Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Авдеев, Нормализаторы разрешимых сферических подгрупп, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 1, 22–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9208>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:11:37

Нормализаторы разрешимых сферических подгрупп

Р. С. Авдеев

Для произвольной связной разрешимой сферической подгруппы H связной полупростой алгебраической группы G вычисляется группа $N_G(H)$ – нормализатор H в G . Тем самым завершается классификация всех (не обязательно связных) разрешимых сферических подгрупп в полупростых алгебраических группах.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm9208

1. Введение. Пусть G – связная полупростая комплексная алгебраическая группа. Замкнутая подгруппа $H \subset G$ называется *сферической* (однородное пространство G/H – *сферическим*), если борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет открытую орбиту в G/H . Последнее условие эквивалентно тому, что для некоторого элемента $g \in G$ имеет место соотношение $\mathfrak{b} + (\text{Ad } g)\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ – алгебры Ли групп B , H , G соответственно, $\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ – присоединенное представление группы G . Отсюда, в частности, вытекает, что свойство сферичности подгруппы H (а также однородного пространства G/H) является *локальным*, т.е. зависит только от пары алгебр $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Таким образом, можно говорить о сферических подалгебрах в $\mathfrak{g}$. В теоретико-групповых терминах локальность свойства сферичности означает, что подгруппа H является сферической тогда и только тогда, когда таковой является подгруппа H^0 – связная компонента единицы подгруппы H .

В силу локальности свойства сферичности классификация сферических подгрупп в G может быть естественным образом разбита на два этапа. Первый этап заключается в классификации *связных* сферических подгрупп в G , что эквивалентно классификации сферических подалгебр в алгебре $\mathfrak{g}$. На втором этапе для каждой связной сферической подгруппы $H_0 \subset G$ нужно найти все подгруппы $H \subset G$, для которых $H^0 = H_0$.

На настоящий момент в рамках первого этапа классификации явное описание (в терминах алгебр Ли) всех сферических подгрупп получено внутри двух “противоположных” классов подгрупп – редуктивных и разрешимых. Список связных редуктивных сферических подгрупп в простых группах получен в [1], а в непростых полупростых группах – в [2] и, независимо, в [3] (см. также уточнения в [4]). Связные разрешимые сферические подгруппы описаны в [5].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00648-а) и фонда Александра фон Гумбольдта.

Как указано выше, второй этап классификации заключается в описании всех конечных расширений заданной связной сферической подгруппы в G . Пусть H_0 – связная подгруппа в G . Тогда всякая подгруппа $H \subset G$ со свойством $H^0 = H_0$ содержится в подгруппе $N_G(H_0)$ – нормализаторе подгруппы H_0 в группе G . Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между конечными расширениями подгруппы H_0 и конечными подгруппами в группе $N_G(H_0)/H_0$. Таким образом, второй этап сводится к вычислению группы $N_G(H_0)$ для заданной связной подгруппы H_0 .

В работе [6] вычислены нормализаторы для большинства редуктивных сферических подгрупп в простых группах, т.е. для подгрупп из списка Кремера [1]. В настоящей работе вычисляются нормализаторы всех связных разрешимых сферических подгрупп в полупростых алгебраических группах. Для этой цели используется структурная теория связных разрешимых сферических подгрупп, развитая в [5]. Основными результатами настоящей работы являются теорема 3 и предложение 4 (см. п. 4).

Известно, что для всякой сферической подгруппы $H \subset G$ группа $N_G(H)/H$ коммутативна (и даже диагонализуема, см. [7; следствие 5.2]). Поэтому:

- (1) сферическая подгруппа $H \subset G$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима подгруппа H^0 ; это означает, что описание всех конечных расширений связных разрешимых сферических подгрупп дает классификацию всех (не обязательно связных) разрешимых сферических подгрупп в полупростых алгебраических группах;
- (2) подгруппа $N_G(H)$ совпадает с подгруппой $N_G(H^0)$, ввиду чего результаты настоящей работы позволяют вычислять нормализаторы произвольных разрешимых сферических подгрупп в полупростых алгебраических группах.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. К настоящему моменту завершена программа классификации *всех* сферических однородных пространств в комбинаторных терминах (так называемых *однородных сферических данных*), инициированная Луной в работе [8] (подробности см. в [9; п. 30.11]). Однако эта классификация является неявной в том смысле, что для нее пока не найден общий способ построения сферической подгруппы по определяющему ее набору комбинаторных данных.

Структура настоящей работы такова. В п. 2 содержатся некоторые обозначения и соглашения, используемые в работе. В п. 3 приводятся начальные факты структурной теории связных разрешимых сферических подгрупп, необходимые для формулировки основных результатов. В п. 4 формулируются основные результаты работы (теорема 3 и предложение 4) и приводятся примеры. В п. 5 содержатся дополнительные факты из структурной теории связных разрешимых сферических подгрупп, необходимые для доказательства основных результатов. Наконец, доказательство основных результатов осуществляется в п. 6.

2. Некоторые соглашения и обозначения. В настоящей работе основным полем является поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Все группы предполагаются алгебраическими, а их подгруппы – замкнутыми в топологии Зарисского. Алгебры Ли групп, обозначенных прописными латинскими буквами, обозначаются соответствующими строчными готическими буквами.

Список обозначений:

- e – единичный элемент произвольной группы;
- $|X|$ – мощность конечного множества X ;
- L^0 – связная компонента единицы группы L ;
- $\mathfrak{X}(L)$ – группа характеров (в аддитивной записи) группы L ;
- $N_L(K)$ – нормализатор подгруппы K в группе L ;
- G – произвольная связная полупростая алгебраическая группа;
- $B \subset G$ – фиксированная борелевская подгруппа группы G ;
- $T \subset B$ – фиксированный максимальный тор группы G ;
- $U \subset B$ – максимальная унитарная подгруппа группы G , содержащаяся в B ;
- $W = N_G(T)/T$ – группа Вейля группы G относительно тора T ;
- $\theta: N_G(T) \rightarrow W$ – канонический гомоморфизм;
- $Q = \mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ – рациональное векторное пространство, натянутое на $\mathfrak{X}(T)$;
- $\langle A \rangle$ – линейная оболочка подмножества $A \subset \mathfrak{X}(T)$ в пространстве Q ;
- $(\cdot, \cdot)$ – фиксированное скалярное произведение в Q , инвариантное относительно W ;
- $\Delta \subset \mathfrak{X}(T)$ – система корней группы G относительно тора T ;
- $\Delta_+ \subset \Delta$ – подмножество положительных корней по отношению к B ;
- $\Pi \subset \Delta_+$ – система простых корней;
- $r_\alpha \in W$ – простое отражение, отвечающее корню $\alpha \in \Pi$;
- $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ – корневое подпространство, отвечающее корню $\alpha \in \Delta$;
- $\Sigma(\tilde{\Pi})$ – схема Дынкина подмножества $\tilde{\Pi} \subset \Pi$.

