Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Ершов, Препятствия к вложению расслоения матричных алгебр в тривиальное, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 4, 521–540

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:55:55

Препятствия к вложению расслоения матричных алгебр в тривиальное

А. В. Ершов

В работе вычисляются кохомологические препятствия к существованию послойного унитарного вложения локально тривиального расслоения $A_k \rightarrow X$ со слоем, который является комплексной матричной алгеброй $M_k(\mathbb{C})$, в тривиальное расслоение со слоем $M_{kl}(\mathbb{C})$ при условии $(k, l) = 1$. Доказано, что первое препятствие совпадает с препятствием к редукции структурной группы $\mathrm{PGL}_k(\mathbb{C})$ расслоения A_k к $\mathrm{SL}_k(\mathbb{C})$, которое при условии $A_k \cong \mathrm{End}(\xi_k)$ для некоторого векторного $\mathbb{C}^k$ -расслоения $\xi_k \rightarrow X$ совпадает с первым классом Чженя $c_1(\xi_k)$, приведенным по модулю k . Если первое препятствие равно 0, то $A_k \cong \mathrm{End}(\tilde{\xi}_k)$ для некоторого векторного расслоения $\tilde{\xi}_k \rightarrow X$ со структурной группой $\mathrm{SL}_k(\mathbb{C})$, и второе препятствие есть $c_2(\tilde{\xi}_k) \bmod k \in H^4(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$. Далее, с помощью башни Постникова определяются высшие препятствия, каждое из которых определено на ядре предыдущего.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm9209

1. Постановка задачи. Пусть X – компактное пространство,

$$A_k \xrightarrow{p_k} X \quad (1.1)$$

– локально тривиальное расслоение со слоем, который является матричной алгеброй $M_k(\mathbb{C})$ над полем $\mathbb{C}$, рассматриваемое как расслоение со структурной группой $\mathrm{Aut}(M_k(\mathbb{C})) \cong \mathrm{PGL}_k(\mathbb{C})$. Нас будут интересовать стабильные препятствия к существованию послойных вложений

$$\begin{array}{ccc} A_k & \xrightarrow{\mu} & X \times M_n(\mathbb{C}) \\ & \searrow p_k & \swarrow \mathrm{pr}_1 \\ & X & \end{array} \quad (1.2)$$

таких, что для любого $x \in X$ ограничение $\mu|_x$ вкладывает слой $(A_k)_x \cong M_k(\mathbb{C})$ в $M_n(\mathbb{C})$ в качестве унитарной подалгебры при некоторых условиях на n (здесь

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00257-а).

pr_1 – проекция на первый множитель). Очевидно, что существование μ равносильно существованию расслоения $B_l \rightarrow X$ со слоем $M_l(\mathbb{C})$, где $l = n/k$, такого, что тензорное произведение $A_k \otimes B_l$ – тривиальное $M_n(\mathbb{C})$ -расслоение над X .

Унитарный гомоморфизм $M_m(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ существует, если и только если $m|n$. Поэтому задача о стабильных препятствиях для (1.2) формулируется следующим образом. Пусть задана последовательность натуральных чисел $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$k \mid n_1, \quad n_1 \mid n_2, \quad \dots, \quad n_{j-1} \mid n_j, \quad \dots, \quad n_j \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty,$$

и соответствующая прямая система тривиальных расслоений

$$\dots \rightarrow X \times M_{n_{j-1}}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{id}_X \times i_j} X \times M_{n_j}(\mathbb{C}) \rightarrow \dots,$$

где $i_j: M_{n_{j-1}}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{n_j}(\mathbb{C})$ – блочно-диагональное вложение $i_j(T) = E_{m_j} \otimes T$, $m_j := n_j/n_{j-1}$, $T \in M_{n_{j-1}}(\mathbb{C})$, а E_{m_j} – единичная $(m_j \times m_j)$ -матрица. Возникает вопрос: существуют ли такие прямые системы, в которые не существует послойных унитарных вложений расслоения A_k , или, иными словами, существуют ли “стабильные” (т.е. не обращающиеся в нуль при неограниченном росте n) препятствия к существованию вложения (1.2)?

Нетрудно доказать [1], что для любого расслоения (1.1) существует вложение (1.2) с $n = k^m$, где m достаточно велико, т.е., например, для последовательности $k, k^2, k^3, \dots$ стабильные препятствия равны 0¹. Однако если, к примеру, потребовать, чтобы все числа $l_j := n_j/k$ были бы взаимно просты с k , то в этой задаче, вообще говоря, появляются стабильные препятствия. Кроме того, эти препятствия не зависят от конкретного выбора последовательности $\{l_j\}$ такой, что $l_{j-1} \mid l_j$, $(l_j, k) = 1$ для любого j и $l_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, т.е. они являются характеристическими классами самого $M_k(\mathbb{C})$ -расслоения (1.1).

Мы докажем, что эти препятствия в малых размерностях допускают описание в терминах известных характеристических классов. А именно, первое препятствие к существованию вложения (1.2) – препятствие к редукции структурной группы расслоения (1.1) с $\text{PGL}_k(\mathbb{C})$ до $\text{SL}_k(\mathbb{C})$, которое при условии, что (1.1) имеет вид $\text{End}(\xi_k)$ для некоторого векторного $\mathbb{C}^k$ -расслоения ξ_k , есть $c_1(\xi_k) \bmod k \in H^2(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, где c_1 – первый класс Чженя. Заметим, что для расслоения (1.1) вида $\text{End}(\xi_k) \rightarrow X$ класс $c_1(\xi_k) \bmod k$ корректно определен. Действительно, $\text{End}(\xi_k) \cong \text{End}(\xi'_k)$ равносильно тому, что $\xi'_k = \xi_k \otimes \zeta$, где $\zeta \rightarrow X$ – комплексное линейное расслоение, но $c_1(\xi_k \otimes \zeta) = c_1(\xi_k) + kc_1(\zeta)$.

Если описанное препятствие равно нулю, то следующее лежит в $H^4(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ и может быть описано следующим образом. Можно предположить, что (1.1) имеет вид $\text{End}(\xi_k) \rightarrow X$ для некоторого векторного $\mathbb{C}^k$ -расслоения ξ_k со структурной группой $\text{SL}_k(\mathbb{C})$. Тогда указанное препятствие есть $c_2(\xi_k) \bmod k \in H^4(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$.

Далее мы индуктивно определим последовательность препятствий $\kappa_n \in H^{2n}(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, причем каждое последующее будет определено на ядре предыдущего, и докажем, что они в определенном смысле образуют полный набор препятствий.

Опишем мотивировку изучения препятствий к существованию вложения (1.2) при условии взаимной простоты $(k, l) = 1$. Во-первых, стабильные препятствия

¹Естественно сопоставить этот результат с хорошо известным фактом, что всякое (конечномерное комплексное) векторное расслоение ξ над компактной базой X является подрасслоением тривиального расслоения $X \times \mathbb{C}^n$ для достаточно большого n .

в определенном смысле сводятся к этому случаю, так как если $(k, l) = d > 1$, то $k = k_1 d$ и $l = l_1 d$, где $(k_1, l_1) = 1$. Во-вторых, расслоения (1.1), допускающие вложения (1.2) с $(k, l) = 1$, обладают рядом дополнительных свойств. Например, из данного выше описания первого препятствия следует, что они имеют вид $\text{End}(\xi_k)^2$, где ξ_k – векторное расслоение со структурной группой $\text{SU}(k)$. Можно показать [1], что существование вложения (1.2) с $n = kl$, $(k, l) = 1$, для (1.1) эквивалентно тому, что для некоторого m , $(m, k) = 1$, существует $M_m(\mathbb{C})$ -расслоение $B_m \rightarrow X$ такое, что $A_k \otimes \widetilde{M}_m \cong B_m \otimes \widetilde{M}_k$ (а тогда последнее верно вообще для всех m таких, что $2m > \dim(X)$), где через $\widetilde{M}_n$ обозначено тривиальное расслоение $X \times M_n(\mathbb{C})$.

С помощью классов стабильной эквивалентности троек вида $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$, $(k, l) = 1$, где A_k, μ как выше (см. (1.2)), была получена геометрическая интерпретация структуры H -пространства BSU_∞ [1]. Дело в том, что при использовании “мультипликативной” стабилизации расслоений на алгебры с помощью тензорного произведения на тривиальные происходит локализация, которую можно избежать, рассматривая расслоения вместе с вложениями μ указанного вида.

