Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Данилов, О почти периодических многозначных отображениях, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 82–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm921>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:21:33

УДК 517.9

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Л. И. Данилов

Рассматриваются многозначные отображения $F: \mathbb{R} \rightarrow Z^U$ с компактными образами в полном метрическом пространстве U . Получены условия на множество сечений многозначного отображения F , которые необходимы и достаточны для того, чтобы многозначное отображение F было почти периодическим по Степанову.

Библиография: 13 названий.

Пусть (U, ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство; $\text{cl } U$ – множество непустых замкнутых подмножеств пространства U , $\text{cl}_b U$ – множество непустых замкнутых ограниченных подмножеств, $\text{cl}_c U$ – множество непустых компактных подмножеств; $\overline{A}$ – замыкание множества $A \subset U$; множество A предкомпактно, если $\overline{A}$ – компакт.

В силу теоремы Кастена [1, теорема III, с. 9], [2, с. 331] многозначное отображение $t \rightarrow F(t) \in \text{cl } U$, $t \in \mathbb{R}$, измеримо (т.е. для любого открытого множества $\theta \subset U$ множество $\{t \in \mathbb{R}: F(t) \cap \theta \neq \emptyset\}$ измеримо (по Лебегу)) тогда и только тогда, когда существуют измеримые функции $f_j: \mathbb{R} \rightarrow U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$ п.в. Если функции f_j , $j \in \mathbb{N}$, принадлежат некоторым классам функций (или обладают какими-либо дополнительными свойствами), то возникает задача характеристики многозначных отображений $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{cl } U$, представимых в виде $F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$ п.в.

В [3] исследовались многозначные отображения $t \rightarrow F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, в случае, когда f_j , $j \in \mathbb{N}$, – почти периодические (п.п.) по Степанову функции из пространств $S(\mathbb{R}, U)$, $S_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, и $S^c(\mathbb{R}, U)$ (п.п. функция $f \in S(\mathbb{R}, U)$ принадлежит пространству $S^c(\mathbb{R}, U)$, если существует компакт $K(f) \subset U$ такой, что $f(t) \in K(f)$ п.в.). Доказано, в частности, что многозначные отображения $t \rightarrow F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, где $f_j \in S(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, и только они представимы в виде $F(t) = \sup \mu[\cdot; t]$ п.в., где $\mu[\cdot; t]$ – мерозначная п.п. по Степанову функция со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{M}, d)$ вероятностных борелевских мер, определенных на пространстве U , с метрикой Леви–Прохорова d ($\sup \mu$ – носитель меры $\mu \in \mathcal{M}$). При этом в виде $F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$ п.в., где $f_j \in S(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, можно представить любое многозначное п.п. по Степанову отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{cl } U$ [4]–[6]. Более того, если $F \in S_p(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$, $p \geq 1$, то функции f_j можно выбрать из пространства $S_p(\mathbb{R}, U)$. В [7] (для компактного метрического пространства U) приведен пример мерозначной п.п. по Степанову функции $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbb{R}$, такой, что многозначное отображение $t \rightarrow \sup \mu[\cdot; t]$, $t \in \mathbb{R}$, не является почти периодическим по Степанову. Отметим, что п.п. по Бору многозначные отображения $t \rightarrow F(t) \in \text{cl}_c U$, $t \in \mathbb{R}$, могут не иметь п.п. по Бору сечений [8] (см. также [5]).

В настоящей работе изучаются п.п. сечения многозначных п.п. по Степанову отображений $t \rightarrow F(t) \in \text{cl}_c U$, $t \in \mathbb{R}$. Получены условия на множество п.п. сечений многозначного отображения $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{cl}_c U$, необходимые и достаточные для того, чтобы многозначное отображение F принадлежало пространствам п.п. по Степанову отображений $S(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$, $S_p(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$, $p \geq 1$, и $S^c(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$. В частности, для компактного метрического пространства U доказано, что многозначное отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{cl} U$ почти периодически по Степанову тогда и только тогда, когда существуют функции $f_j \in S(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$ п.в. и $\{f_j(\cdot)\}$ – предкомпактное множество в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}, U)$.

В первой части работы приведены определения и некоторые утверждения, необходимые в дальнейшем. Относительно свойств п.п. функций см. [9], [10]. Ряд используемых утверждений о п.п. по Степанову функциях содержится в [3]. Основные результаты приведены во второй и третьей частях работы. При этом во второй части доказано сформулированное выше утверждение (для компактного метрического пространства U).

