$) вещественную часть обозначенного буквой комплексного числа будем фиксировать (дополнительным) индексом 1, а мнимую часть – индексом 2.

Вес 2. Здесь имеется семь разных типов мономов:

$$z_1^2, \quad z_1 z_2, \quad z_2^2, \quad |z_1|^2, \quad |z_2|^2, \quad z_1 \overline{z_2}, \quad u,$$

а в уравнении (21) имеется пять разных по форме слагаемых.

В типе $(0, 0, 0, 0, 1)$ имеем

$$\operatorname{Re} \left\{ \left(i\alpha_1 p + i\alpha_2 s + \frac{1}{2} ic + f_{00002} q \right) u \right\} = 0.$$

Отсюда

$$c_2 = \operatorname{Im} c = (i\alpha_1 p - i\alpha_1 \overline{p} + i\alpha_2 s - i\alpha_2 \overline{s} + 2f_{00002} q). \quad (25)$$

В типе $(2, 0, 0, 0, 0)$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ (3f_{30} p + f_{21} s) z_1^2 + (f_{102} p + f_{012} s) \overline{z_1}^2 + A_1 z_1^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} q (f_{20001} z_1^2 + f_{00201} \overline{z_1}^2) + \frac{1}{2} a i \alpha_1 z_1^2 - \frac{c}{2} \left(\frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \overline{z_1}^2 \right) \right\} = 0, \end{aligned}$$

отсюда

$$\operatorname{Re}\left\{\left(3f_{30}p + f_{201}\bar{p} + f_{21}s + f_{2001}\bar{s} + qf_{20001} + A_1 + \frac{1}{2}ai\alpha_1 - \frac{c}{4} - \frac{\bar{c}}{4}\right)z_1^2\right\} = 0.$$

Подставляя сюда выражения a , c_2 из формул (23) и (25), получаем

$$\begin{aligned} A_1 = & (-3f_{30} + \alpha_1)p + (-f_{201} + \alpha_1)\bar{p} \\ & + (-f_{21})s + (-f_{2001})\bar{s} + (-f_{20001} + i\alpha_1^2)q + \frac{1}{2}c_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично в типе $(0, 2, 0, 0, 0)$ имеем

$$\begin{aligned} B_2 = & (-f_{12})p + (-f_{021})\bar{p} + (-3f_{03} + \alpha_2)s \\ & + (-f_{0201} + \alpha_2)\bar{s} + (-f_{02001} + i\alpha_2^2)q + \frac{1}{2}c_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассматривая два уравнения типа $(1, 1, 0, 0, 0)$ и $(1, 0, 0, 1, 0)$, имеем

$$\begin{aligned} A_2 + B_1 = & (-2f_{21} + 2\alpha_2)p + (-f_{111})\bar{p} \\ & + (-2f_{12} + 2\alpha_1)s + (-f_{1101})\bar{s} + (-f_{11001} + 2i\alpha_1\alpha_2)q, \\ \overline{A_2} + B_1 = & (-2f_{2001} - 2\alpha_2)p + (-f_{1011})\bar{p} \\ & + (-f_{1101})s + (-2f_{1002} - 2\alpha_1)\bar{s} + (-f_{10011})q. \end{aligned}$$

Из двух этих уравнений получаем

$$A_{22} = \varphi(p, s, q), \quad B_{12} = \varphi(p, s, q), \quad B_{11} = -A_{21} + \varphi(p, s, q),$$

так что

$$A_2 = A_{21} + \varphi(p, s, q), \quad B_1 = -A_{21} + \varphi(p, s, q), \quad (28)$$

где, как и раньше, вещественная часть комплексного числа фиксируется дополнительным индексом 1, а мнимая часть – индексом 2.