Для каждого корня $\alpha = \sum_{\delta \in \Pi} k_\delta \delta \in \Delta_+$ мы рассматриваем его *носитель* $\text{Supp } \alpha = \{\delta \mid k_\delta > 0\}$ и *высоту* $\text{ht } \alpha = \sum_{\delta \in \Pi} k_\delta$. Если $\alpha \in \Delta_+$, мы полагаем $\Delta(\alpha) = \Delta \cap \langle \text{Supp } \alpha \rangle$ и $\Delta_+(\alpha) = \Delta_+ \cap \langle \text{Supp } \alpha \rangle$. Множество $\Delta(\alpha)$ является неразложимой системой корней с системой простых корней $\text{Supp } \alpha$; множество положительных корней этой системы корней совпадает с $\Delta_+(\alpha)$.

Пусть L – группа и L_1, L_2 – ее подгруппы. Тогда запись $L = L_1 \ltimes L_2$ означает, что группа L разлагается в полупрямое произведение подгрупп L_1, L_2 , т.е. $L = L_1 L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{e\}$ и L_2 – нормальная подгруппа в L .

Допуская вольность в речи, мы отождествляем корни из множества Π и соответствующие им вершины схемы Дынкина системы простых корней Π .

Говоря, что две вершины некоторой схемы Дынкина соединены ребром, мы допускаем, что это ребро может быть кратным.

Нумерация вершин (т.е. простых корней) связных схем Дынкина используется такая же, как в книге [10].

3. Предварительные сведения о связных разрешимых сферических подгруппах. В этом пункте приводятся основные определения и начальные факты структурной теории связных разрешимых сферических подгрупп в полупростых группах (см. [5]), нужные для формулировки основных результатов настоящей работы.

Пусть $H \subset B$ – связная разрешимая подгруппа, $N \subset U$ – ее унитарный радикал. Будем говорить, что подгруппа H *стандартно вложена* в B (по отношению

к T), если подгруппа $S = H \cap T \subset T$ является максимальным тором в H . В этой ситуации, очевидно, имеем $H = S \ltimes N$. Всякую связную разрешимую подгруппу в G при помощи сопряжения подходящим элементом из G можно перевести в подгруппу, которая стандартно вложена в B .

Пусть фиксирована стандартно вложенная в B связная разрешимая подгруппа $H \subset G$. Как и выше, положим $S = H \cap T$ и $N = H \cap U$, так что $H = S \ltimes N$. Обозначим через $\tau: \mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$ отображение ограничения характеров тора T на S . Пусть $\Phi = \tau(\Delta_+) \subset \mathfrak{X}(S)$ – система весов действия тора S на $\mathfrak{u}$ посредством присоединенного представления группы G . Имеем $\mathfrak{u} = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{u}_{\varphi}$, где $\mathfrak{u}_{\varphi} \subset \mathfrak{u}$ – весовое подпространство веса φ относительно S . При $\varphi \in \Phi$ положим $\mathfrak{n}_{\varphi} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{u}_{\varphi}$. Тогда, очевидно, имеем $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{n}_{\varphi}$. Для каждого $\varphi \in \Phi$ обозначим через c_{φ} коразмерность пространства $\mathfrak{n}_{\varphi}$ в пространстве $\mathfrak{u}_{\varphi}$.

Во введенных обозначениях имеет место следующий критерий сферичности подгруппы H .

ТЕОРЕМА 1 [5; теорема 1]. *Следующие условия эквивалентны:*

- (1) *подгруппа H является сферической в G ;*
- (2) *для всякого $\varphi \in \Phi$ выполнено неравенство $c_{\varphi} \leq 1$, и все веса с условием $c_{\varphi} = 1$ линейно независимы в $\mathfrak{X}(S)$.*

Далее мы предполагаем, что $H \subset G$ – связная разрешимая сферическая подгруппа, стандартно вложенная в B , и сохраняем все введенные выше обозначения. Положим $\Psi = \{\alpha \in \Delta_+ \mid \mathfrak{g}_{\alpha} \not\subset \mathfrak{n}\} \subset \Delta_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Корни из множества Ψ называются *активными*.

Обозначим через $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ все веса $\varphi \in \Phi$, для которых $c_{\varphi} = 1$. При $i = 1, \dots, m$ положим $\Psi_i = \{\alpha \in \Psi \mid \tau(\alpha) = \varphi_i\}$. Очевидно, что $\Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2 \cup \dots \cup \Psi_m$ и что $\Psi_i \cap \Psi_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Ключевую роль в структурной теории связных разрешимых сферических подгрупп играет следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [5; предложение 1]. *Пусть $1 \leq i, j \leq m$ и различные корни $\alpha \in \Psi_i, \beta \in \Psi_j$ таковы, что $\gamma = \beta - \alpha \in \Delta_+$. Тогда $\Psi_i + \gamma \subset \Psi_j$.*

В частности, предложение 1 используется в доказательстве следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2 [5; теорема 2]. *С точностью до сопряжения элементом из T подгруппа H однозначно определяется парой (S, Ψ) .*

Множество активных корней обладает следующим свойством (см. [5; лемма 4]): если α – активный корень и $\alpha = \beta + \gamma$ для некоторых корней $\beta, \gamma \in \Delta_+$, то ровно один из двух корней β, γ является активным. Принимая во внимание это свойство, мы говорим, что активный корень β *подчинен* активному корню α , если $\alpha = \beta + \gamma$ для некоторого корня $\gamma \in \Delta_+$. Для всякого активного корня α обозначим через $F(\alpha)$ множество, состоящее из корня α и всех активных корней, подчиненных α . Активный корень α называется *максимальным*, если он не подчинен никакому активному корню. Обозначим через M множество максимальных активных корней.