1. Пусть (U, ρ) – полное метрическое пространство, $B(x, r) = \{y \in U: \rho(x, y) \leq r\}$, $x \in U$, $r \geq 0$. Если $T_j \subset \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, – непересекающиеся измеримые (по Лебегу) множества, $\text{mes}(\mathbb{R} \setminus \bigcup_j T_j) = 0$ (mes – мера Лебега), $x_j \in U$, то обозначим через $\sum x_j \chi_{T_j}(\cdot)$ (где χ_{T_j} – характеристические функции множеств T_j) элементарную функцию, принимающую на множестве T_j значение x_j . Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow U$ измерима, если для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарная функция f_ε такая, что

$$\text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(f(t), f_\varepsilon(t)) < \varepsilon.$$

Класс измеримых функций $f: \mathbb{R} \rightarrow U$ обозначим через $M(\mathbb{R}, U)$ (функции, совпадающие при почти всех (п.в.) $t \in \mathbb{R}$, отождествляются). Если $f_j \in M(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, то аналогично элементарным функциям через $\sum f_j(\cdot) \chi_{T_j}(\cdot)$ будем обозначать измеримую функцию, совпадающую с функцией $f_j(t)$ при $t \in T_j$. Пусть $T \subset \mathbb{R}$ – измеримое множество ($\text{mes } T \neq 0$), $L^\infty(T, U)$ – метрическое пространство измеримых и (в существенном) ограниченных функций $f: T \rightarrow U$ с метрикой

$$D_{T, \infty}^{(\rho)}(f, g) = \text{ess sup}_{t \in T} \rho(f(t), g(t)),$$

$f, g \in L^\infty(T, U)$; $f(\cdot|_T)$ – сужение функции $f \in M(\mathbb{R}, U)$ на множество $T \subset \mathbb{R}$, $D_\infty^{(\rho)} \doteq D_{\mathbb{R}, \infty}^{(\rho)}$.

Зафиксируем элемент $x_0 \in U$. Обозначим через $M_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, множество измеримых функций $f: \mathbb{R} \rightarrow U$, для которых

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+1} \rho^p(f(t), x_0) dt < +\infty.$$

На множестве $M_p(\mathbb{R}, U)$ вводится метрика

$$D_p^{(\rho)}(f, g) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left(\int_{\xi}^{\xi+1} \rho^p(f(t), g(t)) dt \right)^{1/p},$$

$f, g \in M_p(\mathbb{R}, U)$. Пусть $M'_p(\mathbb{R}, U)$ – множество функций $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, для которых

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \sup_{\substack{L \subset [\xi, \xi+1]: \\ \text{mes } L \leq \delta}} \int_L \rho^p(f(t), x_0) dt = 0.$$

Функция $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$ принадлежит пространству $S_p(\mathbb{R}, U)$ почти периодических по Степанову степени $p \geq 1$ функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество чисел $\tau \in \mathbb{R}$, для которых $D_p^{(\rho)}(f(\cdot + \tau), f(\cdot)) < \varepsilon$, относительно плотно [9]. Последовательность $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, называется f -возвращающей для функции $f \in S_p(\mathbb{R}, U)$, если $D_p^{(\rho)}(f(\cdot + \tau_j), f(\cdot)) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. Каждой функции $f \in S_p(\mathbb{R}, U)$ ставится в соответствие модуль (частот) $\text{Mod } f$, состоящий из тех и только тех чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых $e^{i\lambda\tau_j} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow +\infty$ для любой f -возвращающей последовательности $\{\tau_j\}$. Наоборот, если $e^{i\lambda\tau_j} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow +\infty$ для всех $\lambda \in \text{Mod } f$, то последовательность $\{\tau_j\}$ является f -возвращающей.