Вес 3. Здесь имеется 12 разных типов мономов:

$$z_1^3, \quad z_1^2 z_2, \quad z_1 z_2^2, \quad z_2^3, \quad z_1^2 \bar{z}_1, \quad z_1 z_2 \bar{z}_1, \quad z_2^2 \bar{z}_1, \quad z_1^2 \bar{z}_2, \quad z_1 z_2 \bar{z}_2, \quad z_2^2 \bar{z}_2, \quad z_1 u, \quad z_2 u,$$

и в уравнении (22) имеется 7 разных по форме слагаемых. Мы рассмотрим только некоторые типы.

В типе $(3, 0, 0, 0, 0)$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{ & (4f_{40}p + f_{31}s)z_1^3 + (f_{103}p + f_{013}s)\bar{z}_1^3 + z_1^3(3f_{30}A_1 + f_{21}B_1) \right. \\ & + \frac{1}{2}q(f_{30001}z_1^3 + f_{00301}\bar{z}_1^3) + \frac{1}{2}af_{20001}z_1^3 + \frac{i}{2}A_3(z_1^3 + \bar{z}_1^3) \\ & \left. + \frac{ic}{4}(i\alpha_1 z_1^3 - ia\bar{z}_1^3) - \frac{c}{2}(f_{30}z_1^3 + f_{003}\bar{z}_1^3) \right\} = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} A_{32} = & 4f_{40}p + f_{301}\bar{p} + f_{31}s + f_{3001}\bar{s} + f_{30001}q \\ & - \frac{1}{2}i\alpha_1 c_2 + 3f_{30}A_1 + f_{21}B_1 + \frac{1}{2}af_{20001} - f_{30}c_1. \end{aligned}$$

Поставляя сюда выражения a , c_2 , A_1 , B_1 из формул (23), (25), (26), (28), получаем

$$A_{32} = \frac{1}{4}(f_{30} + f_{003})c_1 - \frac{1}{2}(f_{21} + f_{0021})A_{21} + \varphi(p, s, q).$$

Аналогично, в типе $(0, 3, 0, 0, 0)$ имеем

$$B_{32} = \frac{1}{4}(f_{03} + f_{0003})c_1 + \frac{1}{2}(f_{12} + f_{0012})A_{21} + \varphi(p, s, q).$$

В типе $(1, 0, 0, 0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ (2f_{20001}p + f_{11001}s)z_1u + (f_{10101}p + f_{01101}s)\overline{z_1}u + u(i\alpha_1A_1z_1 + i\alpha_2B_1z_1) \right. \\ \left. + qu(f_{10002}z_1 + \overline{f_{10002}z_1}) + af_{00002}z_1u + uA_3(z_1 + \overline{z_1}) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Поставляя сюда выражения a , A_1 , B_1 из формул (23), (26), (28), получаем

$$A_{31} + \frac{1}{4}i\alpha_1c_1 - \frac{1}{2}i\alpha_2A_{21} = \varphi(p, s, q),$$

или

$$A_{31} = \operatorname{Re} \varphi_{10001}(p, s, q) = \varphi(p, s, q).$$

Аналогично, в типе $(0, 1, 0, 0, 1)$ имеем

$$B_{31} + \frac{1}{4}i\alpha_2c_1 + \frac{1}{2}i\alpha_1A_{21} = \varphi(p, s, q),$$

или

$$B_{31} = \operatorname{Re} \varphi_{01001}(p, s, q) = \varphi(p, s, q).$$

Из приведенных формул видно, что все параметры векторного поля, касательного к поверхности (13), выражаются некоторым образом через семь вещественных параметров этого поля, а именно через p , s , q , c_1 , A_{21} .

Но так как на однородной поверхности выполняется условие $\dim_{\mathbb{R}} g(M) \geq 5$, то теорема 1 доказана.

В силу этой теоремы для размерности алгебры $g(M)$ в случае аффинно-однородной поверхности трубчатого типа M в $\mathbb{C}^3$ имеется лишь три возможности: 5, 6 и 7.