Отметим такое следствие из предложения 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для всякого $i = 1, \dots, m$ имеем либо $\Psi_i \subset M$, либо $\Psi_i \cap M = \emptyset$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [5; предложение 3]. *Пусть α – активный корень. Тогда существует единственный простой корень $\pi(\alpha) \in \text{Supp } \alpha$, обладающий следующим свой-*

ством: если $\alpha = \beta + \gamma$ для некоторых корней $\beta, \gamma \in \Delta_+$, то из двух корней β, γ активным является тот и только тот, носитель которого не содержит $\pi(\alpha)$.

Из предложения 2 вытекает, что для всякого активного корня α множество $F(\alpha)$ однозначно определяется простым корнем $\pi(\alpha)$. Поскольку всякий активный корень подчинен какому-либо максимальному активному корню (см. предложение 5 (г) в п. 5 или [5; следствие 3 (б)]), мы получаем, что множество Ψ однозначно определяется своим подмножеством M и отображением $\pi: M \rightarrow \Pi$.

Введем отношение эквивалентности на множестве M следующим образом. Для любых двух корней $\alpha, \beta \in M$ положим $\alpha \sim \beta$ тогда и только тогда, когда $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$.

Сопоставим подгруппе H набор $\Upsilon_0(H) = (M, \pi, \sim)$, где π рассматривается как отображение из M в Π .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [5; замечание 4]. *С точностью до сопряжения элементом из T унитарный радикал N группы H однозначно определяется набором $\Upsilon_0(H)$.*

4. Формулировка основных результатов. В этом пункте формулируются основные результаты работы (теорема 3 и предложение 4), а также приводятся примеры.

Пусть $H \subset G$ – связная разрешимая сферическая подгруппа, стандартно вложенная в B . Сохраним все обозначения, введенные в п. 3.

При фиксированном $i \in \{1, \dots, m\}$ подпространство $\mathfrak{n}_{\varphi_i}$ задается в пространстве $\mathfrak{u}_{\varphi_i}$ обращением в нуль некоторой (определенной с точностью до пропорциональности) линейной функции ξ_i . Из определения множества Ψ_i вытекает, что при каждом $\alpha \in \Psi_i$ ограничение функции ξ_i на подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ не равно нулю тождественно.

Обозначим через L подрешетку в $\mathfrak{X}(T)$, порожденную всеми элементами вида $\alpha - \beta$, где $\alpha, \beta \in M$ и $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. В силу предложения 1 и следствия 1 решетка L порождается также всеми элементами вида $\alpha - \beta$, где $\alpha, \beta \in \Psi$ и $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Далее, введем решетку $L_0 = \langle L \rangle \cap \mathfrak{X}(T) \supset L$ и обозначим через A (соответственно через A_0) подгруппу в T , задаваемую равенством единице всех характеров из L (соответственно из L_0). Поскольку подрешетка $L_0 \subset \mathfrak{X}(T)$ примитивна, имеем $A^0 = A_0$, причем $A/A_0 \simeq L_0/L$. Из сказанного в предыдущем абзаце ясно, что группа A (соответственно A_0) является наибольшей подгруппой (соответственно связной подгруппой) в T , нормализующей группу N .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Активный корень δ называется *регулярным*, если проекция подпространства $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{u}$ на корневое подпространство $\mathfrak{g}_\delta$ (вдоль суммы остальных корневых подпространств) равна нулю.

Пусть δ – активный корень, причем $\delta \in \Psi_i$ при некотором $i \in \{1, \dots, m\}$. Тогда из определения 2 следует, что корень δ регулярен тогда и только тогда, когда $|\Psi_i| = 1$, т.е. $\Psi_i = \{\delta\}$.

Пусть $\Psi^{\text{reg}} \subset \Psi$ – множество регулярных активных корней.

Обозначим через P множество активных корней α , удовлетворяющих следующим двум условиям:

- (1) $\alpha \in \Psi^{\text{reg}} \cap \Pi$;
- (2) $(\alpha, \beta) = 0$ для всякого корня $\beta \in \Psi \setminus \{\alpha\}$.

Легко видеть, что для всякого корня $\delta \in P$ и всякого элемента $\rho \in \theta^{-1}(r_\delta)$ подгруппа $H' = \rho H \rho^{-1}$ также стандартно вложена в B , причем $\Upsilon_0(H') = \Upsilon_0(H)$ в силу условия (2). По предложению 3 имеем $N' = t N t^{-1}$ для некоторого элемента $t \in T$. Отсюда следует, что $t^{-1} \rho \in N_G(N)$, а значит, $\theta^{-1}(r_\delta) \cap N_G(N) \neq \emptyset$.

Для каждого корня $\delta \in P$ зафиксируем произвольный элемент $\rho_\delta \in \theta^{-1}(r_\delta) \cap N_G(N)$. Положим

$$P_S = \{\delta \in P \mid r_\delta(\text{Ker } \tau) = \text{Ker } \tau\} = \{\delta \in P \mid \rho_\delta S \rho_\delta^{-1} = S\}.$$

Теперь мы можем сформулировать основные результаты настоящей работы.

ТЕОРЕМА 3. *Группа $N_G(H)$ порождается группами A , N и всеми элементами ρ_δ , где δ пробегает множество P_S . В частности, $N_G(H)^0 = A_0 \ltimes N$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеются изоморфизмы*

$$\begin{aligned} N_G(H)/H &\simeq A/S \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r, \\ N_G(H)/N_G(H)^0 &\simeq A/A_0 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \simeq L_0/L \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r, \end{aligned}$$

где $r = |P_S|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Группа $N_G(H)^0$ была вычислена ранее в [5; п. 5.5].