Опишем еще одно свойство таких расслоений. Во-первых, заметим, что прямой предел

$$\text{Fr}_{kl^\infty, l^\infty} := \varinjlim_{m, n} \text{Fr}_{kl^m, l^n}$$

(по поводу обозначений см. следующий пункт) является топологическим моноидом относительно операции

$$\text{Fr}_{kl^{m+n}, l^r} \times \text{Fr}_{kl^m, l^n} \rightarrow \text{Fr}_{kl^m, l^{n+r}},$$

задаваемой композицией унитарных гомоморфизмов матричных алгебр. Рассмотрим прямой предел

$$\text{H}_{kl^\infty, l^\infty}(A_k \otimes M_{l^\infty}(\mathbb{C})) := \varinjlim_{m, n} \text{H}_{kl^m, l^n}(A_k \otimes M_{l^m}(\mathbb{C})),$$

являющийся главным расслоением над X со структурным моноидом $\text{Fr}_{kl^\infty, l^\infty}$, где действие моноида задается отображениями вида

$$\text{Fr}_{kl^{m+n}, l^r} \times \text{H}_{kl^m, l^n}(A_k \otimes M_{l^m}(\mathbb{C})) \rightarrow \text{H}_{kl^m, l^{n+r}}(A_k \otimes M_{l^m}(\mathbb{C})),$$

определяемыми взятием композиции гомоморфизмов алгебр. Тогда верен следующий результат: *расслоение $\text{H}_{kl^\infty, l^\infty}(A_k \otimes M_{l^\infty}(\mathbb{C})) \rightarrow X$ послойно гомотопически тривиально тогда и только тогда, когда существует послойное унитарное вложение $\mu: A_k \rightarrow X \times M_{kl^r}(\mathbb{C})$ для некоторого $r \geq 0$. При этом сам моноид $\text{Fr}_{kl^\infty, l^\infty}$ стягиваем как топологическое пространство при $l = k$, в то же время как, например, при $(k, l) = 1$, его гомотопические группы суть $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ во всех нечетных размерностях (и 0 в четных), и его гомотопический тип не зависит от выбора l , взаимно простого с k . Этот результат, по-видимому, может представлять интерес для “вышей” скрученной K -теории.*

Укажем на аналогию полученных результатов с теорией равномерно гиперфинитных (УНФ) алгебр, классифицируемых с помощью супернатуральных чисел. Заметим также, что в чисто алгебраической ситуации аналог расслоений, допускающих

²В частности, они Морита-эквивалентны коммутативной алгебре $C(X)$, т.е. их класс в топологической группе Брауэра тривиален.

вложение (1.2) с условием $n = kl$, $(k, l) = 1$, тривиален. В связи с этим напомним (см. [2], § 12.6), что для полей F определена группа Брауэра $\text{Br}(F)$, образованная классами Морита-эквивалентности центральных простых алгебр относительно операции, индуцированной тензорным произведением таких алгебр. Из теории центральных простых алгебр над полем F легко вывести, что если такая алгебра A линейной размерности k^2 над F допускает унитарное вложение в матричную алгебру $M_{kl}(F)$, $(k, l) = 1$, то $A \cong M_k(F)$. Действительно, из теоремы Веддерберна непосредственно следует, что $A \cong M_m(D)$, где D – алгебра с делением над F , причем D определена однозначно с точностью до изоморфизма. Следовательно, $k^2 = dm^2$, где $d = \dim_F D$. Если существует унитарный гомоморфизм $A \rightarrow M_n(F)$, то централизатор к образу A есть центральная простая алгебра B такая, что $A \otimes B \cong M_n(F)$, откуда $\dim_F B = l^2$. Из теории группы Брауэра для полей известно, что $B \cong M_r(D^o)$, где D^o – так называемое противоположное тело (т.е. D с умножением элементов в обратном порядке). Тогда $l^2 = dr^2$. Очевидно, что $(k, l) = 1$ возможно, только когда D одномерно над F , т.е. $D = F$.

Опишем содержание работы по пунктам. В п. 2 мы сводим задачу о вложении расслоения на матричные алгебры в тривиальное расслоение к задаче построения сечения в некотором расслоении, см. теорему 1. Причем параллельно рассматривается случай общих $M_k(\mathbb{C})$ -расслоений и расслоений вида $\text{End}(\xi_k)$, где ξ_k – векторное расслоение. Кроме того, мы определяем гомотопическую эквивалентность между тотальным пространством построенного расслоения и так называемым матричным грассманианом (см. теоремы 2 и 3).

В п. 3 мы описываем первое препятствие к построению сечения, которое оказывается препятствием к редукции структурной группы $M_k(\mathbb{C})$ -расслоения с $\text{PGL}_k(\mathbb{C})$ к $\text{SL}_k(\mathbb{C})$, см. теорему 4 (в случае расслоений вида $\text{End}(\xi_k)$ это просто характеристический класс $c_1(\xi_k) \bmod k$, см. теорему 5).

В п. 4 мы определяем следующее препятствие при условии, что предыдущее равно 0. Последнее означает, что наше расслоение имеет вид $\text{End}(\xi_k)$, где ξ_k – векторное расслоение со структурной группой $\text{SU}(k)$, и тогда следующее препятствие есть характеристический класс $c_2(\xi_k) \bmod k$, см. теорему 6.

В п. 5 мы даем общую конструкцию препятствий $\kappa_r \in H^{2r}(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ во всех размерностях r с помощью башни Постникова.

В п. 6 мы показываем, что “высшие” препятствия κ_r , $r > 2$, выражаются через классы Чженя $\tilde{c}_r$ связанных накрытий $\text{BU}(k)\langle 2r \rangle$ пространства $\text{BU}(k)$ аналогично случаям размерностей 1 и 2 (когда $\kappa_1 = c_1 \bmod k$, $\kappa_2 = c_2 \bmod k$ и $\text{BU}(k)\langle 2 \rangle = \text{BU}(k)$, $\text{BU}(k)\langle 4 \rangle = \text{BSU}(k)$ соответственно), см. теорему 10.

В дальнейшем нам удобно заменить группы $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$ на компактные группы $\text{PU}(n)$, рассматривая только $*$ -гомоморфизмы вместо всех унитарных гомоморфизмов матричных алгебр. Так как $\text{PU}(n)$ является деформационным ретрактом $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$, это не влияет на рассматриваемую ниже гомотопическую теорию.

2. Сведение задачи к построению сечения в расслоении. Задача о существовании вложения (1.2) может быть сведена к задаче о существовании сечения в подходящем расслоении. Следующую конструкцию можно рассматривать как версию естественной биекции

$$\text{Mor}(X \times Y, Z) \rightarrow \text{Mor}(X, \text{Mor}(Y, Z)),$$

приспособленную для случая расслоений.

Итак, пусть $\text{Hom}_{\text{alg}}(M_k(\mathbb{C}), M_{kl}(\mathbb{C}))$ – пространство всех унитарных $*$ -гомоморфизмов $M_k(\mathbb{C}) \rightarrow M_{kl}(\mathbb{C})$. Из теоремы Нётер–Сколема [2; § 12.6] следует, что оно может быть представлено как однородное пространство

$$\text{Hom}_{\text{alg}}(M_k(\mathbb{C}), M_{kl}(\mathbb{C})) \cong \text{PU}(kl)/(E_k \otimes \text{PU}(l)) \quad (2.1)$$

(здесь и ниже символ тензорного произведения “ $\otimes$ ” обозначает кронекерово произведение матриц) группы $\text{PU}(kl)$. Для краткости далее это пространство мы будем обозначать $\text{Fr}_{k,l}$. Из этого представления и периодичности Ботта следует, что гомотопические группы этого пространства в стабильных (до $\sim 2l$) размерностях следующие:

$$\pi_r(\text{Fr}_{k,l}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \quad \text{для } r \text{ нечетного} \quad \text{и} \quad \pi_r(\text{Fr}_{k,l}) = 0 \quad \text{для } r \text{ четного.} \quad (2.2)$$

Пусть $A_k^{\text{univ}} \rightarrow \text{BPU}(k)$ – универсальное $M_k(\mathbb{C})$ -расслоение. Послойно применяя функтор $\text{Hom}_{\text{alg}}(\dots, M_{kl}(\mathbb{C}))$ (со значениями в категории топологических пространств) к A_k^{univ} , получаем расслоение

$$\begin{array}{ccc} \text{Fr}_{k,l} & \longrightarrow & \text{H}_{k,l}(A_k^{\text{univ}}) \\ & & \downarrow p_{k,l} \\ & & \text{BPU}(k) \end{array} \quad (2.3)$$

Легко видеть, что для $M_k(\mathbb{C})$ -расслоения $p_{k,l}^*(A_k^{\text{univ}}) \rightarrow \text{H}_{k,l}(A_k^{\text{univ}})$ существует каноническое вложение $\tilde{\mu}_{k,l}$ в тривиальное расслоение $\text{H}_{k,l}(A_k^{\text{univ}}) \times M_{kl}(\mathbb{C})$. А именно

$$\tilde{\mu}_{k,l}(h, T) = (h, h(T)) \quad \text{для} \quad h \in p_{k,l}^{-1}(x), \quad T \in (A_k^{\text{univ}})_x,$$

где h рассматривается как гомоморфизм $h: (A_k^{\text{univ}})_x \rightarrow M_{kl}(\mathbb{C})$.

Пусть

$$\bar{f}: X \rightarrow \text{BPU}(k) \quad (2.4)$$

– классифицирующее отображение для $M_k(\mathbb{C})$ -расслоения $A_k \xrightarrow{p_k} X$, т.е. $A_k = \bar{f}^*(A_k^{\text{univ}})$. Легко видеть, что вложение (1.2) с $n = kl$ то же самое, что подъем $\tilde{f}$ классифицирующего отображения $\bar{f}$,

$$\tilde{f}: X \rightarrow \text{H}_{k,l}(A_k^{\text{univ}}), \quad p_{k,l} \circ \tilde{f} = \bar{f},$$

в расслоении (2.3), и обратно, такой подъем определяет некоторое вложение. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Существует взаимно-однозначное соответствие между вложениями (1.2) расслоения $A_k = \bar{f}^*(A_k^{\text{univ}})$ и подъемами $\tilde{f}$ его классифицирующего отображения $\bar{f}$ в расслоении (2.3).*

Подъем классифицирующего отображения $\bar{f}$, соответствующий вложению μ , мы обозначим через f_μ . Ясно, что также имеется взаимно-однозначное соответствие между гомотопическими классами вложений и классами (послойной) гомотопической эквивалентности подъемов, определяемое соответствием $[\mu] \mapsto [f_\mu]$.