На пространстве U введем также метрику $\rho'(x, y) = \theta(\rho(x, y))$, $x, y \in U$, где $\theta(t) = t$ при $0 \leq t \leq 1$ и $\theta(t) = 1$, если $t \geq 1$. Обозначим $S(\mathbb{R}, U) = S(\mathbb{R}, (U, \rho)) \doteq S_1(\mathbb{R}, (U, \rho'))$; f -возвращающие последовательности и $\text{Mod } f$ для функции $f \in S(\mathbb{R}, U)$ определяются как для функции из пространства $S_1(\mathbb{R}, (U, \rho'))$. На множестве $M(\mathbb{R}, U)$ введем метрику

$$D^{(\rho)}(f, g) \doteq D_1^{(\rho')}(f, g),$$

$f, g \in M(\mathbb{R}, U)$; $S(\mathbb{R}, U)$ – замкнутое множество в полном метрическом пространстве $(M(\mathbb{R}, U), D^{(\rho)})$. Функция $f \in M(\mathbb{R}, U)$ принадлежит $S(\mathbb{R}, U)$ тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon, \delta > 0$ множество чисел $\tau \in \mathbb{R}$, для которых

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \text{mes}\{t \in [\xi, \xi + 1]: \rho(f(t + \tau), f(t)) \geq \delta\} < \varepsilon,$$

относительно плотно. Справедливо равенство [11]

$$S_p(\mathbb{R}, U) = S(\mathbb{R}, U) \cap M'_p(\mathbb{R}, U), \quad p \geq 1. \quad (1)$$

Если $f \in S_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, то $\text{Mod } f$ не зависит от того, какому из пространств $S_p(\mathbb{R}, U)$ или $S(\mathbb{R}, U)$ функция f считается принадлежащей. Пусть $S^c(\mathbb{R}, U)$ – множество функций $f \in S(\mathbb{R}, U)$, для которых существует компакт $K = K(f) \subset U$ такой, что $f(t) \in K$ п.в. Множество $S^c(\mathbb{R}, U)$ замкнуто в полном метрическом пространстве $(L^\infty(\mathbb{R}, U), D_\infty^{(\rho)})$.

Обозначим через $S(\mathbb{R})$ совокупность измеримых множеств $T \subset \mathbb{R}$ таких, что $\chi_T \in S_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (если $U = \mathbb{R}$, то считаем, что $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$). Если $T \in S(\mathbb{R})$, то положим $\text{Mod } T = \text{Mod } \chi_T$. Для произвольного измеримого множества $T \subset \mathbb{R}$ обозначим

$$\kappa(T) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \text{mes}([\xi, \xi + 1] \setminus T).$$

Для любого модуля (группы по сложению) $\Lambda \subset \mathbb{R}$ через $\mathbb{M}(\Lambda)$ обозначается совокупность последовательностей непересекающихся множеств $T_j \in S(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, таких, что $\text{Mod } T_j \subset \Lambda$ и $\kappa(\bigcup_{j \leq N} T_j) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$.

ЛЕММА 1 [12]. Пусть $\{T_j\} \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$ и $f_j \in S(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum f_j(\cdot) \chi_{T_j}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, U)$ и $\text{Mod } \sum f_j(\cdot) \chi_{T_j}(\cdot) \subset \sum_j \text{Mod } f_j + \sum_j \text{Mod } T_j$ (сумма модулей определяется как наименьший модуль, содержащий все слагаемые).

Доказательство следующей теоремы (использующее результаты работ [5], [6]) приведено в [3].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in S(\mathbb{R}, U)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарная функция $\sum x_j \chi_{T_j}(\cdot)$ такая, что $\{T_j\} \in \mathbb{M}(\text{Mod } f)$; функция $f(t)$ определена при всех $t \in \bigcup_j T_j$, $\{f(t) : t \in T_j\}$ – предкомпактные множества в пространстве (U, ρ) , $j \in \mathbb{N}$, и

$$\sup_{t \in \bigcup_j T_j} \rho\left(f(t), \sum x_j \chi_{T_j}(t)\right) < \varepsilon.$$

Следствием леммы 1 и теоремы 1 является лемма 2.

ЛЕММА 2 [5]. Пусть $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Тогда для любых $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ существует множество $T \in S(\mathbb{R})$ такое, что $\text{Mod } T \subset \text{Mod } f$, $f(t) < a + \varepsilon$ при всех $t \in T$ и $f(t) > a$ при п. в. $t \in \mathbb{R} \setminus T$.