Пусть α – активный корень. Простой корень $\delta \in \text{Supp } \alpha$ называется *крайним* для $\text{Supp } \alpha$, если в схеме $\Sigma(\text{Supp } \alpha)$ вершина, отвечающая корню δ , соединена ребром ровно с одной вершиной.

Следующее предложение позволяет явно найти множество P по набору $\Upsilon_0(H) = (M, \pi, \sim)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Корень $\alpha \in \Pi$ содержится во множестве P ровно в одном из следующих двух случаев.*

Случай 1. Выполнены следующие условия:

- (1) $\alpha \in M$;
- (2) $\alpha \not\sim \beta$ для всякого корня $\beta \in M \setminus \{\alpha\}$;
- (3) для всякого корня $\beta \in M \setminus \{\alpha\}$ схема $\Sigma(\{\alpha\} \cup \text{Supp } \beta)$ несвязна.

Случай 2. $\alpha \notin M$ и существует корень $\beta \in M$ со следующими свойствами:

- (1) $\beta = \sum_{\delta \in \text{Supp } \beta} \delta$;
- (2) $\alpha \in \text{Supp } \beta$, причем корень α является крайним для $\text{Supp } \beta$;
- (3) $\pi(\beta) \neq \alpha$;
- (4) существует такой корень $\alpha' \in \text{Supp } \beta$, что в схеме $\Sigma(\text{Supp } \beta)$ вершины α и α' соединены двойным ребром, стрелка на котором направлена к α ;
- (5) для всякого корня $\gamma \in M \setminus \{\beta\}$ схема $\Sigma(\{\alpha\} \cup \text{Supp } \gamma)$ несвязна.

ПРИМЕР 1. Пусть группа G является присоединенной (т.е. ее центр тривиален). Хорошо известно, что в этом случае решетка $\mathfrak{X}(T)$ порождается множеством Π . Покажем, что $A = A_0$. Заменив подгруппу H сопряженной при помощи подходящего элемента из $N_G(T)$, можно считать, что каждый корень из M равен сумме всех простых корней из своего носителя (см. [5; предложение 17]). Тогда из условия (С) (см. теорему 5 в п. 5) вытекает, что множество M порождает примитивную подрешетку в $\mathfrak{X}(T)$. Значит, подрешетка L также примитивна, откуда $L = L_0$ и $A = A_0$. Значит, $N_G(H)/N_G(H)^0 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$, где $r = |P_S|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из того, что $A = A_0$ в случае присоединенной группы G , следует, что $A = Z(G)A_0$ в случае произвольной группы G , где $Z(G)$ – центр группы G .

ПРИМЕР 2. Пусть $S = A_0$. Тогда $H = N_G(H)^0$ и $\text{Ker } \tau = L_0$. Легко видеть, что для всякого корня $\delta \in P$ отражение r_δ сохраняет подпространство $\langle L_0 \rangle \subset Q$ и действует на нем тривиально. Отсюда следует, что $P_S = P$. Значит, $N_G(H)/N_G(H)^0 \simeq L_0/L \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$, где $r = |P|$.

ПРИМЕР 3. Пусть группа G проста и является присоединенной, а подгруппа H удовлетворяет условию $\bigcup_{\alpha \in M} \text{Supp } \alpha = \Pi$. Тогда с учетом условия (Т) (см. теорему 5 в п. 5) и примера 1 получаем $S = A_0$. В силу предложения 4 имеются следующие возможности в зависимости от типа системы корней Δ :

- (1) если Δ имеет тип, отличный от A_1 или B_n ($n \geq 2$), то $P = \emptyset$ и $N_G(H) = H$;
- (2) если Δ имеет тип A_1 , то, очевидно, $H = T$, $P = \Pi$ и $N_G(H)/H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
- (3) если Δ имеет тип B_n ($n \geq 2$), то либо $P = \emptyset$ (и тогда $N_G(H) = H$), либо $|P| = 1$ (и тогда $N_G(H)/H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Тогда в качестве примера первой ситуации можно взять $M = \{\beta\}$, где $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, и $\pi(\beta) = \alpha_n$. В качестве примера второй ситуации можно взять $M = \{\beta\}$, где $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, и $\pi(\beta) \neq \alpha_n$; при этом $P = \{\alpha_n\}$.

ПРИМЕР 4. Пусть $G = \text{SL}_3$ и группы B , U , T состоят из всех соответственно верхнетреугольных, верхних унитреугольных, диагональных матриц, содержащихся в G . При $t = \text{diag}(t_1, t_2, t_3) \in T$ и $k = 1, 2$ положим $\alpha_k(t) = t_k t_{k+1}^{-1}$. Пусть H – группа всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} t & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где $a, b, t \neq 0$ – произвольные числа. Тогда $S = \{\text{diag}(t, 1, t^{-1}) \mid t \neq 0\}$, а подгруппа N состоит из всех матриц вида (4.1), для которых $t = 1$. Имеем $A = A_0 = T$ и $\Psi = M = P = \{\alpha_1\}$. Кроме того, $\langle \text{Ker } \tau \rangle = \langle \alpha_1 - \alpha_2 \rangle$, откуда $r_{\alpha_1} \langle \text{Ker } \tau \rangle \neq \langle \text{Ker } \tau \rangle$ и $P_S = \emptyset$. Таким образом, $N_G(H) = T \ltimes N$. Далее, имеем $N_G(N_G(H)) = N_G(H) \cup \rho N_G(H)$, где

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В частности, мы находим, что $N_G(N_G(H)) \neq N_G(H)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пример 4 опровергает теорему 4.3(iii) в [11] и лемму 30.2 в [9], которые утверждают, что $N_G(N_G(H)) = N_G(H)$ для произвольной сферической подгруппы $H \subset G$. Впрочем, эта ошибка не влияет на справедливость остальных результатов общей теории сферических однородных пространств.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Применяя теорему 3 к группе $N_G(H)^0 = A_0 \ltimes N$ (см. пример 2), мы получаем, что группа $N_G(N_G(H))$ порождается группами A , N и всеми элементами ρ_δ , где $\delta \in P$. В частности, равенство $N_G(N_G(H)) = N_G(H)$ выполнено тогда и только тогда, когда $P = P_S$.