Можно также рассмотреть модификацию предыдущей конструкции на случай расслоений A_k вида $\text{End}(\xi_k)$. А именно, пусть $\xi_k^{\text{univ}} \rightarrow \text{BU}(k)$ – универсальное $\mathbb{C}^k$ -расслоение. Послойно применяя функтор $\text{Hom}_{\text{alg}}(\dots, M_{kl}(\mathbb{C}))$ к $M_k(\mathbb{C})$ -расслоению $\text{End}(\xi_k^{\text{univ}}) \rightarrow \text{BU}(k)$, получаем расслоение (ср. (2.3)):

$$\begin{array}{ccc} \text{Fr}_{k,l} & \longrightarrow & \text{H}_{k,l}(\text{End}(\xi_k^{\text{univ}})) \\ & & \downarrow \hat{p}_{k,l} \\ & & \text{BU}(k) \end{array} \quad (2.5)$$

Заметим, что существует каноническое вложение

$$\hat{p}_{k,l}^*(\text{End}(\xi_k^{\text{univ}})) \hookrightarrow \text{H}_{k,l}(\text{End}(\xi_k^{\text{univ}})) \times M_{kl}(\mathbb{C}).$$

Теперь легко видеть, что вложение $\text{End}(\xi_k) \hookrightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C})$ то же самое, что и подъем в (2.5) классифицирующего отображения $f: X \rightarrow \text{BU}(k)$ для ξ_k .

Через $\text{Gr}_{k,l}$ обозначим пространство, называемое *матричным грассманианом* и параметризующее унитарные $*$ -подалгебры, изоморфные $M_k(\mathbb{C})$ (“ k -подалгебры”), в фиксированной алгебре $M_{kl}(\mathbb{C})$. Заметим, что согласно теореме Нётер–Сколема он представляется в виде однородного пространства

$$\text{Gr}_{k,l} \cong \text{PU}(kl)/(\text{PU}(k) \otimes \text{PU}(l)) \quad (2.6)$$

группы $\text{PU}(kl)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пространство $\text{H}_{k,l}(A_k^{\text{univ}})$ гомотопически эквивалентно матричному грассманиану $\text{Gr}_{k,l}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение

$$\tau_{k,l}: \text{H}_{k,l}(A_k^{\text{univ}}) \xrightarrow{\cong} \text{Gr}_{k,l}, \quad (2.7)$$

определенное следующим образом: оно переводит точку $h \in \text{H}_{k,l}(A_k^{\text{univ}})$ такую, что $p_{k,l}(h) = x \in \text{BPU}(k)$, в k -подалгебру $h((A_k^{\text{univ}})_x) \subset M_{kl}(\mathbb{C})$ (здесь мы отождествляем точки в $\text{Gr}_{k,l}$ и k -подалгебры в $M_{kl}(\mathbb{C})$). Легко проверить, что $\tau_{k,l}$ является расслоением со стягиваемыми слоями $\text{H}_{k,1}(A_k^{\text{univ}}) \cong \text{EPU}(k)$ (где $\text{EPU}(k)$ обозначает тотальное пространство универсального главного $\text{PU}(k)$ -расслоения), откуда, в частности, следует, что $\tau_{k,l}$ – гомотопическая эквивалентность.

Тавтологическое $M_k(\mathbb{C})$ -расслоение $\mathcal{A}_{k,l} \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$ определяется как подрасслоение прямого произведения $\text{Gr}_{k,l} \times M_{kl}(\mathbb{C})$, состоящее из пар

$$\{(x, T) \mid x \in \text{Gr}_{k,l}, T \in M_{k,x} \subset M_{kl}(\mathbb{C})\},$$

где $M_{k,x}$ обозначает k -подалгебру, соответствующую точке $x \in \text{Gr}_{k,l}$. Пусть $\lambda_{k,l}: \text{Gr}_{k,l} \rightarrow \text{BPU}(k)$ – классифицирующее отображение для главного $\text{PU}(k)$ -расслоения

$$\text{PU}(k) \rightarrow \text{Fr}_{k,l} \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$$

(с которым ассоциировано тавтологическое $M_k(\mathbb{C})$ -расслоение $\mathcal{A}_{k,l} \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$). Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{k,l}(A_k^{\text{univ}}) & \xrightarrow{\tau_{k,l}} & \text{Gr}_{k,l} \\ p_{k,l} \downarrow & \swarrow \lambda_{k,l} & \\ \text{BPU}(k) & & \end{array}$$

коммутативна. В частности, $p_{k,l}^*(A_k^{\text{univ}}) = \tau_{k,l}^*(\mathcal{A}_{k,l})$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p_{k,l}^*(A_k^{\text{univ}}) & \xrightarrow{\tilde{\mu}_{k,l}} & H_{k,l}(A_k^{\text{univ}}) \times M_{kl}(\mathbb{C}) \\ \tilde{\tau}_{k,l} \downarrow & & \downarrow \tau_{k,l} \times \text{id} \\ \mathcal{A}_{k,l} & \xrightarrow{\mu_{k,l}} & \text{Gr}_{k,l} \times M_{kl}(\mathbb{C}) \end{array}$$

в которой $\mu_{k,l}: \mathcal{A}_{k,l} \hookrightarrow \text{Gr}_{k,l} \times M_{kl}(\mathbb{C})$ – тавтологическое вложение, а $\tilde{\tau}_{k,l}$ накрывает $\tau_{k,l}$, коммутативна.

Предположим, что $(k, l) = 1$. Заметим, что в этом случае матричный грассманиан $\text{Gr}_{k,l}$ может быть также представлен в виде

$$\text{Gr}_{k,l} \cong \text{SU}(kl)/(\text{SU}(k) \otimes \text{SU}(l)) \quad (2.8)$$

(ср. (2.6)). Это легко следует из того, что если k и l взаимно просты, то центр группы $\text{SU}(kl)$ (который является группой ρ_{kl} корней степени kl из 1) является произведением $\rho_k \times \rho_l$ центров подгрупп $\text{SU}(k)$ и $\text{SU}(l)$. В частности, структурная группа тавтологического расслоения $\mathcal{A}_{k,l} \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$ есть $\text{SU}(k)$ (оно ассоциировано с главным расслоением $\text{SU}(k) \rightarrow \text{SU}(kl)/(E_k \otimes \text{SU}(l)) \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$).

Заметим, что пространство $\text{Gr}_{k,l}$ при условии $(k, l) = 1$ имеет следующие гомотопические группы в стабильных ($\sim 2 \min\{k, l\}$) размерностях:

$$\pi_r(\text{Gr}_{k,l}) \cong \mathbb{Z} \quad \text{при } r \geq 4 \text{ четном} \quad \text{и} \quad \pi_r(\text{Gr}_{k,l}) = 0 \quad \text{в противном случае.}$$

Для их вычисления проще всего использовать гомотопическую последовательность расслоения

$$\text{SU}(k) \times \text{SU}(l) \rightarrow \text{SU}(kl) \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$$

при $(k, l) = 1$, где первое отображение – гомоморфизм, задаваемый кронекеровым произведением матриц.

ТЕОРЕМА 3. *Пространство $H_{k,l}(\text{End}(\xi_k^{\text{univ}}))$ гомотопически эквивалентно произведению пространств*

$$H_{k,l}(A_k^{\text{univ}}) \times \mathbb{C}P^\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при применении функтора End к унитарному пространству $\mathbb{C}^k$ его автоморфизм $T \in \text{U}(k)$ определяет внутренний автоморфизм $I(T)$ алгебры эндоморфизмов $\text{End}(\mathbb{C}^k) \cong M_k(\mathbb{C})$, задаваемый сопряжением на T , причем $I(T)$ тождественен тогда и только тогда, когда T – скалярная матрица. То есть сопоставление $T \mapsto I(T)$ действительно определяет эпиморфизм групп $\chi_k: \text{U}(k) \rightarrow \text{PU}(k)$, являющийся факторизацией по центру $\text{U}(1) \subset \text{U}(k)$. В силу

функториальности классифицирующего пространства группы классифицирующее отображение $\mathrm{BU}(k) \rightarrow \mathrm{BPU}(k)$ для расслоения $\mathrm{End}(\xi_k^{\mathrm{univ}}) \rightarrow \mathrm{BU}(k)$ как расслоения со структурной группой $\mathrm{PU}(k)$ есть $\mathrm{B}\chi_k$.

Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_{k,l}(\mathrm{End}(\xi_k^{\mathrm{univ}})) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{B}\chi_k}} & \mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}}) \\ \widehat{p}_{k,l} \downarrow & & \downarrow p_{k,l} \\ \mathrm{BU}(k) & \xrightarrow{\mathrm{B}\chi_k} & \mathrm{BPU}(k) \end{array} \quad (2.9)$$

где $\mathrm{B}\chi_k$ есть $\mathbb{C}P^\infty$ -расслоение, классифицируемое отображением $\mathrm{BPU}(k) \rightarrow \mathrm{K}(\mathbb{Z}, 3)$. Таким образом, $\widetilde{\mathrm{B}\chi_k}$ тоже есть $\mathbb{C}P^\infty$ -расслоение, являющееся обратным образом $\mathrm{B}\chi_k$ относительно $p_{k,l}$. Из приведенного выше описания гомотопических групп пространства $\mathrm{Gr}_{k,l}$ при $(k, l) = 1$ следует, что первой нетривиальной гомотопической группой является $\pi_4(\mathrm{Gr}_{k,l}) \cong \mathbb{Z}$. В частности, $H^3(\mathrm{Gr}_{k,l}, \mathbb{Z}) = 0$, поэтому $\mathbb{C}P^\infty$ -расслоение $\widetilde{\mathrm{B}\chi_k}$ тривиально.