На множестве $\text{cl}_b U$ определим метрику Хаусдорфа

$$\text{dist}(A, B) = \text{dist}_\rho(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \rho(x, B) \sup_{x \in B} \rho(x, A) \right\},$$

$A, B \in \text{cl}_b U$; $\rho(x, C) = \inf_{y \in C} \rho(x, y)$ – расстояние от $x \in U$ до непустого множества $C \subset U$. Метрическое пространство $(\text{cl}_b U, \text{dist})$ полное. Пространства $S(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$, $S_p(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$, $p \geq 1$, и $S^c(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$ п. п. по Степанову многозначных отображений $t \rightarrow F(t) \in \text{cl}_b U$ (а также отображений $t \rightarrow F(t) \in \text{cl}_c U$), $t \in \mathbb{R}$, определяются как пространства п. п. по Степанову функций со значениями в метрическом пространстве $(\text{cl}_b U, \text{dist})$. При этом $S(\mathbb{R}, \text{cl } U) = S_1(\mathbb{R}, (\text{cl } U, \text{dist}_\rho))$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (U, ρ) – полное метрическое пространство, $F(\cdot) \in S_p(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$, $p \geq 1$, $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Предположим, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$ для множества $F(t)$ существует конечная ε -сеть из N точек этого множества (зависящих от t). Тогда для любого $\varepsilon' > \varepsilon$ существуют функции $f_i \in S_p(\mathbb{R}, U)$, $i = 1, \dots, N$, такие, что $\text{Mod } f_i \subset \text{Mod } F$, $f_i(t) \in F(t)$ п. в. и при п. в. $t \in \mathbb{R}$ точки $f_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, образуют ε' -сеть для множества $F(t)$.

Теорема 2 доказана в [6]. Доказательство (более слабого) варианта теоремы 2 (достаточного для целей настоящей работы), когда предполагается, что множества $F(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ имеют $(\varepsilon/2)$ -сеть из N точек пространства U (зависящих от t), приведено также в [5].

2. Пусть (U, ρ) – компактное метрическое пространство (в этом случае $S(\mathbb{R}, U) = S_1(\mathbb{R}, U)$, $\text{cl } U = \text{cl}_c U$ и $S(\mathbb{R}, \text{cl } U) = S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U) = S^c(\mathbb{R}, \text{cl } U)$).

ТЕОРЕМА 3. Пусть (U, ρ) – компактное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $t \rightarrow F(t) \in \text{cl } U$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$ в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ и функции $f_{\varepsilon, j} \in S_1(\mathbb{R}, U)$, $j = 1, \dots, N_\varepsilon$, такие, что $f_{\varepsilon, j}(t) \in F(t)$ п. в. и при п. в. $t \in \mathbb{R}$ точки $f_{\varepsilon, j}(t)$, $j = 1, \dots, N_\varepsilon$, образуют ε -сеть для множества $F(t)$. При этом для многозначного отображения $F \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$ функции $f_{\varepsilon, j}$ можно выбирать так, что $\text{Mod } f_{\varepsilon, j} \subset \text{Mod } F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $F \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$, то существование требуемых функций $f_{\varepsilon, j} \in S_1(\mathbb{R}, U)$, $j = 1, \dots, N_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, следует из теоремы 2 и компактности метрического пространства U . Предположим теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $f_{\varepsilon, j} \in S_1(\mathbb{R}, U)$, $j = 1, \dots, N_\varepsilon$, такие, что при п.в. $t \in \mathbb{R}$ точки $f_{\varepsilon, j}(t)$, $j = 1, \dots, N_\varepsilon$, образуют ε -сеть для множества $F(t)$ и $f_{\varepsilon, j}(t) \in F(t)$. Пусть $F_\varepsilon(t) = \bigcup_{j=1, \dots, N_\varepsilon} f_{\varepsilon, j}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Тогда $F_\varepsilon \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$ [12, лемма 5] и $D_\infty^{(\text{dist})}(F(\cdot), F_\varepsilon(\cdot)) \leq \varepsilon$. Так как множество $S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$ замкнуто в метрическом пространстве $M_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$, то $F(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$. Теорема доказана.

Если $F, G \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$, $F(t) \cap G(t) \neq \emptyset$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$, то не всегда $F(\cdot) \cap G(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$ [12].

ТЕОРЕМА 4. Пусть (U, ρ) – компактное метрическое пространство, $F, G \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$ и $F(t) \cap G(t) \neq \emptyset$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует многозначное отображение $F_\varepsilon \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$ такое, что $\text{Mod } F_\varepsilon \subset \text{Mod } F + \text{Mod } G$ и $F(t) \cap G(t) \subset F_\varepsilon(t) \subset F(t) \cap G^{(\varepsilon)}(t)$ п.в., где $G^{(\varepsilon)}(t) = \{x \in U : \rho(x, G(t)) < \varepsilon\}$, $t \in \mathbb{R}$.