Два последних случая “богатых” алгебр изучаются достаточно просто; основные же трудности связаны со случаем однородных поверхностей с 5-мерными алгебрами.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что из $(1, 0, 1, 0, 0)$ - и $(0, 1, 0, 1, 0)$ -уравнений выводятся следующие ограничения на коэффициенты канонических уравнений:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 - 3f_{30} + 2f_{201} - \overline{f_{201}} = 0, \\ f_{111} - \overline{f_{2001}} - f_{21} = 0, \\ f_{10101} - \overline{f_{20001}} - f_{20001} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f_{1101} - \overline{f_{021}} - f_{12} = 0, \\ -3f_{03} + 4\alpha_2 - \overline{f_{0201}} + 2f_{0201} = 0, \\ -f_{02001} - \overline{f_{02001}} + f_{01011} = 0. \end{cases}$$

Такие ограничения часто бывают полезными при рассмотрении матричных скобок в изучаемых матричных алгебрах.

5. Однородные поверхности с “богатыми” алгебрами. В этом пункте мы опишем все аффинно-однородные поверхности трубчатого типа с 7-мерными и 6-мерными алгебрами $g(M)$. Но сначала зафиксируем некоторые необходимые условия на коэффициенты канонического уравнения веса 3 для однородной поверхности с “богатой” алгеброй.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если для аффинно-однородной поверхности M трубчатого типа выполняется ограничение $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, то

$$\dim_{\mathbb{R}} g(M) = 5.$$

Действительно, рассмотрим мнимые части коэффициентов при $z_1 u$, $z_2 u$ в выписанных компонентах веса 3 основного тождества при $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$. Имеем

$$\frac{1}{4} \alpha_1 c_1 - \frac{1}{2} \alpha_2 A_{21} = \operatorname{Im} \varphi_{10001}(p, s, q), \quad \frac{1}{4} \alpha_2 c_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 A_{21} = \operatorname{Im} \varphi_{01001}(p, s, q).$$

Определитель этой системы уравнений относительно c_1 , A_{21} равен $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/8$. Решая эту систему при ограничении $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, можно получить выражения параметров $c_1 = \operatorname{Re} c$, $A_{21} = \operatorname{Re} A_2$ через p , s , q .

Это означает, что при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2$ и $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ все параметры поля (5), касательного к однородной поверхности, выражаются только через p , s , q .

Можно доказать (однако, доказательство является достаточно объемным, а потому здесь не приводится) следующее утверждение, аналогичное предложению 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если для аффинно-однородной поверхности M трубчатого типа выполняется ограничение $F_3^{(0)} \neq 0$, то

$$\dim_{\mathbb{R}} g(M) = 5.$$

СЛЕДСТВИЕ. В каноническом уравнении аффинно-однородной поверхности M с “богатой” алгеброй $g(M)$ многочлен F_3 обязан равняться нулю.

Пусть теперь некоторая аффинно-однородная поверхность M имеет “богатую” алгебру $g(M)$. Тогда для нее справедливо только что полученное следствие, в силу чего выписанная выше система из двенадцати уравнений примет упрощенный вид:

- вес 1:

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, 0, 0) : & \quad a = 2i(p + \bar{p}), \\ (0, 1, 0, 0, 0) : & \quad b = 2i(s + \bar{s}); \end{aligned}$$

- вес 2:

$$\begin{aligned} (0, 0, 0, 0, 1) : & \quad c_2 = \operatorname{Im} c = 2f_{00002}q, \\ (2, 0, 0, 0, 0) : & \quad A_1 = -f_{20001}q + \frac{1}{2}c_1, \\ (0, 2, 0, 0, 0) : & \quad B_2 = -f_{02001}q + \frac{1}{2}c_1, \\ (1, 1, 0, 0, 0) : & \quad A_2 + B_1 = -f_{11001}q, \\ (1, 0, 0, 1, 0) : & \quad \overline{A_2} + B_1 = -f_{10011}q, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} A_2 &= A_{21} + \frac{q}{4}(f_{10011} - \overline{f_{10011}} - f_{11001} + \overline{f_{11001}}), \\ B_1 &= -A_{21} + \frac{q}{4}(\overline{f_{10011}} - f_{10011} - f_{11001} + \overline{f_{11001}}); \end{aligned} \quad (29)$$