5. Дальнейшие сведения о связных разрешимых сферических подгруппах. В этом пункте приводятся все необходимые результаты из структурной теории и классификации связных разрешимых сферических подгрупп, которые нам понадобятся при доказательстве теоремы 3 и предложения 4.

На протяжении пункта через H и H' обозначаются две (не обязательно различные) связные разрешимые сферические подгруппы, стандартно вложенные в B . Обозначения $S, N, \Psi, \pi, \dots$ (соответственно $S', N', \Psi', \pi', \dots$) относятся к подгруппе H (соответственно к подгруппе H').

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 [5; лемма 7]. Пусть $\alpha \in \Psi$. Тогда:

- (а) $|F(\alpha)| = |\text{Supp } \alpha|$;
- (б) все веса $\tau(\beta)$, где $\beta \in \text{Supp } \alpha$, линейно независимы в $\mathfrak{X}(S)$;
- (в) $\langle F(\alpha) \rangle = \langle \text{Supp } \alpha \rangle$;
- (г) если $\beta \in \Psi$ и $\text{Supp } \beta \subset \text{Supp } \alpha$, то $\beta \in F(\alpha)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 [5; следствие 6]. Пусть $\alpha \in \Psi$. Тогда отображение $\pi: F(\alpha) \rightarrow \text{Supp } \alpha$ является биекцией.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 [5; лемма 10]. Пусть корни $\alpha, \beta \in \Psi$ таковы, что $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Тогда $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть различные корни $\alpha, \beta \in \Psi$ таковы, что $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ и $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Тогда найдутся такие корни $\tilde{\alpha} \in F(\alpha)$ и $\tilde{\beta} \in F(\beta)$, что $\tau(\tilde{\alpha}) = \tau(\tilde{\beta})$, $\pi(\tilde{\alpha}) \notin \text{Supp } \beta$ и $\pi(\tilde{\beta}) \notin \text{Supp } \alpha$.

Это предложение следует из леммы 13 в [5], доказательство которой опирается на классификацию всех возможностей для пары активных корней (см. теорему 5 ниже). Далее мы приводим доказательство предложения 8, не использующее эту классификацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 8. Введем обозначение $I = \text{Supp } \alpha \cup \text{Supp } \beta$. В силу предложений 6 и 7 для всякого корня $\gamma \in I$ корректно определен индекс $i(\gamma) \in \{1, \dots, m\}$, для которого существует корень $\tilde{\gamma} \in \Psi_{i(\gamma)}$ с условием $\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$. Можно считать, что $\tilde{\gamma} \in F(\alpha) \cup F(\beta)$. Если отображение $i: I \rightarrow \{1, \dots, m\}$ инъективно, то множество $\tau(F(\alpha) \cup F(\beta))$ содержит по меньшей мере $|I|$ различных весов, которые по теореме 1 линейно независимы. Отсюда вытекает, что все веса $\tau(\gamma)$, где $\gamma \in I$, линейно независимы. Но тогда имеем $\tau(\alpha) \neq \tau(\beta)$, что не так. Значит, найдутся два различных корня $\gamma_1, \gamma_2 \in I$ с условием $i(\gamma_1) = i(\gamma_2)$. В силу предложений 6 и 5(а, б, в) корни γ_1, γ_2 не могут лежать одновременно во множестве $\text{Supp } \alpha$; по той же причине они не могут лежать одновременно во множестве $\text{Supp } \beta$. Значит, один из этих двух корней лежит в $\text{Supp } \alpha \setminus \text{Supp } \beta$, а другой лежит в $\text{Supp } \beta \setminus \text{Supp } \alpha$. Без ограничения общности считаем, что $\gamma_1 \in \text{Supp } \alpha \setminus \text{Supp } \beta$ и $\gamma_2 \in \text{Supp } \beta \setminus \text{Supp } \alpha$. Тогда единственный корень $\tilde{\alpha} \in F(\alpha)$ с условием $\pi(\tilde{\alpha}) = \gamma_1$ и единственный корень $\tilde{\beta} \in F(\beta)$ с условием $\pi(\tilde{\beta}) = \gamma_2$ являются искомыми.

ТЕОРЕМА 4 [5; теорема 3]. Для всякого корня $\alpha \in \Psi$ пара $(\alpha, \pi(\alpha))$ содержится в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1

№	Тип $\Delta(\alpha)$	α	$\pi(\alpha)$
1	любой ранга n	$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$	$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
2	B_n	$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + 2\alpha_n$	$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$
3	C_n	$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$	α_n
4	F_4	$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$	α_3, α_4
5	G_2	$2\alpha_1 + \alpha_2$	α_2
6	G_2	$3\alpha_1 + \alpha_2$	α_2

Поясним обозначения в таблице 1. В столбце “ α ” дается выражение корня α в виде суммы простых корней из $\text{Supp } \alpha$. При этом простой корень, имеющий номер i в схеме $\Sigma(\text{Supp } \alpha)$, обозначается через α_i . В столбце “ $\pi(\alpha)$ ” перечислены все возможности для $\pi(\alpha)$ при заданном активном корне α .

Следующий результат получается несложным перебором всех возможностей из таблицы 1.

СЛЕДСТВИЕ 3 [5; следствие 7]. Если $\alpha \in \Psi$, $|\text{Supp } \alpha| \geq 2$ и $\delta \in \text{Supp } \alpha \cap F(\alpha)$, то корень δ является крайним для $\text{Supp } \alpha$.

Далее мы приводим список из нескольких условий на пару α, β активных корней. Эти условия будут использованы ниже при формулировке теоремы 5.