Приведем схему доказательства теоремы 4 (подробное доказательство содержится в [12]). Пусть $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 3 для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся функции $f_j^{(n)} \in S_1(\mathbb{R}, U)$, $j = 1, \dots, N(n)$, такие, что $\text{Mod } f_j^{(n)} \subset \text{Mod } F$, $f_j^{(n)} \in F(t)$ п.в. и при п.в. $t \in \mathbb{R}$ точки $f_j^{(n)}(t)$, $j = 1, \dots, N(n)$, образуют $2^{-n-1}\varepsilon$ -сеть для множества $F(t)$. Имеем $\rho(f_j^{(n)}(\cdot), G(\cdot)) \in S_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\text{Mod } \rho(f_j^{(n)}(\cdot), G(\cdot)) \subset \text{Mod } F + \text{Mod } G$. Из леммы 2 следует существование множеств $T_j^{(n)} \in S(\mathbb{R})$ таких, что $\text{Mod } T_j^{(n)} \subset \text{Mod } \rho(f_j^{(n)}(\cdot), G(\cdot))$, $\rho(f_j^{(n)}(t), G(t)) < 2^{-n+1}\varepsilon$ при всех $t \in T_j^{(n)}$ и $\rho(f_j^{(n)}(t), G(t)) > 3 \cdot 2^{-n-1}\varepsilon$ при п.в. $t \in \mathbb{R} \setminus T_j^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, N(n)$. Обозначим

$$F_j^{(n)}(t) = \begin{cases} \{f_j^{(n)}(t)\}, & \text{если } t \in T_j^{(n)}, \\ \emptyset, & \text{если } t \notin T_j^{(n)}. \end{cases}$$

Положим

$$F_\varepsilon(t) = (F(t) \cap G(t)) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{N(n)} F_j^{(n)}(t) \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Множества $F_\varepsilon(t)$ (при п.в. $t \in \mathbb{R}$) замкнуты. Пусть

$$F_\varepsilon(N; t) = \bigcup_{n \leq N} \bigcup_{j=1}^{N(n)} F_j^{(n)}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Нетрудно показать, что $F_\varepsilon(N; t) \neq \emptyset$ п.в., $F_\varepsilon(N; \cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$, $\text{Mod } F_\varepsilon(N; \cdot) \subset \text{Mod } F + \text{Mod } G$ [12, лемма 5] и $D_\infty^{(\text{dist})}(F_\varepsilon(\cdot), F_\varepsilon(N; \cdot)) \leq 2^{-N-1}\varepsilon$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Поэтому $F_\varepsilon(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$ и $\text{Mod } F_\varepsilon \subset \text{Mod } F + \text{Mod } G$. Отображение F_ε обладает всеми требуемыми свойствами.