Заметим, что матричный грассманиан $\mathrm{Gr}_{k,l}$ классифицирует классы эквивалентности пар (A_k, μ) над конечными клеточными пространствами X , где $A_k \rightarrow X$ – локально тривиальное $M_k(\mathbb{C})$ -расслоение над X и μ – вложение $A_k \rightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C})$ (см. (1.2)). Две такие пары $(A_k, \mu), (A'_k, \mu')$ эквивалентны, если $A_k \cong A'_k$ и μ гомотопно μ' в классе вложений.

3. Первое препятствие. Дадим обещанное описание препятствий к подъему в расслоении (2.3). Во-первых, рассмотрим первое препятствие. Согласно теории препятствий (и учитывая гомотопические группы (2.2)) это характеристический класс

$$A_k \mapsto \bar{\kappa}_1(A_k) = \bar{f}^*(\bar{\kappa}_1) \in H^2(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}), \quad \text{где} \quad \bar{\kappa}_1 := \bar{\kappa}_1(A_k^{\mathrm{univ}}) \in H^2(\mathrm{BPU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}).$$

ТЕОРЕМА 4. *Первое препятствие $\bar{\kappa}_1(A_k)$ – это препятствие к редукции (или к подъему) структурной группы $\mathrm{PU}(k)$ расслоения (1.1) до $\mathrm{SU}(k)$ (здесь мы подразумеваем точную последовательность групп*

$$1 \rightarrow \rho_k \rightarrow \mathrm{SU}(k) \rightarrow \mathrm{PU}(k) \rightarrow 1,$$

где ρ_k – группа корней k -й степени из 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при условии $(k, l) = 1$ из (2.8) следует, что структурная группа $M_k(\mathbb{C})$ -расслоений $\mathcal{A}_{k,l} \rightarrow \mathrm{Gr}_{k,l}$ и $p_{k,l}^*(A_k^{\mathrm{univ}}) \rightarrow \mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}})$ есть $\mathrm{SU}(k)$. С другой стороны, если структурная группа A_k может быть редуцирована к $\mathrm{SU}(k)$, то $\bar{\kappa}_1(A_k) = 0$, потому что пространство $\mathrm{BSU}(k)$ является 3-связным.

Очевидно, что $\bar{\kappa}_1$ является образующей группы

$$H^2(\mathrm{BPU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}.$$

Теперь предположим, что расслоение A_k имеет вид $\mathrm{End}(\xi_k)$, где $\xi_k \rightarrow X$ – векторное $\mathbb{C}^k$ -расслоение. Заметим, что не каждое $M_k(\mathbb{C})$ -расслоение может быть представлено в таком виде: препятствием к этому является класс

$$\delta(\kappa_1(A_k)) \in \mathrm{Br}(X) := H_{\mathrm{tors}}^3(X, \mathbb{Z}),$$

где $\delta: H^2(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Z})$ – кограничный гомоморфизм, отвечающий коэффициентной последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot k} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

ТЕОРЕМА 5. Для $A_k = \text{End}(\xi_k)$ первое препятствие есть

$$\kappa_1(A_k) := c_1(\xi_k) \bmod k \in H^2(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}),$$

где c_1 – первый класс Чженя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\kappa_1 = (B\chi_k)^*(\bar{\kappa}_1)$. Из (2.9) легко видеть, что первое препятствие для (2.5) совпадает с первым препятствием для расслоения

$$\text{PU}(k) \rightarrow \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \text{BU}(k),$$

полученного продолжением точной последовательности групп $U(1) \rightarrow U(k) \xrightarrow{\chi_k} \text{PU}(k)$ вправо.

Рассмотрим морфизм расслоений

$$\begin{array}{ccccc} & U(k) & \longrightarrow & EU(k) & \\ & \swarrow U(1) & & \swarrow U(1) & \downarrow \\ \text{PU}(k) & \longrightarrow & \mathbb{C}P^\infty & & \text{BU}(k) \\ & \downarrow & & \swarrow = & \\ & \text{BU}(k) & & & \end{array}$$

Согласно определению с помощью теории препятствий, первый класс Чженя $c_1 \in H^2(\text{BU}(k), \mathbb{Z})$ – первое препятствие к построению сечения в универсальном главном $U(k)$ -расслоении на диаграмме выше. В силу функториальности и того, что левая наклонная стрелка индуцирует отображение

$$\pi_1(U(k)) \rightarrow \pi_1(\text{PU}(k)), \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \quad \alpha \mapsto \alpha \bmod k$$

фундаментальных групп, отсюда легко вытекает требуемое утверждение.

Заметим, что так как $(B\chi_k)^*$ индуцирует изоморфизм

$$H^2(\text{BPU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^2(\text{BU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}),$$

то $\bar{\kappa}_1$ однозначно характеризуется тем, что $(B\chi_k)^*(\bar{\kappa}_1) = c_1 \bmod k$.

Тот факт, что структурная группа расслоения $\text{End}(\xi_k)$ может быть редуцирована к $\text{SU}(k)$, если и только если $c_1(\xi_k) \equiv 0 \bmod k$, можно также показать следующим образом. Если $c_1(\xi_k) \equiv 0 \bmod k$, то $c_1(\xi_k) = k\alpha$, $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Существует такое линейное расслоение $\zeta' \rightarrow X$ (единственное с точностью до изоморфизма), что $c_1(\zeta') = -\alpha$. Тогда $c_1(\xi_k \otimes \zeta') = c_1(\xi_k) + kc_1(\zeta') = 0$, т.е. $\xi_k \otimes \zeta'$ является $\text{SU}(k)$ -расслоением. С другой стороны, $\text{End}(\xi_k) = \text{End}(\xi_k \otimes \zeta')$. Обратно, классифицирующее отображение

$$B\chi_k: \text{BU}(k) \rightarrow \text{BPU}(k)$$

для $\text{End}(\xi_k^{\text{univ}})$ как $\text{PU}(k)$ -расслоения имеет слой $\mathbb{C}P^\infty$. Тогда из теории препятствий следует, что $\text{End}(\xi_k) \cong \text{End}(\xi'_k)$ как $M_k(\mathbb{C})$ -расслоения тогда и только тогда, когда $\xi'_k = \xi_k \otimes \zeta'$ для некоторого линейного расслоения $\zeta' \rightarrow X$. Ясно, что $c_1(\xi'_k) \equiv c_1(\xi_k) \pmod k$ и ξ'_k есть $\text{SU}(k)$ -расслоение тогда и только тогда, когда $c_1(\xi'_k) = 0$, что в свою очередь влечет $c_1(\xi_k) \equiv 0 \pmod k$.

Опишем связь между двумя рассмотренными версиями (“PU” и “U”) первых препятствий и группой Брауэра $\text{Br}(X) = H_{\text{tors}}^3(X, \mathbb{Z})$. Рассмотрим точную последовательность коэффициентов

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot k} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

и отрезок соответствующей когомологической последовательности:

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\lambda} H^2(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^3(X, \mathbb{Z}).$$

Тогда $\delta(\kappa_1(A_k)) = 0$ тогда и только тогда, когда A_k имеет вид $\text{End}(\xi_k)$ для некоторого векторного $\text{U}(k)$ -расслоения ξ_k (заметим, что $\delta(\kappa_1(A_k)) \in H^3(X, \mathbb{Z})$ есть в точности класс расслоения A_k в группе Брауэра). Если $\delta(\kappa_1(A_k)) = 0$, то $\kappa_1(A_k) = \lambda(c_1(\xi_k))$, где λ есть редукция по модулю k . Но расслоение ξ_k такое, что $\text{End}(\xi_k) = A_k$, не единственно: $\xi'_k = \xi_k \otimes \zeta'$ также подходит. Ясно, что $c_1(\xi'_k) \equiv c_1(\xi_k) \pmod k$, и $c_1(\xi_k) \equiv 0 \pmod k$ тогда и только тогда, когда $\xi'_k = \xi_k \otimes \zeta'$ есть $\text{SU}(k)$ -расслоение для некоторого линейного расслоения ζ' .

Заметим, что из формулы для первого класса Чжэня тензорного произведения векторных расслоений следует, что для тензорного произведения расслоений

$$\text{End}(\xi_k) \otimes \text{End}(\xi'_m)$$

первое препятствие есть

$$c_1(\xi_k \otimes \xi'_m) \pmod{km} = (mc_1(\xi_k) + kc_1(\xi'_m)) \pmod{km}.$$

4. Второе препятствие. Теперь предположим, что для расслоения $A_k \xrightarrow{p_k} X$ (1.1) первое препятствие равно 0. Выше мы показали, что такое расслоение имеет вид $\text{End}(\tilde{\xi}_k)$ для некоторого векторного $\mathbb{C}^k$ -расслоения $\tilde{\xi}_k$ со структурной группой $\text{SU}(k)$ (заметим, что такое $\tilde{\xi}_k$ единственно с точностью до изоморфизма). Эквивалентно, классифицирующее отображение $\tilde{f}: X \rightarrow \text{BPU}(k)$ (2.4) может быть поднято до $f: X \rightarrow \text{BSU}(k)$. Из стандартных фактов топологической теории препятствий и описанных выше (см. (2.2)) стабильных гомотопических групп пространства $\text{Fr}_{k,l}$ следует, что следующее препятствие лежит в $H^4(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$.