• вес 3:

$$\begin{aligned} (3, 0, 0, 0, 0) : \quad & A_{32} = 4f_{40}p + f_{301}\bar{p} + f_{31}s + f_{3001}\bar{s} + f_{30001}q + \frac{1}{2}af_{20001}, \\ (0, 3, 0, 0, 0) : \quad & B_{32} = f_{13}p + f_{031}\bar{p} + 4f_{04}s + f_{0301}\bar{s} + f_{03001}q + \frac{1}{2}af_{02001}, \\ (1, 0, 0, 0, 1) : \quad & 2f_{20001}p + f_{10101}\bar{p} + f_{11001}s + f_{10011}\bar{s} + 2\beta_1q + f_{00002}a + 2A_{31} = 0, \\ (0, 1, 0, 0, 1) : \quad & f_{11001}p + f_{01101}\bar{p} + 2f_{02001}s + f_{01011}\bar{s} + 2\beta_2q + f_{00002}b + 2B_{31} = 0. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Если аффинно-однородная вещественная гиперповерхность трубчатого типа в пространстве $\mathbb{C}^3$ имеет 7-мерную алгебру $g(M)$, то эта поверхность аффинно-эквивалентна трубке над параболоидом из примера 3.

Если аффинно-однородная поверхность трубчатого типа в пространстве $\mathbb{C}^3$ допускает транзитивное действие 6-мерной группы аффинных преобразований, то она аффинно-эквивалентна либо трубке над параболоидом из примера 3, либо одной из поверхностей примера 2 (т.е. трубке над сферой или гиперболоидом).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы мы обсудим для случая 7-мерной алгебры $g(M)$; случай транзитивного действия на M 6-мерной аффинной группы (и соответствующей 6-мерной алгебры) рассматривается аналогично. Мы рассмотрим базисные матрицы $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$ гипотетической алгебры $g(M)$, соответствующей нашей однородной поверхности.

При этом пять первых матриц базиса считаем связанными со “стандартными” наборами векторов (p, s, q) , т.е. $(1, 0, 0)$, $(i, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, i, 0)$, $(0, 0, 1)$. В силу такой договоренности и системы (29) эти матрицы можно считать имеющими вид

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & 1 \\ N_1 & N_2 & N_3 & 0 \\ 4i & 0 & c^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_2 &= \begin{pmatrix} M_4 & M_5 & M_6 & i \\ N_4 & N_5 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & c^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_3 &= \begin{pmatrix} M_7 & M_8 & M_9 & 0 \\ N_7 & N_8 & N_9 & 1 \\ 0 & 4i & c^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_4 &= \begin{pmatrix} M_{10} & M_{11} & M_{12} & 0 \\ N_{10} & N_{11} & N_{12} & i \\ 0 & 0 & c^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_5 &= \begin{pmatrix} M_{13} & M_{14} & M_{15} & 0 \\ N_{13} & N_{14} & N_{15} & 0 \\ 0 & 0 & c^{(5)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_6 &= \begin{pmatrix} M_{16} & M_{17} & M_{18} & p_6 \\ N_{16} & N_{17} & N_{18} & s_6 \\ a^{(6)} & b^{(6)} & c^{(6)} & q_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_7 &= \begin{pmatrix} M_{19} & M_{20} & M_{21} & p_7 \\ N_{19} & N_{20} & N_{21} & s_7 \\ a^{(7)} & b^{(7)} & c^{(7)} & q_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

с некоторыми комплексными коэффициентами.

Здесь последние столбцы матриц E_6 и E_7 можно считать равными нулю за счет рассмотрения вместо исходных матриц их линейных комбинаций типа

$$E_6^* = E_6 - (p_{16}E_1 + p_{62}E_2 + s_{61}E_3 + s_{62}E_4 + q_6E_5),$$

где $p_k = p_{k1} + ip_{k2}$, $s_k = s_{k1} + is_{k2}$, $k = 6, 7$.