Рис. 1

- (D0) $\text{Supp } \alpha \cap \text{Supp } \beta = \emptyset$;
- (D1) $\text{Supp } \alpha \cap \text{Supp } \beta = \{\delta\}$, где $\pi(\alpha) \neq \delta$, $\pi(\beta) \neq \delta$ и корень δ является крайним для $\text{Supp } \alpha$ и $\text{Supp } \beta$;
- (E1) $\text{Supp } \alpha \cap \text{Supp } \beta = \{\delta\}$, где $\delta = \pi(\alpha) = \pi(\beta)$, $\alpha - \delta \in \Delta_+$, $\beta - \delta \in \Delta_+$ и корень δ является крайним для $\text{Supp } \alpha$ и $\text{Supp } \beta$;
- (D2) схема $\Sigma(\text{Supp } \alpha \cup \text{Supp } \beta)$ имеет такой вид, как на рисунке 1 (где $p, q, r \geq 1$ – некоторые числа), причем

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_p + \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_r,$$

$$\beta = \beta_1 + \dots + \beta_q + \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_r,$$

$$\pi(\alpha) \notin \text{Supp } \alpha \cap \text{Supp } \beta \text{ и } \pi(\beta) \notin \text{Supp } \alpha \cap \text{Supp } \beta;$$

(E2) схема $\Sigma(\text{Supp } \alpha \cup \text{Supp } \beta)$ имеет такой вид, как на рис. 1 (где $p, q, r \geq 1$ – некоторые числа), причем

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_p + \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_r, \\ \beta &= \beta_1 + \cdots + \beta_q + \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_r\end{aligned}$$

и $\pi(\alpha) = \pi(\beta) \in \text{Supp } \alpha \cap \text{Supp } \beta$.

Введем множество $\Pi_0 = \bigcup_{\delta \in M} \text{Supp } \delta \subset \Pi$.

Помимо набора $\Upsilon_0(H) = (M, \pi, \sim)$ сопоставим подгруппе H набор

$$\Upsilon(H) = (S, M, \pi, \sim),$$

где π рассматривается как отображение из M в Π .

Следующая теорема дает классификацию всех связных разрешимых сферических подгрупп в G , стандартно вложенных в B .

ТЕОРЕМА 5 (а) [5; теорема 4]. *С точностью до сопряжения элементом из T подгруппа H однозначно определяется своим набором $\Upsilon(H) = (S, M, \pi, \sim)$, причем этот набор удовлетворяет следующим условиям:*

- (А) $\pi(\alpha) \in \text{Supp } \alpha$ для всякого корня $\alpha \in M$, причем пара $(\alpha, \pi(\alpha))$ содержится в таблице 1;
- (D) если $\alpha, \beta \in M$ и $\alpha \approx \beta$, то для корней α, β реализуется одна из возможностей (D0), (D1), (D2);
- (Е) если $\alpha, \beta \in M$ и $\alpha \sim \beta$, то для корней α, β реализуется одна из возможностей (D0), (D1), (E1), (D2), (E2);
- (С) если $\alpha \in M$, то $\text{Supp } \alpha \not\subset \bigcup_{\delta \in M \setminus \{\alpha\}} \text{Supp } \delta$;
- (Т) $\langle \text{Ker } \tau \rangle \cap \langle \Pi_0 \rangle = \langle \alpha - \beta \mid \alpha, \beta \in M, \alpha \sim \beta \rangle$.

(б) [5; теорема 5] Пусть подтор $S \subset T$, подмножество $M \subset \Delta_+$, отображение $\pi: M \rightarrow \Pi$ и отношение эквивалентности $\sim$ на M удовлетворяют условиям (А), (D), (Е), (С) и (Т). Тогда существует связная разрешимая сферическая подгруппа $H \subset G$, стандартно вложенная в B и такая, что $\Upsilon(H) = (S, M, \pi, \sim)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Вообще говоря, может случиться так, что $\Upsilon(H) \neq \Upsilon(H')$, но при этом подгруппы H, H' сопряжены в G . По поводу вопроса о том, когда две связные разрешимые сферические подгруппы, стандартно вложенные в B , сопряжены в G , см. предложение 9 и теорему 6 ниже (более подробное освещение этого вопроса см. также в [5; § 5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9 [5; предложение 13]. Пусть подгруппы H, H' таковы, что $H' = gHg^{-1}$ для некоторого $g \in G$. Тогда $g \in N' \cdot N_G(T) \cdot N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\delta \in \Psi^{\text{reg}} \cap \Pi$. Элементарным преобразованием с центром в δ (или просто элементарным преобразованием) называется переход $H \mapsto \rho_\delta H \rho_\delta^{-1}$, где $\rho_\delta \in \theta^{-1}(r_\delta)$ – какой-либо элемент.

Как нетрудно убедиться, в этом определении подгруппа $\rho_\delta H \rho_\delta^{-1}$ также стандартно вложена в B .

Следующая теорема была фактически доказана при доказательстве теоремы 6 в [5].

ТЕОРЕМА 6. Пусть подгруппы H, H' таковы, что $H' = \sigma H \sigma^{-1}$ для некоторого $\sigma \in N_G(T)$. Тогда найдутся элементы $\rho_1, \dots, \rho_k \in N_G(T)$ со следующими свойствами:

- (1) $\theta(\rho_1), \dots, \theta(\rho_k)$ – простые отражения;
- (2) $\sigma = \rho_k \dots \rho_1$;
- (3) цепочка

$$H \mapsto \rho_1 H \rho_1^{-1} \mapsto \rho_2 \rho_1 H \rho_1^{-1} \rho_2^{-1} \mapsto \dots \mapsto \sigma H \sigma^{-1} = H'$$

является цепочкой элементарных преобразований.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10 [5; лемма 30(а,б)]. Пусть $H \mapsto H'$ – элементарное преобразование с центром в δ . Тогда:

- (а) $\Psi' = r_\delta(\Psi \setminus \{\delta\}) \cup \{\delta\}$;
- (б) $\pi'(r_\delta(\alpha)) = \pi(\alpha)$ при $\alpha \in \Psi \setminus \{\delta\}$;

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $H \mapsto H'$ – элементарное преобразование с центром в δ , и пусть $\alpha \in \Psi$ – произвольный корень. Тогда для единственного положительного корня $\tilde{\alpha}$, содержащегося во множестве $\{r_\delta(\alpha), -r_\delta(\alpha)\}$, имеем $\tilde{\alpha} \in \Psi'$, причем $\pi'(\tilde{\alpha}) = \pi(\alpha)$.