ТЕОРЕМА 6. Второе препятствие есть

$$\kappa_2(A_k) := c_2(\tilde{\xi}_k) \pmod k,$$

где c_2 – второй класс Чжэня.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что пространство $\text{Fr}_{k,l}$ имеет универсальную накрывающую

$$\rho_k \rightarrow \tilde{\text{Fr}}_{k,l} \rightarrow \text{Fr}_{k,l}. \quad (4.1)$$

Поэтому $\pi_r(\tilde{\text{Fr}}_{k,l}) = \pi_r(\text{Fr}_{k,l})$ для $r \geq 2$ и $\pi_1(\tilde{\text{Fr}}_{k,l}) = 0$ (в то время как $\pi_1(\text{Fr}_{k,l}) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$). Очевидно, $\tilde{\text{Fr}}_{k,l} \cong \text{SU}(kl)/(E_k \otimes \text{SU}(l))$ (ср. (2.1)).

Теперь рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Fr}_{k,l} & \longrightarrow & \text{EPU}(k) \times_{\text{PU}(k)} \text{Fr}_{k,l} \\
 & \nearrow & & \nearrow \simeq & \downarrow p_{k,l} \\
 \tilde{\text{Fr}}_{k,l} & \longrightarrow & \text{ESU}(k) \times_{\text{SU}(k)} \tilde{\text{Fr}}_{k,l} & & \text{BPU}(k) \\
 & & \downarrow \tilde{p}_{k,l} & \nearrow & \\
 & & \text{BSU}(k) & &
 \end{array} \quad (4.2)$$

где $p_{k,l}$ – расслоение (2.3). (Действительно, оно ассоциировано с универсальным главным $\text{PU}(k)$ -расслоением относительно естественного действия группы $\text{PU}(k) = \text{Aut}(M_k(\mathbb{C}))$ на пространстве $\text{Fr}_{k,l} = \text{Hom}_{\text{alg}}(M_k(\mathbb{C}), M_{kl}(\mathbb{C}))$). Заметим, что гомотопическую эквивалентность

$$\tilde{\tau}_{k,l}: \text{ESU}(k) \times_{\text{SU}(k)} \tilde{\text{Fr}}_{k,l} \simeq \text{Gr}_{k,l}$$

(ср. (2.7)) легко получить из представления (2.8). Из того, что $\pi_3(\tilde{\text{Fr}}_{k,l}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, следует, что “универсальное” препятствие есть некоторый характеристический класс $\kappa_2 \in H^4(\text{BSU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$.

Пусть $\tilde{\xi}_k^{\text{univ}} \rightarrow \text{BSU}(k)$ – универсальное $\text{SU}(k)$ -расслоение. Так как $c_2(\tilde{\xi}_k^{\text{univ}}) \bmod k$ – образующая в $H^4(\text{BSU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, то

$$\kappa_2 = \alpha c_2(\tilde{\xi}_k^{\text{univ}}) \bmod k \in H^4(\text{BSU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}), \quad \alpha \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \text{ESU}(k) \times_{\text{SU}(k)} \tilde{\text{Fr}}_{k,l} & \xrightarrow{\tilde{\tau}_{k,l}} & \text{Gr}_{k,l} \\
 \downarrow \tilde{p}_{k,l} & \swarrow \lambda_{k,l} & \\
 \text{BSU}(k) & &
 \end{array}$$

где $\lambda_{k,l}$ – классифицирующее отображение для $\mathcal{A}_{k,l} \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$ как $\text{SU}(k)$ -расслоения. Таким образом, кусок гомотопической последовательности для “SU”-части (4.2)

$$\pi_4(\tilde{\text{Fr}}_{k,l}) \rightarrow \pi_4(\text{ESU}(k) \times_{\text{SU}(k)} \tilde{\text{Fr}}_{k,l}) \rightarrow \pi_4(\text{BSU}(k)) \rightarrow \pi_3(\tilde{\text{Fr}}_{k,l}) \rightarrow \pi_3(\text{ESU}(k) \times_{\text{SU}(k)} \tilde{\text{Fr}}_{k,l})$$

есть

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

следовательно, образ

$$\pi_4(\text{ESU}(k) \times_{\text{SU}(k)} \tilde{\text{Fr}}_{k,l}) \hookrightarrow \pi_4(\text{BSU}(k))$$

– подгруппа индекса k в $\pi_4(\text{BSU}(k)) \cong \mathbb{Z}$.

Возьмем $X = S^4$ и рассмотрим гомоморфизм групп

$$\pi_4(\mathrm{BSU}(k)) \rightarrow H^4(S^4, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}), \quad [g] \mapsto g^* \kappa_2,$$

где $g: S^4 \rightarrow \mathrm{BSU}(k)$ и $[g] \in \pi_4(\mathrm{BSU}(k))$ – соответствующие гомотопические классы. Если $k \nmid [g]$ в $\pi_4(\mathrm{BSU}(k)) \cong \mathbb{Z}$, то $g^* \kappa_2 \neq 0$, потому что $g^* \kappa_2$ – единственное препятствие к вложению в этом случае. Следовательно, α в (4.3) обратимо по модулю k .

Для того, чтобы доказать, что $\alpha = 1$, рассмотрим морфизм расслоений

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{SU}(k) & \longrightarrow & \mathrm{ESU}(k) & \\ & \swarrow & & \downarrow & \\ \tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l} & \longrightarrow & \mathrm{ESU}(k) \times_{\mathrm{SU}(k)} \tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l} & \longrightarrow & \mathrm{BSU}(k) \\ & & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathrm{BSU}(k) & & \end{array}$$

Класс c_2 является первым препятствием к построению сечения в универсальном $\mathrm{SU}(k)$ -расслоении. В силу функториальности первого препятствия и того, что отображение $\mathrm{SU}(k) \rightarrow \tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l}$ индуцирует гомоморфизм $\pi_3(\mathrm{SU}(k)) \rightarrow \pi_3(\tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l})$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, $\beta \mapsto \beta \bmod k$ третьих гомотопических групп, следует, что $\kappa_2 = c_2 \bmod k$, что и требовалось доказать.

Заметим, что препятствия являются стабильными в том смысле, что они не обращаются в нуль при переходе к прямому пределу над парами $\{k, l\}$, удовлетворяющими условию $(k, l) = 1$, как было объяснено в начале работы. Кроме того, они “хорошо себя ведут” относительно тензорного произведения расслоений: для $\mathrm{End}(\tilde{\xi}_k) \otimes \mathrm{End}(\tilde{\xi}'_m)$ второе препятствие есть

$$c_2(\tilde{\xi}_k \otimes \tilde{\xi}'_m) \bmod km = (mc_2(\tilde{\xi}_k) + kc_2(\tilde{\xi}'_m)) \bmod km.$$

5. Высшие препятствия. В данном пункте мы будем определять препятствия к существованию вложения (1.2) расслоения вида $A_k = \mathrm{End}(\xi_k) \rightarrow X$ по индукции с помощью башни Постникова. При этом в размерностях 2 и 4 мы получим описанные выше препятствия.

Согласно теории препятствий, первое препятствие κ_1 к построению сечения в расслоении (2.5) лежит в

$$H^2(\mathrm{BU}(k), \pi_1(\mathrm{Fr}_{k,l})) = H^2(\mathrm{BU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}).$$

Класс когомологий κ_1 определяет отображение $\mathrm{BU}(k) \rightarrow K(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 2)$ (единственное с точностью до гомотопии), которое мы обозначим тем же символом κ_1 . Пусть $F(\kappa_1)$ – слой отображения κ_1 .

Имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{Fr}_{k,l} & \xleftarrow{\quad} & \mathrm{Fr}_{k,l}^{[1]} \\
 & & \downarrow & \swarrow & \\
 & & \mathrm{H}_{k,l}(\mathrm{End}(\xi_k^{\mathrm{univ}})) & & \\
 & \swarrow p_{k,l}^{[1]} & \downarrow \widehat{p}_{k,l} & & \\
 \mathrm{F}(\kappa_1) & \xrightarrow{i_1} & \mathrm{BU}(k) & \xrightarrow{\kappa_1} & \mathrm{K}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 2)
 \end{array} \quad (5.1)$$

в которой вертикальные стрелки составляют расслоение (2.5). Существование $p_{k,l}^{[1]}$ следует из универсального свойства слоя (примененного к горизонтальному расслоению) с использованием того, что композиция $\kappa_1 \circ \widehat{p}_{k,l}$ гомотопически тривиальна, а $\mathrm{Fr}_{k,l}^{[1]}$ – слой отображения $p_{k,l}^{[1]}$.

ТЕОРЕМА 7. *Слой $\mathrm{F}(\kappa_1)$ гомотопически эквивалентен $\mathbb{C}P^\infty \times \mathrm{BSU}(k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{C}P^\infty \times \mathrm{BSU}(k) & & & & \\
 \alpha \downarrow & \searrow \lambda & & & \\
 \mathrm{F}(\kappa_1) & \xrightarrow{i_1} & \mathrm{BU}(k) & \xrightarrow{\kappa_1} & \mathrm{K}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 2)
 \end{array}$$

в которой λ определено как классифицирующее отображение для $\zeta^{\mathrm{univ}} \otimes \widetilde{\xi}_k^{\mathrm{univ}}$, где $\widetilde{\xi}_k^{\mathrm{univ}} \rightarrow \mathrm{BSU}(k)$ – универсальное векторное $\mathbb{C}^k$ -расслоение со структурной группой $\mathrm{SU}(k)$, а $\zeta^{\mathrm{univ}} \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ – универсальное линейное расслоение. Отображение α определено в силу универсального свойства слоя, так как композиция $\kappa_1 \circ \lambda$ гомотопически тривиальна. Последнее следует из того, что, как было показано выше, $\kappa_1 = c_1 \bmod k$, но

$$c_1(\zeta^{\mathrm{univ}} \otimes \widetilde{\xi}_k^{\mathrm{univ}}) = kc_1(\zeta^{\mathrm{univ}}) \equiv 0 \bmod k.$$

Или также из изоморфизма

$$\mathrm{End}(\zeta^{\mathrm{univ}} \otimes \widetilde{\xi}_k^{\mathrm{univ}}) \cong \mathrm{End}(\widetilde{\xi}_k^{\mathrm{univ}}),$$

так как для последнего расслоения первое препятствие, как мы видели выше, равно нулю.