Используя еще пару (c_1, A_{21}) , принимающую значения $(1, 0)$, $(0, 2)$, из упрощенного вида системы (16) уравнений получим матрицы E_6 , E_7 следующего вида:

$$E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & M_{18} & 0 \\ 0 & 1 & N_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & M_{21} & 0 \\ -1 & 0 & N_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, используя предварительные сведения о базисных матрицах изучаемой алгебры, можно уточнять полученную информацию. Воспользуемся для этого требованием замкнутости линейной оболочки $\langle E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7 \rangle$ относительно матричной скобки. Сначала заметим, что скобка

$$[E_6, E_7] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -M_{21} - N_{18} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{21} + M_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

должна разлагаться по базису $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$ и, значит, $[E_6, E_7] = 0$. Отсюда следует, что $M_{21} = -N_{18}$, $N_{21} = M_{18}$.

Скобки $[E_5, E_6]$, $[E_5, E_7]$ также должны разлагаться по базису $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$. Отсюда следует, что $M_{18} = N_{18} = 0$, т.е. E_6, E_7 имеют следующий вид:

$$E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, продолжая процесс разложения скобок $[E_k, E_l]$ по базису $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$ (объем таких вычислений достаточно велик, и потому все необходимые выкладки мы здесь не приводим), получим простой по форме базис 7-мерной матричной алгебры

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (30) \\ E_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы 2 надо проинтегрировать эту 7-мерную алгебру. Процедура интегрирования может быть выполнена, например, по следующей схеме (описанной в [6]):

- 1) сначала строится вещественная система уравнений в частных производных, все уравнения которой являются расшифровками основного соотношения для базисных полей интегрируемой алгебры;
- 2) затем уравнения этой системы поочередно интегрируются с уменьшением на каждом шаге числа уравнений и числа независимых (возможно, измененных) переменных в системе;
- 3) на последнем шаге от системы уравнений в частных производных остается одно обыкновенное дифференциальное уравнение. Его общее решение зависит, как известно, от одного вещественного параметра. Начальное условие, связанное с интегрированием системы уравнений вблизи начала координат, определяет этот параметр, и в итоге мы получим квадрику (15).

Обсудим кратко случай 6-мерной матричной алгебры g , элементы которой удовлетворяют описанным выше ограничениям. Здесь за счет аналогичного рассмотрения скобок базисных матриц получаются две возможности: либо g является подалгеброй 7-мерной алгебры (30), либо имеет базис следующего вида:

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & it & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & it & 1 \\ 0 & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

При интегрировании таких 6-мерных алгебр получим трубку над сферой (при $t > 0$) или над гиперboloидом (при $t < 0$).

6. Однородные поверхности с 5-мерными алгебрами. С учетом сказанного выше здесь можно рассматривать алгебры Ли с базисами следующего вида:

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} A1_1 & A2_1 & A3_1 & 1 \\ B1_1 & B2_1 & B3_1 & 0 \\ 4i & 0 & 2m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_2 &= \begin{pmatrix} A1_2 & A2_2 & A3_2 & i \\ B1_2 & B2_2 & B3_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_3 &= \begin{pmatrix} A1_3 & A2_3 & A3_3 & 0 \\ B1_3 & B2_3 & B3_3 & 1 \\ 0 & 4i & 2m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_4 &= \begin{pmatrix} A1_4 & A2_4 & A3_4 & 0 \\ B1_4 & B2_4 & B3_4 & i \\ 0 & 0 & 2m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (31) \\ E_5 &= \begin{pmatrix} A1_5 & A2_5 & A3_5 & 0 \\ B1_5 & B2_5 & B3_5 & 0 \\ 0 & 0 & 2(m_5 + i\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь $m_1, \dots, m_5, \lambda$ – некоторые вещественные числа, а элементы $A1_k, A2_k, A3_k, B1_k, B2_k, B3_k, k = 1, \dots, 5$, базисных матриц, вообще говоря, комплексные числа. Информация, полученная нами об этих 30 элементах, позволяет выразить их через небольшое количество параметров. Однако даже с учетом таких упрощений рассмотрение скобок базисных матриц приводит здесь к большой системе квадратичных уравнений.