Из теоремы 6 и следствия 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\sigma \in N_G(H) \cap N_G(T)$ и $\alpha \in \Psi$ – произвольный корень. Положим $s = \theta(\sigma) \in W$. Тогда для единственного положительного корня β , содержащегося во множестве $\{s(\alpha), -s(\alpha)\}$, имеем $\beta \in \Psi$, причем $\pi(\beta) = \pi(\alpha)$.

6. Доказательство основных результатов. В этом пункте мы докажем теорему 3 и предложение 4. Мы сохраняем обозначения, введенные в пп. 3–5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу предложения 9 имеем

$$N_G(H) \subset N \cdot N_G(T) \cdot N.$$

Поскольку $N \subset H \subset N_G(H)$, остается найти группу $N_G(H) \cap N_G(T)$.

Пусть элемент $\sigma \in N_G(T)$ таков, что $\sigma H \sigma^{-1} = H$. Положим $s = \theta(\sigma) \in W$. Из теоремы 6 и предложения 10 вытекает, что элемент s содержится в подгруппе W_0 группы W , порожденной простыми отражениями, отвечающими корням из множества Π_0 .

Если $s = e$, то $\sigma \in N_G(H) \cap T$. В п. 4 было показано, что $N_G(H) \cap T = A$.

Далее предполагаем, что $s \neq e$.

ЛЕММА 1. Если $\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi^{\text{reg}}$, то $s(\alpha) \in \Delta_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения множества Ψ^{reg} следует, что проекция пространства $\mathfrak{h}$ на корневое подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ отлична от нуля. Поскольку $(\text{Ad } \sigma)\mathfrak{g}_\gamma = \mathfrak{g}_{s(\gamma)}$ для любого $\gamma \in \Delta$, из условия $(\text{Ad } \sigma)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ вытекает, что проекция пространства $\mathfrak{h}$ на корневое подпространство $\mathfrak{g}_{s(\alpha)}$ также отлична от нуля. Отсюда следует, что $s(\alpha) \in \Delta_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Для всякого корня $\alpha \in \Psi$ имеем $s(\alpha) \in \{\alpha, -\alpha\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\alpha}$ – единственный положительный корень, содержащийся во множестве $\{s(\alpha), -s(\alpha)\}$. Требуется доказать, что $\tilde{\alpha} = \alpha$. В силу следствия 5 имеем $\tilde{\alpha} \in \Psi$ и $\pi(\tilde{\alpha}) = \pi(\alpha)$. Если множество $\pi^{-1}(\pi(\alpha))$ состоит из одного элемента, то $\tilde{\alpha} = \alpha$ и предложение доказано. Далее считаем, что множество $\pi^{-1}(\pi(\alpha))$ содержит более одного элемента. Пусть $\beta \in \pi^{-1}(\pi(\alpha)) \setminus \{\alpha\}$ – произвольный корень. Тогда по предложению 7 имеем $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Далее, в силу предложения 8 найдутся такие корни $\alpha' \in F(\alpha)$ и $\beta' \in F(\beta)$, что $\tau(\alpha') = \tau(\beta')$ и $\pi(\alpha') \notin \text{Supp } \beta$. Все четыре корня $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ являются активными и попарно различны, поэтому ни один из них не является регулярным. В частности, каждый из корней α, α' содержится во множестве $\Delta_+ \setminus \Psi^{\text{reg}}$. Кроме того, для корня $\alpha'' = \alpha - \alpha' \in \Delta_+$ имеем $\alpha'' \in \Delta_+ \setminus \Psi$, откуда по лемме 1 все три корня $s(\alpha), s(\alpha')$ и $s(\alpha'')$ положительны. В частности, $\tilde{\alpha} = s(\alpha)$. Применяя следствие 5, получаем $s(\alpha), s(\alpha') \in \Psi$ и $\pi(s(\alpha')) = \pi(\alpha')$. Теперь из равенства $s(\alpha) = s(\alpha') + s(\alpha'')$ вытекает, что $\pi(\alpha') \in \text{Supp } s(\alpha)$. Последнее означает, что $\tilde{\alpha} \neq \beta$, чем и завершается доказательство.

Из предложения 11 и леммы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6. Если корень $\alpha \in \Psi$ не является регулярным, то $s(\alpha) = \alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть $\alpha \in \Psi$ и $\text{ht } \alpha \geq 2$. Тогда $s(\alpha) = \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $\text{ht } \alpha \geq 2$ вытекает, что $|\text{Supp } \alpha| \geq 2$, откуда $|F(\alpha)| \geq 2$ по предложению 5 (а). Пусть $\alpha' \in F(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ – произвольный корень. Поскольку $\alpha - \alpha' \in \Delta_+ \setminus \Psi \subset \Delta_+ \setminus \Psi^{\text{reg}}$, по лемме 1 получаем $s(\alpha) - s(\alpha') \in \Delta_+$. Далее, в силу предложения 11 имеем $s(\alpha) \in \{\alpha, -\alpha\}$ и $s(\alpha') \in \{\alpha', -\alpha'\}$. Если $s(\alpha) = -\alpha$, то корень $s(\alpha) - s(\alpha')$ лежит во множестве $\{-\alpha + \alpha', -\alpha - \alpha'\}$, которое, как легко видеть, положительных корней не содержит. Значит, $s(\alpha) = \alpha$.

С учетом следствия 6 из предложения 12 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 7. Если корень $\alpha \in \Psi$ обладает свойством $s(\alpha) = -\alpha$, то имеем $\alpha \in \Psi^{\text{reg}} \cap \Pi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть корень $\alpha \in \Psi^{\text{reg}} \cap \Pi$ обладает свойством $s(\alpha) = -\alpha$. Тогда $(\alpha, \beta) = 0$ для любого корня $\beta \in \Psi \setminus \{\alpha\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку группа W действует в пространстве Q ортогональными преобразованиями, имеем $(\alpha, \beta) = (s(\alpha), s(\beta))$. Предположим, что $(\alpha, \beta) \neq 0$. Тогда из условия и предложения 11 вытекает, что $s(\beta) = -\beta$. По следствию 7 получаем, что $\beta \in \Pi$, откуда $(\alpha, \beta) < 0$. Следовательно, $\alpha + \beta \in \Delta_+$, причем $s(\alpha + \beta) = s(\alpha) + s(\beta) = -(\alpha + \beta) \notin \Delta_+$. С другой стороны, легко видеть, что $\alpha + \beta \notin \Psi$, откуда по лемме 1 получаем $s(\alpha + \beta) \in \Delta_+$ – противоречие.