Теперь простое вычисление с гомотопическими группами показывает, что α на самом деле является гомотопической эквивалентностью. Действительно, гомоморфизм

$$(\kappa_1)_* : \pi_2(\mathrm{BU}(k)) (\cong \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_2(\mathrm{K}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 2)) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$$

сюръективен, и из гомотопической последовательности горизонтального расслоения выше получаем, что $\pi_2(\mathrm{F}(\kappa_1)) \cong \mathbb{Z}$ и что гомоморфизм $(i_1)_* : \pi_2(\mathrm{F}(\kappa_1)) \rightarrow \pi_2(\mathrm{BU}(k))$ есть $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $1 \mapsto k$. С другой стороны, $\lambda_* : \pi_2(\mathbb{C}P^\infty \times \mathrm{BSU}(k)) \rightarrow \pi_2(\mathrm{BU}(k))$ тоже есть гомоморфизм $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $1 \mapsto k$. Тогда из коммутативности треугольника в диаграмме выше получаем, что α индуцирует изоморфизм вторых гомотопических групп. На группах π_k , $k > 2$ отображения i_1 и λ индуцируют изоморфизмы, а значит, то же верно для α .

Заметим, что если бы мы взяли $\bar{\kappa}_1: \text{BPU}(k) \rightarrow K(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 2)$ вместо κ_1 , то получили бы слой $F(\bar{\kappa}_1) \simeq \text{BSU}(k)$. Ясно, что первый множитель $\mathbb{C}P^\infty$ в $F(\kappa_1)$ не влияет на последующие препятствия, поэтому мы будем рассматривать только второй множитель $\text{BSU}(k)$ в $F(\kappa_1)$ в последующих построениях (и заменим $H_{k,l}(\text{End}(\xi_k^{\text{univ}}))$ на $H_{k,l}(A_k^{\text{univ}})$ в диаграммах, аналогичных (5.1), ср. теорему 3).

Теперь предположим, что для расслоения $A_k \xrightarrow{p_k} X$ первое препятствие $\kappa_1(A_k)$ равно 0. С учетом только что сделанного замечания мы можем предположить, что такое расслоение имеет вид $\text{End}(\tilde{\xi}_k)$ для некоторого векторного $\mathbb{C}^k$ -расслоения $\tilde{\xi}_k$ со структурной группой $\text{SU}(k)$ (причем его класс изоморфизма определен однозначно). Эквивалентно, мы рассматриваем поднятие классифицирующего отображения $f: X \rightarrow \text{BU}(k)$ до отображения $\tilde{f}: X \rightarrow \text{BSU}(k)$. Из топологической теории препятствий и приведенных выше гомотопических групп пространства $\text{Fr}_{k,l}$ в стабильных размерностях (см. (2.2)) следует, что следующее препятствие κ_2 лежит в $H^4(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$. Диаграмма для определения κ_2 имеет вид

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Fr}_{k,l}^{[1]} & \longleftarrow & \text{Fr}_{k,l}^{[2]} \\
 & & \downarrow & \swarrow & \\
 & & H_{k,l}(A_k^{\text{univ}}) & & \\
 & \swarrow p_{k,l}^{[2]} & \downarrow p_{k,l}^{[1]} & & \\
 F(\kappa_2) & \longrightarrow & \text{BSU}(k) & \xrightarrow{\kappa_2} & K(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 4)
 \end{array} \tag{5.2}$$

(напомним, что мы взяли $F(\bar{\kappa}_1) = \text{BSU}(k)$ вместо $F(\kappa_1)$, отбросив множитель $\mathbb{C}P^\infty$), где $\kappa_2: \text{BSU}(k) \rightarrow K(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 4)$ – отображение, представляющее κ_2 , а $F(\kappa_2)$ – его гомотопический слой. Отображение $p_{k,l}^{[2]}$ существует потому, что $\kappa_2 \circ p_{k,l}^{[1]} \simeq *$ и $\text{Fr}_{k,l}^{[2]}$ – гомотопический слой $p_{k,l}^{[2]}$. Заметим также, что $\text{Fr}_{k,l}^{[1]} = \tilde{\text{Fr}}_{k,l}$ – универсальная накрывающая для $\text{Fr}_{k,l}$.

Как мы уже знаем из предыдущего, второе препятствие κ_2 есть $c_2(\tilde{\xi}_k) \bmod k$, где c_2 – второй класс Чженя (хотя это можно доказать, пользуясь диаграммой (5.2)).

Ясно, что гомоморфизм

$$(\kappa_2)_*: \pi_4(\text{BSU}(k))(\cong \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_4(K(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 4)) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$$

сюрьективен, и из гомотопической последовательности расслоения

$$F(\kappa_2) \rightarrow \text{BSU}(k) \xrightarrow{\kappa_2} K(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 4) \tag{5.3}$$

получаем, что $\pi_4(F(\kappa_2)) \cong \mathbb{Z}$ и гомоморфизм $\pi_4(F(\kappa_2)) \rightarrow \pi_4(\text{BSU}(k))$ есть $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $1 \mapsto k$. Также ясно, что вложение слоя $F(\kappa_2) \rightarrow \text{BSU}(k)$ индуцирует изоморфизмы

$$\pi_r(F(\kappa_2)) \cong \pi_r(\text{BSU}(k)) \quad \text{для } r \neq 4.$$

Вернемся к диаграмме (5.2). Рассмотрим следующий отрезок морфизма гомотопических последовательностей входящих в нее расслоений:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_5(F(\kappa_2)) & \longrightarrow & \pi_4(\mathrm{Fr}_{k,l}^{[2]}) & \longrightarrow & \pi_4(\mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}})) & \longrightarrow & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\
 \pi_5(\mathrm{BSU}(k)) & \longrightarrow & \pi_4(\mathrm{Fr}_{k,l}^{[1]}) & \longrightarrow & \pi_4(\mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}})) & \longrightarrow & \\
 & & & & & & \\
 & & \longrightarrow & \pi_4(F(\kappa_2)) & \longrightarrow & \pi_3(\mathrm{Fr}_{k,l}^{[2]}) & \longrightarrow \pi_3(\mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}})) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\
 & & \longrightarrow & \pi_4(\mathrm{BSU}(k)) & \longrightarrow & \pi_3(\mathrm{Fr}_{k,l}^{[1]}) & \longrightarrow \pi_3(\mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}}))
 \end{array}$$

т.е.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \pi_4(\mathrm{Fr}_{k,l}^{[2]}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_3(\mathrm{Fr}_{k,l}^{[2]}) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow \cdot k & & \downarrow & & \downarrow = \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot k} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

откуда следует, что

$$\pi_3(\mathrm{Fr}_{k,l}^{[2]}) = 0 = \pi_4(\mathrm{Fr}_{k,l}^{[2]}), \quad p_{k,l*}^{[2]} : \pi_4(\mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}})) \xrightarrow{\cong} \pi_4(F(\kappa_2)).$$

Легко видеть, что отображение $\mathrm{Fr}_{k,l}^{[2]} \rightarrow \mathrm{Fr}_{k,l}^{[1]}$ (см. (5.2)) индуцирует изоморфизмы $\pi_r(\mathrm{Fr}_{k,l}^{[2]}) \cong \pi_r(\tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l})$ для $r \neq 3$. В частности, $\pi_{2r+1}(\mathrm{Fr}_{k,l}^{[2]}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ для $r \geq 2$ и 0 в противном случае.

Теперь предположим, что для $\mathrm{SU}(k)$ -расслоения $\xi_k \rightarrow X$ второе препятствие $\kappa_2(\xi_k) = 0$. Пусть мы выбрали подъем $f_\xi^{[2]} : X \rightarrow F(\kappa_2)$ его классифицирующего отображения $f_\xi : X \rightarrow \mathrm{BSU}(k)$. Согласно теории препятствий этот подъем, вообще говоря, не единствен, точнее, множество гомотопических классов подъемов биективно множеству $H^3(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ (поскольку слой отображения $F(\kappa_2) \rightarrow \mathrm{BSU}(k)$ есть $K(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 3)$, см. диаграмму (5.2)). Следующее препятствие – характеристический класс

$$\kappa_3 \in H^6(F(\kappa_2), \pi_5(\mathrm{Fr}_{k,l}^{[2]})) = H^6(F(\kappa_2), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}).$$

Рассмотрим следующее расслоение (ср. (5.3)):

$$F(\kappa_3) \rightarrow F(\kappa_2) \xrightarrow{\kappa_3} K(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 6)$$

и соответствующую диаграмму (ср. (5.2)):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{Fr}_{k,l}^{[2]} & \longleftarrow & \mathrm{Fr}_{k,l}^{[3]} \\
 & & \downarrow & \swarrow & \\
 & & \mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}}) & & \\
 \swarrow p_{k,l}^{[3]} & & \downarrow p_{k,l}^{[2]} & & \\
 F(\kappa_3) & \longrightarrow & F(\kappa_2) & \xrightarrow{\kappa_3} & K(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 6)
 \end{array}$$

Мы утверждаем, что гомоморфизм

$$(\kappa_3)_* : \pi_6(F(\kappa_2))(\cong \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_6(K(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 6))(\cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$$

сюръективен. Действительно, возьмем $\varphi : S^6 \rightarrow F(\kappa_2)$ такое, что $k \nmid [\varphi]$ в $\pi_6(F(\kappa_2)) \cong \mathbb{Z}$, следовательно, φ не может быть поднято до $\tilde{\varphi} : S^6 \rightarrow H_{k,l}(A_k^{\text{univ}})$ (потому что $p_{k,l}^{[2]} : \pi_6(H_{k,l}(A_k^{\text{univ}})) \rightarrow \pi_6(F(\kappa_2))$ есть гомоморфизм $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $1 \mapsto k$), следовательно, $\varphi^*(\kappa_3) \neq 0 \in H^6(S^6, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ (так как в этом случае это единственное препятствие). В частности, κ_3 – элемент порядка k в группе $H^6(F(\kappa_2), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$.