Решение такой системы распадается на несколько подслучаев; в настоящее время завершается их компьютерное изучение с помощью пакета Maple. Таким образом уже получено несколько различных аффинно-однородных поверхностей трубчатого типа, например, поверхность (2) из введения.

Мы обсудим здесь один простой частный случай алгебр (31), представляющий, тем не менее, интерес в связи с общими вопросами об однородности. Описание всего набора подслучаев выходит за пределы настоящей статьи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Всякая аффинно-однородная СПВ-трубка в $\mathbb{C}^3$ аффинно-эквивалентна трубке с аффинно-однородным основанием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточно провести в предположении 5-мерной алгебры $g(M)$, отвечающей аффинно-однородной СПВ-трубке M . Сама такая трубка может быть задана уравнением вида (10), т.е.

$$v = F(x_1, x_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) + \frac{1}{2}(\overline{z_1^2 + z_2^2}) + \sum_{k+l \geq 3} f_{kl}(z_1 + \overline{z_1})^k (z_2 + \overline{z_2})^l.$$

Поэтому сдвиги по координатам y_1, y_2, u сохраняют поверхность M . Это означает, что матрицы E_2, E_4, E_5 из базиса (31) для обсуждаемой трубки имеют тривиальный вид:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Рассмотрение в такой ситуации скобок $[E_1, E_2], [E_1, E_4]$, а также $[E_3, E_2], [E_3, E_4]$ легко приводит к выводу о вещественности восьми элементов $A1_1, A2_1, B1_1, B2_1$ и $A1_3, A2_3, B1_3, B3_3$ базисных матриц E_1, E_2 . Из структуры матричных скобок $[E_1, E_5], [E_3, E_5]$ следует, что элементы третьих столбцов $A3_1, B3_1, A3_3, B3_3$, наоборот, являются чисто мнимыми.

При этом четвертый столбец скобки $[E_1, E_5]$, т.е.

$$\begin{pmatrix} A2_1 - A1_3 \\ B2_1 - B1_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

является чисто вещественным. Это означает, что в разложении скобки $[E_1, E_5]$ по базису обсуждаемой алгебры участвуют лишь матрицы E_1, E_3 . Значит, эти матрицы образуют подалгебру h алгебры $g(M)$.

Наконец, заметим, что замена $w \rightarrow iw$ превращает E_1, E_3 в вещественные матрицы

$$E_1^* = \begin{pmatrix} A1_1 & A2_1 & iA3_1 & 1 \\ B1_1 & B2_1 & iB3_1 & 0 \\ 4 & 0 & 2m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3^* = \begin{pmatrix} A1_3 & A2_3 & iA3_3 & 0 \\ B1_3 & B2_3 & iB3_3 & 1 \\ 0 & 4 & 2m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и переводит поверхность M в трубку с основанием $u = F(x_1, x_2)$.

Это основание аффинно-однородно в $\mathbb{R}^3$, так как на нем транзитивно действует группа аффинных преобразований, отвечающая алгебре h .

Предложение 4 доказано.

В заключение мы приведем еще один пример, связанный с вопросом о существовании аффинно-однородных СПВ-гиперповерхностей трубчатого типа, не сводимых аффинными преобразованиями к трубкам (и имеющих 5-мерные алгебры $g(M)$).

Пример такого семейства однородных поверхностей трубчатого типа в нашем случае можно построить на основе формулы (1) и аналогии с 2-мерным комплексным пространством.

ПРИМЕР 4. Все поверхности из семейства

$$v = |z_1|e^{B \arg z_1} + x_2^2, \quad (33)$$

где $B \in \mathbb{R}$, являются аффинно-однородными СПВ-гиперповерхностями трубчатого типа, не сводимыми к трубкам аффинными преобразованиями.