Из следствия 7 и предложения 13 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 8. Всякий корень $\alpha \in \Psi$ со свойством $s(\alpha) = -\alpha$ содержится во множестве P .

Пусть $\delta_1, \dots, \delta_k$ – все корни, входящие во множество $\{\alpha \in \Psi \mid s(\alpha) = -\alpha\}$. По следствию 8 все эти корни содержатся во множестве P . Далее, легко видеть, что всякий активный корень инвариантен относительно действия элемента $r_{\delta_1} \dots r_{\delta_k} s \in W_0$.

Из предложения 5 (в) следует, что $\Pi_0 \subset \langle \Psi \rangle$, откуда $r_{\delta_1} \cdots r_{\delta_k} s = e$. Значит, $s = r_{\delta_k} \cdots r_{\delta_1}$ и $\sigma = t \rho_{\delta_k} \cdots \rho_{\delta_1}$ для некоторого $t \in A$.

Каждый из корней $\delta_1, \dots, \delta_k$ содержится в пространстве $\langle \Pi_0 \rangle$ и ортогонален подпространству $\langle L \rangle$. Далее, из условия (Т) (см. теорему 5) имеем $\langle \text{Ker } \tau \rangle \cap \langle \Pi_0 \rangle = \langle L \rangle$. С учетом вышесказанного из условия $s \langle \text{Ker } \tau \rangle = \langle \text{Ker } \tau \rangle$ вытекает, что пространство $\langle \text{Ker } \tau \rangle$ ортогонально каждому из корней δ_i , $i = 1, \dots, k$. Последнее означает, что $\delta_1, \dots, \delta_k \in P_S$.

Итак, мы получили, что $\sigma = t \rho_{\delta_k} \cdots \rho_{\delta_1}$ для некоторых корней $\delta_1, \dots, \delta_k \in P_S$ и элемента $t \in A$. С другой стороны, как легко видеть, для всякого корня $\delta \in P_S$ имеем $\rho_\delta \in N_G(H)$. Тем самым доказательство теоремы завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Пусть $\alpha \in \Pi$. Предположим сначала, что $\alpha \in P$. Тогда имеются две возможности.

1°. $\alpha \in M$. Тогда легко проверить, что выполнены все условия случая 1.

2°. $\alpha \notin M$. Тогда $\alpha \in \text{Supp } \beta$ для некоторого корня $\beta \in M$. В силу предложения 5 (г) имеем $\alpha \in F(\beta)$, и тогда по следствию 3 корень α является крайним для $\text{Supp } \beta$. Перебрав все возможности из таблицы 1, мы находим, что условие $(\alpha, \beta) = 0$ может быть выполнено только тогда, когда схема $\Sigma(\text{Supp } \beta)$ имеет тип B_n ($n \geq 2$) и выполнены условия (1)–(4) случая 2. Поскольку в схеме Дынкина одна вершина не может быть инцидентна двум двойным ребрам, с учетом условий (D) и (E) (см. теорему 5) для всякого корня $\beta' \in M \setminus \{\beta\}$ имеем $\alpha \notin \text{Supp } \beta'$, а значит, выполнено условие (5) случая 2.

Теперь докажем обратную импликацию предложения.

Если имеет место случай 1, то с учетом следствия 1 получаем $\alpha \in P$.

Пусть имеет место случай 2. Из свойств (1)–(3) следует, что $\alpha \in \Psi$. Из свойств (1), (4) и (5) следует, что $(\alpha, \delta) = 0$ для всякого корня $\delta \in \Psi \setminus \{\alpha\}$. Осталось доказать, что $\alpha \in \Psi^{\text{reg}}$. Если это не так, то найдется такой корень $\alpha' \in \Psi \setminus \{\alpha\}$, что $\tau(\alpha) = \tau(\alpha')$. В силу предложения 1 и следствия 1 отсюда вытекает, что $\beta' = \alpha' + (\beta - \alpha) \in M$. Но тогда схема $\Sigma(\{\alpha\} \cup \text{Supp } \beta')$ связна, и мы имеем противоречие со свойством (5). Таким образом, $\alpha \in P$.

Работа над статьей была завершена во время пребывания автора в гостеприимном университете Билефельда в июне–июле 2011 г. при поддержке фонда Александра фон Гумбольдта.

Автор выражает благодарность Э.Б. Винбергу за прочтение статьи и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Krämer, “Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen”, *Compositio Math.*, **38**:2 (1979), 129–153.
- [2] И.В. Микитюк, “Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами”, *Матем. сб.*, **129(171)**:4 (1986), 514–534.
- [3] M. Brion, “Classification des espaces homogènes sphériques”, *Compositio Math.*, **63**:2 (1987), 189–208.
- [4] О.С. Якимова, “Слабо симметрические пространства полупростых групп Ли”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2002, № 2, 57–60.

- [5] Р. С. Авдеев, “О разрешимых сферических подгруппах полупростых алгебраических групп”, Тр. ММО, **72**, № 1, МЦНМО, М., 2011, 5–62.
- [6] Р. С. Авдеев, “Превосходные аффинные сферические однородные пространства полупростых алгебраических групп”, Тр. ММО, **71**, УРСС, М., 2010, 235–269.
- [7] M. Brion, F. Pauer, “Valuations des espaces homogènes sphériques”, *Comment. Math. Helv.*, **62**:2 (1987), 265–285.
- [8] D. Luna, “Variétés sphériques de type A”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **94** (2001), 161–226.
- [9] D. A. Timashev, *Homogeneous Spaces and Equivariant Embeddings*, Encyclopaedia Math. Sci., **138**, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, 8, Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [10] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, УРСС, М., 1995.
- [11] M. Brion, *Variétés sphériques*, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/spheriques.pdf>, 1997.

Р. С. Авдеев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: suselr@yandex.ru

Поступило

24.07.2011

Исправленный вариант

27.03.2012