Отсюда следует, что вложение гомотопического слоя $F(\kappa_3) \rightarrow F(\kappa_2)$ индуцирует гомоморфизм

$$\pi_6(F(\kappa_3)) \rightarrow \pi_6(F(\kappa_2)), \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad 1 \mapsto k,$$

в размерности 6 и изоморфизмы $\pi_r(F(\kappa_3)) \xrightarrow{\cong} \pi_r(F(\kappa_2))$ в других размерностях $r \neq 6$. Легко показать, что $\pi_{2r+1}(\text{Fr}_{k,l}^{[3]}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ для $r \geq 3$ и 0 в противном случае. В частности, $p_{k,l}^{[3]}$ индуцирует гомотопическую эквивалентность между $H_{k,l}(A_k^{\text{univ}})$ и $F(\kappa_3)$ до размерности 7.

Продолжая действовать описанным образом, по индукции можно определить характеристические классы

$$\kappa_4 \in H^8(F(\kappa_3), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}), \quad \kappa_5 \in H^{10}(F(\kappa_4), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \quad \text{и т.д.,}$$

каждый из которых определен на ядре предшествующего. Заметим, что

$$p_{k,l}^{[i]} : \pi_r(H_{k,l}(A_k^{\text{univ}})) \rightarrow \pi_r(F(\kappa_i))$$

– изоморфизм для $r \leq 2i + 1$.

Полученные результаты можно суммировать следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\xi_k \rightarrow X$ – $\text{SU}(k)$ -расслоение с классифицирующим отображением $f_\xi : X \rightarrow \text{BSU}(k)$, $\dim X < 2 \min\{k, l\}$. Подъем $\hat{f}_\xi : X \rightarrow H_{k,l}(A_k^{\text{univ}})$ классифицирующего отображения f_ξ можно строить по индукции как последовательность отображений $f_\xi^{[i-1]}$, $2 \leq i \leq (\dim X)/2$, делающих диаграмму ($i \geq 2$)

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_{k,l}(A_k^{\text{univ}}) & & & & \\ & \nearrow p_{k,l}^{[i+1]} & \downarrow p_{k,l}^{[i]} & \nwarrow p_{k,l}^{[i-1]} & & & \\ \cdots & \longrightarrow F(\kappa_{i+1}) & \xrightarrow{K(\mathbb{Z}_k, 2i+1)} & F(\kappa_i) & \xrightarrow{K(\mathbb{Z}_k, 2i-1)} & F(\kappa_{i-1}) & \longrightarrow \cdots \\ & \nwarrow f_\xi^{[i+1]} & \uparrow f_\xi^{[i]} & \nearrow f_\xi^{[i-1]} & & & \\ & & X & & & & \end{array} \quad (5.4)$$

коммутативной ($F(\kappa_1) := \text{BSU}(k)$, $p_{k,l}^{[1]} = \tilde{p}_{k,l}$, $f_\xi^{[1]} = f_\xi$). Причем продолжение $f_\xi^{[i]}$ для $f_\xi^{[i-1]}$ существует, если $(f_\xi^{[i-1]})^*(\kappa_i) = 0$, где $\kappa_i \in H^{2i}(F(\kappa_{i-1}), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ – определенные выше характеристические классы.

Заметим, что приведенную выше диаграмму можно было бы продолжить на один шаг вправо, включив случай $U(k)$ -расслоений, положив $F(\kappa_0) := BU(k)$, $\kappa_1 := c_1 \bmod k$; тогда нужно взять в качестве $F(\kappa_1)$ гомотопический слой отображения $BU(k) \xrightarrow{\kappa_1} K(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 2)$, который, напомним, есть $BSU(k) \times \mathbb{C}P^\infty$, и, кроме того, каждое $F(\kappa_i)$ заменить на $F(\kappa_i) \times \mathbb{C}P^\infty$.

Заметим, что на каждом шаге выбор подъема, вообще говоря, неоднозначен. Кроме того, препятствия функториальны и приведенная конструкция “хорошо себя ведет” относительно тензорного произведения расслоений, определяющих диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_{k,l}(A_k^{\text{univ}}) \times H_{m,n}(A_m^{\text{univ}}) & \longrightarrow & H_{km,ln}(A_{km}^{\text{univ}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BPU(k) \times BPU(m) & \longrightarrow & BPU(km) \end{array}$$

В частности, вложение $BPU(k^m) \rightarrow BPU(k^{m+1})$ (индуцированное тензорным произведением на тривиальное $M_k(\mathbb{C})$ -расслоение) индуцирует вложение препятствий в соответствующих размерностях, отвечающих вложению групп коэффициентов

$$\mathbb{Z}/k^m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k^{m+1}\mathbb{Z}.$$

6. Определение высших препятствий в общем случае. В общем случае “высшие” препятствия (в стабильных размерностях) лежат в $H^{2r}(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, $r \in \mathbb{N}$. Но для $r > 2$ они уже не совпадают с приведенными по модулю k классами Чженя. Чтобы это показать, возьмем $X = S^8$ и рассмотрим 6-мерное комплексное векторное расслоение $\xi_6 \rightarrow S^8$. Хорошо известно [3; гл. V, § 3], что для S^{2r} классы Чженя комплексных векторных расслоений образуют подгруппу индекса $(r-1)!$ в $H^{2r}(S^{2r}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. В частности, в нашем случае $r = 4$, $k = 6$ мы имеем $c_4(\xi_6) \equiv 0 \pmod{6}$, но из гомотопической последовательности расслоения (2.3) (или (4.2)) следует, что не каждое такое расслоение имеет подъем.

Для того чтобы продвинуться дальше, можно использовать модификацию классов Чженя для связных накрытий пространства BU . Точнее, пусть $\iota_r: BU\langle 2r \rangle \rightarrow BU$ – связное накрытие BU с первой нетривиальной гомотопической группой в размерности $2r$ (таким образом, $BU\langle 2 \rangle = BU$, $BU\langle 4 \rangle = BSU, \dots$). Тогда образ r -го класса Чженя относительно взятия обратного образа $\iota_r^*: H^*(BU, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(BU\langle 2r \rangle, \mathbb{Z})$ делится на $(r-1)!$ [4]. Пусть $\tilde{c}_r := \iota_r^*(c_r)/(r-1)!$.

Следующая теорема обобщает теоремы 5 и 6.

ТЕОРЕМА 9. *Для расслоений, классифицируемых пространством $BU\langle 2r \rangle$, первое препятствие для сформулированной выше задачи есть $\tilde{c}_r \bmod k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для связного накрытия

$$\iota_{r,k}: BU(k)\langle 2r \rangle \rightarrow BU(k), \quad k > r,$$

рассмотрим $\text{Fr}_{k,l}$ -расслоение

$$\iota_{r,k}^*(H_{k,l}(\text{End}(\xi_k^{\text{univ}}))) \rightarrow BU(k)\langle 2r \rangle, \quad (6.1)$$

индуцированное из (2.5). Ясно, что первое препятствие к подъему в этом расслоении есть характеристический класс

$$\omega_r \in H^{2r}(BU(k)\langle 2r \rangle, \pi_{2r-1}(\text{Fr}_{k,l})) = H^{2r}(BU(k)\langle 2r \rangle, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}.$$

Из гомотопической последовательности расслоения (6.1) следует, что

$$\pi_{2r}(\iota_{r,k}^*(H_{k,l}(\text{End}(\xi_k^{\text{univ}})))) \cong \mathbb{Z},$$

гомоморфизм

$$\pi_{2r}(\iota_{r,k}^*(H_{k,l}(\text{End}(\xi_k^{\text{univ}})))) \rightarrow \pi_{2r}(\text{BU}(k)\langle 2r \rangle)$$

инъективен и его образ есть подгруппа индекса k в $\pi_{2r}(\text{BU}(k)\langle 2r \rangle) \cong \mathbb{Z}$.

Используя теперь рассуждение со сферой S^{2r} , аналогичное использованному в доказательстве теоремы 6 в случае $r = 2$, мы видим, что для расслоения $\xi_k \rightarrow S^{2r}$, отвечающего образующей $1 \in \pi_{2r}(\text{BU}(k)) \cong \mathbb{Z}$, класс ω_r есть образующая в $H^{2r}(S^{2r}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, т.е. $\omega_r = \alpha \tilde{c}_r \bmod k$, где α обратимо $\bmod k$.