Для доказательства аффинной однородности построенных поверхностей достаточно указать семейство аффинных преобразований, действующих транзитивно на этих поверхностях.

Рассмотрим поверхность M вида (33) с произвольным вещественным B и точку $Q(z_0, w_0)$, $z_0 \neq 0$, $w_0 \neq 0$, лежащую на этой поверхности.

При $B \neq 0$ вблизи этой точки на поверхности M действуют аффинные преобразования:

$$\varphi_1 = \{z_1^* = e^{(2i\lambda)/B} z_1, z_2^* = e^\lambda z_2, w^* = e^{2\lambda} w, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

– поворот в плоскости z_1 с одновременным растяжением по остальным переменным;

$$\varphi_2 = \{z_1^* = \mu^2 z_1, z_2^* = \mu z_2, w^* = \mu^2 w, \mu \in \mathbb{R}\}$$

– одновременное растяжение по всем переменным;

$$\varphi_3 = \{z_1^* = z_1, z_2^* = z_2 + t, w^* = w + t^2 + i2tz_2, t \in \mathbb{R}\}$$

– сдвиг по переменной x_2 ;

$$\varphi_4 = \{z_1^* = z_1, z_2^* = z_2 + is, w^* = w, s \in \mathbb{R}\}$$

– сдвиг по переменной y_2 ;

$$\varphi_5 = \{z_1^* = z_1, z_2^* = z_2, w^* = w + r, r \in \mathbb{R}\}$$

– сдвиг по переменной u .

Каждое из этих преобразований сохраняет поверхность M . Несложно убедиться, что касательные преобразования к $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ образуют в точке $Q(z_0, w_0)$ 5-мерное вещественное пространство. Это означает, что порождаемая преобразованиями $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ 5-мерная группа Ли действует на M транзитивно.

Можно привести уравнение (33) к каноническому виду. Вычисления (проведенные с помощью пакета Maple) дают следующие значения коэффициентов F_2 и многочлена F_3 :

а) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2$, т.е. это аффинно-однородная поверхность трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$;

б) $F_3 = x_1^2(\alpha x_1 + \beta y_1)$, $\beta = \sqrt{2/(1+B^2)}$.

Полученный многочлен F_3 зависит от y_1 .

Заметим, что из всех линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$ канонический вид уравнения и условия $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ сохраняются лишь при растяжениях координат $z \rightarrow tz$, $w \rightarrow t^2 w$ и “поворотах” $(z_1, z_2) \rightarrow (z_1 \cos \varphi + z_2 \sin \varphi, -z_1 \sin \varphi + z_2 \cos \varphi)$. Это значит, что поверхности (33) не сводятся аффинными преобразованиями к трубкам, для которых F_2 можно считать (см. [17]) равным $2(x_1^2 + x_2^2)$, а F_3 не зависит от y_1, y_2 .

При $B = 0$ поверхность M сохраняют аффинные преобразования $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$, аналогично рассмотренному выше случаю, и поворот φ_1 в плоскости z_1 :

$$\varphi_1 = \{z_1^* = e^{i\theta} z_1, z_2^* = z_2, w^* = w, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Все поверхности из семейства (33) (локально) голоморфно эквивалентны сфере пространства $\mathbb{C}^3$. В самом деле, преобразованием

$$\varphi = \begin{cases} z_1^* = (1 - iB) \ln z_1, \\ z_2^* = z_2, \\ w^* = w \end{cases}$$

любое из уравнений (33) превращается в $v = e^{x_1} + x_2^2$. Последнее уравнение представляет собой, как известно, сферическую трубчатую поверхность (см. [21], [22]). К построению примера (33) привело именно использование этого факта и аналогии со сферическими поверхностями в $\mathbb{C}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Упомянутая уже аффинно-однородная поверхность (2), т.е. $\operatorname{Re}(z_1 \bar{w}) \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1|^2$ имеет трубчатый тип в $\mathbb{C}^3$ и является несферической. Несложно проверить, что она голоморфно (но не аффинно!) эквивалентна несферической трубке

$$v = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. В. Лободе за постановку задачи и полезные обсуждения, а также рецензенту, чьи замечания способствовали существенному улучшению всего текста статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Лобода, “Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Анатолия Георгиевича Витушкина, Тр. МИАН, **235**, Наука, М., 2001, 114–142.