Для доказательства того, что $\alpha = 1$, можно использовать рассуждение, аналогичное окончанию доказательств теорем 5 и 6. Более подробно, из теоремы Гуревича и формулы универсальных коэффициентов следует, что $H^{2r}(\text{BU}(k)\langle 2r \rangle, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Кроме того, так как $\tilde{c}_r(\xi_k)$ – образующая в $H^{2r}(S^{2r}, \mathbb{Z})$ для некоторого векторного расслоения $\xi_k \rightarrow S^{2r}$, то $\tilde{c}_r \in H^{2r}(\text{BU}(k)\langle 2r \rangle, \mathbb{Z})$ – образующая.

Пусть

$$\iota_{r,k}^*(\text{EU}(k)) \rightarrow \text{BU}(k)\langle 2r \rangle \quad (6.2)$$

– $\text{U}(k)$ -расслоение, индуцированное из универсального $\text{U}(k)$ -расслоения $\text{EU}(k) \rightarrow \text{BU}(k)$ с помощью отображения $\iota_{r,k}$. Пусть $h: S^{2r} \rightarrow \text{BU}(k)\langle 2r \rangle$ – образующая в $H_{2r}(\text{BU}(k)\langle 2r \rangle, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Из того, что гомоморфизм $\pi_{2r}(\text{BU}(k)\langle 2r \rangle) \rightarrow \pi_{2r-1}(\text{U}(k))$ в гомотопической последовательности расслоения (6.2) – изоморфизм, легко следует, что первое препятствие к подъему в расслоении (6.2) – образующая в

$$H^{2r}(\text{BU}(k)\langle 2r \rangle, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_{2r}(\text{BU}(k)\langle 2r \rangle, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

(т.е. это фундаментальный класс $\text{id}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$), а, следовательно, это есть $\tilde{c}_r$.

Доказательство завершает рассуждение, аналогичное использованному в конце доказательства теоремы 6, с учетом того, что отображение $\text{SU}(k) \rightarrow \tilde{\text{Fr}}_{k,l}$ индуцирует сюръективный гомоморфизм гомотопических групп (в стабильных размерностях):

$$\pi_{2r-1}(\text{SU}(k)) \rightarrow \pi_{2r-1}(\tilde{\text{Fr}}_{k,l}), \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \quad \forall r \geq 2.$$

Полученный результат можно переформулировать также следующим образом. Пусть $\xi_k \rightarrow X$ – векторное $\mathbb{C}^k$ -расслоение такое, что $c_1(\xi_k) = 0$, $c_2(\xi_k) = 0$. Тогда его классифицирующее отображение $f_\xi: X \rightarrow \text{BSU}(k)$ может быть поднято в $\text{BU}(k)\langle 6 \rangle$:

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \longrightarrow & \text{BU}(k)\langle 8 \rangle & \xrightarrow{\text{K}(\mathbb{Z}, 5)} & \text{BU}(k)\langle 6 \rangle & \xrightarrow{\text{K}(\mathbb{Z}, 3)} & \text{BU}(k)\langle 4 \rangle = \text{BSU}(k) \\ & & \nwarrow f_\xi^{(4)} & & \uparrow f_\xi^{(3)} & & \nearrow f_\xi \\ & & & & X & & \end{array}$$

(верхняя строка в этой диаграмме есть башня Уайтхеда для $\text{BSU}(k)$). В действительности, пространство $\text{BU}(k)\langle 6 \rangle$ представляет некоторую “более тонкую” (поскольку выбор подъема $f_\xi^{(3)}$ неоднозначен) теорию расслоений с $c_2 = 0$, и мы можем рассматривать подъем $f_\xi^{(3)}$ как классифицирующее отображение для некоторого расслоения $\xi_k^{(3)}$ этого типа. Таким образом, мы имеем характеристический класс

$$\tilde{c}_3(\xi_k^{(3)}) := f_\xi^{(3)*}(\tilde{c}_3) \in H^6(X, \mathbb{Z}).$$

Если $\tilde{c}_3(\xi_k^{(3)}) = 0$, то мы выбираем подъем $f_\xi^{(4)}$ (см. диаграмму выше), соответствующий некоторому расслоению $\xi_k^{(4)}$ (еще более “тонкого” типа расслоений, у которых $\tilde{c}_2 = 0$, $\tilde{c}_3 = 0$) с характеристическим классом $\tilde{c}_4(\xi_k^{(4)}) \in H^8(X, \mathbb{Z})$, и так далее. Предположим, что начиная с расслоения $\xi_k \rightarrow X$, мы получаем последовательность расслоений $\xi_k^{(i)}$, $i \leq r$, $\tilde{c}_i(\xi_k^{(i)}) = 0$ для $i < r$. Тогда первое препятствие для вложения

$$\mu: \text{End}(\xi_k^{(r)}) \hookrightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C}), \quad (k, l) = 1,$$

есть $\tilde{c}_r(\xi_k^{(r)}) \bmod k$.

Чтобы установить связь между двумя изложенными подходами к определению препятствий, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \text{BU}(k)\langle 6 \rangle & & & & \\ \lambda_3 \downarrow & \searrow & & & \\ \text{F}(\kappa_2) & \longrightarrow & \text{BSU}(k) & \xrightarrow{\kappa_2} & \text{K}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 4) \\ & & \searrow c_2 & & \uparrow \\ & & & & \text{K}(\mathbb{Z}, 4) \end{array}$$

с коммутативным правым нижним треугольником, причем отображение λ_3 определено из универсального свойства слоя (а правое вертикальное отображение

$$\text{K}(\mathbb{Z}, 4) \rightarrow \text{K}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 4)$$

индуцировано сюръективным гомоморфизмом $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$). В силу функториальности первого препятствия имеем

$$\lambda_3^*(\kappa_3) = \tilde{c}_3 \bmod k. \quad (6.3)$$

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \text{BU}(k)\langle 8 \rangle & \longrightarrow & \text{BU}(k)\langle 6 \rangle & \xrightarrow{\tilde{c}_3} & \text{K}(\mathbb{Z}, 6) \\ \lambda_4 \downarrow & & \lambda_3 \downarrow & & \downarrow \\ \text{F}(\kappa_3) & \longrightarrow & \text{F}(\kappa_2) & \xrightarrow{\kappa_3} & \text{K}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 6) \end{array}$$

в которой правый квадрат коммутативен в силу (6.3) (заметим, что правое вертикальное отображение индуцировано сюръективным гомоморфизмом $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$). Снова используя функториальность первого препятствия, имеем $\lambda_4^*(\kappa_4) = \tilde{c}_4 \bmod k$. Продолжая эти рассуждения по индукции, получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\text{K}(\mathbb{Z}, 7)} & \text{BU}(k)\langle 8 \rangle & \xrightarrow{\text{K}(\mathbb{Z}, 5)} & \text{BU}(k)\langle 6 \rangle & \xrightarrow{\text{K}(\mathbb{Z}, 3)} & \text{BU}(k)\langle 4 \rangle = \text{BSU}(k) \\ & & \lambda_4 \downarrow & & \lambda_3 \downarrow & & \downarrow = \\ \dots & \xrightarrow{\text{K}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 7)} & \text{F}(\kappa_3) & \xrightarrow{\text{K}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 5)} & \text{F}(\kappa_2) & \xrightarrow{\text{K}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 3)} & \text{F}(\kappa_1) = \text{BSU}(k) \end{array}$$

в которой над отображениями указаны их слои.

Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 10. *Для любого $r \geq 2$ имеем $\lambda_r^*(\kappa_r) = \tilde{c}_r \bmod k$, где $\lambda_r: \mathrm{BU}(k)\langle 2r \rangle \rightarrow \mathrm{F}(\kappa_{r-1})$ – определенные выше отображения (заметим, что $\lambda_2 = \mathrm{id}: \mathrm{BSU}(k) \rightarrow \mathrm{BSU}(k)$ в соответствии с тем, что $\kappa_2 = c_2 \bmod k$).*

Заметим, что данная теорема обобщает связь между препятствиями κ_1, κ_2 и соответствующими классами Чженя c_1, c_2 (см. теоремы 5 и 6). (Точнее, приведенная теорема показывает, что нужно рассматривать классы Чженя $\tilde{c}_r$ связных накрытий BU .) Это легко видеть из диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{BU}(k)\langle 4 \rangle = \mathrm{BSU}(k) & \longrightarrow & \mathrm{BU}(k)\langle 2 \rangle = \mathrm{BU}(k) & \xrightarrow{c_1} & \mathrm{K}(\mathbb{Z}, 2) \\
 \lambda_2 \downarrow & & \lambda_1 \downarrow = & & \downarrow \\
 \mathrm{F}(\kappa_1) = \mathbb{C}P^\infty \times \mathrm{BSU}(k) & \longrightarrow & \mathrm{BU}(k) & \xrightarrow{\kappa_1} & \mathrm{K}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, 2)
 \end{array}$$

Автор выражает глубокую благодарность профессорам А. С. Мищенко, Е. В. Троичкому и Т. Шикю за очень полезные обсуждения затрагиваемых в работе вопросов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Ершов, “Гомотопическая теория расслоений со слоем матричная алгебра”, *Топология, анализ и смежные вопросы*, Современная математика и ее приложения, **1**, Ин-т кибернет. АН Грузии, Тбилиси, 2003, 33–55.
- [2] Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры*, Мир, М., 1986.
- [3] М. Каруби, *K-теория. Введение*, Мир, М., 1981.
- [4] F. P. Peterson, “Some remarks on Chern classes”, *Ann. of Math. (2)*, **69**:2 (1959), 414–420.

А. В. Ершов

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: ershov.andrei@gmail.com

Поступило

11.06.2011

Исправленный вариант

18.05.2012