- [2] А. В. Лобода, “Однородные строго псевдовыпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии”, *Матем. сб.*, **192**:12 (2001), 3–24.
- [3] А. В. Лобода, “Об определении однородной строго псевдо-выпуклой гиперповерхности по коэффициентам ее нормального уравнения”, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 453–456.
- [4] G. Fels, W. Kaup, “Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5”, *Acta Math.*, **201**:1 (2008), 1–82.
- [5] V. K. Beloshapka, I. G. Kossovskiy, “Classification of homogeneous CR-manifolds in dimension 4”, *J. Math. Anal. Appl.*, **374**:2 (2011), 655–672.
- [6] А. В. Лобода, А. С. Ходарев, “Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства”, *Изв. вузов. Матем.*, 2003, № 10, 38–50.
- [7] А. В. Лобода, “Классификация аффинно-однородных невырожденных по Леви вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$ ”, К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова, *Современные проблемы математики и механики*, **6**, Математика. Вып. 3, Изд-во Моск. ун-та, М., 2011, 56–68.
- [8] А. В. Лобода, “Аффинно-однородные голоморфно-плоские гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ ”, *Материалы 10-й Казанской летней школы-конференции*, Казань, 2011, 172–173.
- [9] E. Cartan, “Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l’espace de deux variables complexes”, *Ann. Math. Pura Appl.* (4), **11**:1 (1933), 17–90.
- [10] М. С. Данилов, А. В. Лобода, “Об аффинной однородности indefinitных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ ”, *Матем. заметки*, **88**:6 (2010), 867–884.
- [11] V. K. Evchenko, A. V. Loboda, *One Family of Affinely Homogeneous Algebraic Surfaces in $\mathbb{C}^3$* , <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/sfb701/files/preprints/sfb11129.pdf>.
- [12] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных*, Наука, М., 1976.
- [13] Т. Т. З. Нгуен, “Аффинно-однородные гиперповерхности трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ ”, *Воронежская зимняя математическая школа*, Тезисы докладов, Воронеж, 2011, 236–237.
- [14] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1979.
- [15] B. Doubrov, B. Komrakov, M. Rabinovich, “Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry”, *Geometry and Topology of Submanifolds, VIII*, World Sci., Singapore, 1996, 168–178.
- [16] M. Eastwood, V. Ezhov, “On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space”, *Geom. Dedicata*, **77**:1 (1999), 11–69.
- [17] S. S. Chern, J. K. Moser, “Real hypersurfaces in complex manifolds”, *Acta Math.*, **133**:3 (1974), 219–271.
- [18] П. А. Широков, А. П. Широков, *Аффинная дифференциальная геометрия*, Физматгиз, М., 1959.
- [19] А. В. Лобода, “Всякая голоморфно-однородная трубка в $\mathbb{C}^2$ имеет аффинно-однородное основание”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:6 (2001), 1335–1339.
- [20] В. К. Белошапка, “Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ ”, *Матем. заметки*, **60**:5 (1996), 760–764.
- [21] J. Dadok, P. Yang, “Automorphisms of tube domains and spherical hypersurfaces”, *Amer. J. Math.*, **107**:4 (1985), 999–1013.
- [22] А. В. Исаев, М. А. Мищенко, “Классификация сферических трубчатых гиперповерхностей, имеющих в сигнатуре формы Леви один минус”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:6 (1988), 1123–1153.

Т. Т. З. Нгуен

Воронежский государственный

архитектурно-строительный университет

Поступило

19.07.2011

Исправленный вариант

21.09.2012