ТЕОРЕМА 5. Пусть (U, ρ) – компактное метрическое пространство, $f \in S_1(\mathbb{R}, U)$. Тогда для любых $\varepsilon' > \varepsilon \geq 0$ найдется многозначное отображение $K(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$ такое, что $\text{Mod } K \subset \text{Mod } f$ и $B(f(t), \varepsilon) \subset K(t) \subset B(f(t), \varepsilon')$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L}: U \rightarrow V$ – изометрическое вложение компактного метрического пространства U в некоторое сепарабельное банахово пространство $(V, \|\cdot\|)$ [13, с. 175]. Обозначим $\rho_V(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|$, $y_1, y_2 \in V$; $B_V(y, r) = \{\eta \in V: \|\eta - y\| \leq r\}$, $y \in V$, $r \geq 0$; dist_{ρ_V} – метрика Хаусдорфа на пространстве $\text{cl}_b V$ непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства V . Замыкание $\text{conv } \mathcal{L}(U)$ выпуклой оболочки $\text{conv } \mathcal{L}(U)$ множества $\mathcal{L}(U)$ в банаховом пространстве V компактно. Для $y \in \text{conv } \mathcal{L}(U)$ обозначим $G_\varepsilon(y) = B_V(y, \varepsilon) \cap \overline{\text{conv } \mathcal{L}(U)}$. Множества $G_\varepsilon(y) \subset V$ – выпуклые и компактные. Для всех $y_1, y_2 \in \text{conv } \mathcal{L}(U)$ имеем $\text{dist}_{\rho_V}(G_\varepsilon(y_1), G_\varepsilon(y_2)) \leq \|y_1 - y_2\|$. Следовательно, $G_\varepsilon(\mathcal{L}(f(\cdot))) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl}_c V)$ и $\text{Mod } G_\varepsilon(\mathcal{L}(f(\cdot))) \subset \text{Mod } f(\cdot)$. В силу теоремы 4 (примененной к компактному метрическому пространству $(\text{conv } \mathcal{L}(U), \rho_V)$) найдется многозначное отображение $K_V(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl}_c V)$ такое, что $\text{Mod } K_V(\cdot) \subset \text{Mod } f(\cdot)$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B(f(t), \varepsilon)) &= \mathcal{L}(U) \cap G_\varepsilon(\mathcal{L}(f(t))) \subset K_V(t) \\ &\subset \mathcal{L}(U) \cap \{\eta \in \overline{\text{conv } \mathcal{L}(U)}: \rho_V(\eta, G_\varepsilon(\mathcal{L}(f(t)))) < \varepsilon' - \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Осталось положить $K(t) = \mathcal{L}^{-1}(K_V(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть (U, ρ) – компактное метрическое пространство, $F(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$. Тогда найдутся функции $f_j \in S_1(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\text{Mod } f_j \subset \text{Mod } F$, $F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$ п. в. и множество $\{f_j(\cdot)\}_{j \in \mathbb{N}}$ предкомпактно в пространстве $(L^\infty(\mathbb{R}, U), D_\infty^{(\rho)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3 найдутся число $N(1) \in \mathbb{N}$ и функции $f_{j_1} \in S_1(\mathbb{R}, U)$, $j_1 = 1, \dots, N(1)$, такие, что $\text{Mod } f_{j_1} \subset \text{Mod } F$, $f_{j_1}(t) \in F(t)$ п. в. и точки $f_{j_1}(t)$, $j_1 = 1, \dots, N(1)$, при п. в. $t \in \mathbb{R}$ образуют 1-сеть для множества $F(t)$. Из теоремы 5 следует, что существуют многозначные отображения $K_{j_1}(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$, $j_1 = 1, \dots, N(1)$, для которых $\text{Mod } K_{j_1} \subset \text{Mod } f_{j_1} \subset \text{Mod } F$ и $B(f_{j_1}(t), 1) \subset K_{j_1}(t) \subset B(f_{j_1}(t), 2)$ п. в. В силу теоремы 4 существуют многозначные отображения $F_{j_1}(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$, $j_1 = 1, \dots, N(1)$, такие, что $\text{Mod } F_{j_1} \subset \text{Mod } F$ и $f_{j_1}(t) \in F(t) \cap B(f_{j_1}(t), 1) \subset F(t) \cap K_{j_1}(t) \subset F_{j_1}(t) \subset F(t) \cap B(f_{j_1}(t), 4)$ п. в. При этом $F(t) = \bigcup_{j_1=1, \dots, N(1)} F_{j_1}(t)$ п. в. Будем далее последовательно при $n = 2, 3, \dots$ определять числа $N(n) \in \mathbb{N}$, функции $f_{j_1 \dots j_n}(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, U)$ и многозначные отображения $F_{j_1 \dots j_n}(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$, $j_s = 1, \dots, N(s)$, $s = 1, \dots, n$, $\text{Mod } f_{j_1 \dots j_n} \subset \text{Mod } F$, $\text{Mod } F_{j_1 \dots j_n} \subset \text{Mod } F$. Предположим, что они определены при некотором $n \in \mathbb{N}$. Из теоремы 3 следует, что существуют число $N(n+1) \in \mathbb{N}$ и функции $f_{j_1 \dots j_n j_{n+1}}(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, U)$, $j_s = 1, \dots, N(s)$, $s = 1, \dots, n+1$, такие, что $\text{Mod } f_{j_1 \dots j_n j_{n+1}} \subset \text{Mod } F_{j_1 \dots j_n} \subset \text{Mod } F$, $f_{j_1 \dots j_n j_{n+1}}(t) \in F_{j_1 \dots j_n}(t)$ п. в. и точки $f_{j_1 \dots j_n j_{n+1}}(t)$, $j_{n+1} = 1, \dots, N(n+1)$, при п. в. $t \in \mathbb{R}$ (и при всех $j_1, \dots, j_n$) образуют 2^{-n} -сеть для множества $F_{j_1 \dots j_n}(t)$. Из теоремы 5 вытекает существование многозначных отображений $K_{j_1 \dots j_n j_{n+1}}(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$, для которых $\text{Mod } K_{j_1 \dots j_n j_{n+1}} \subset \text{Mod } f_{j_1 \dots j_n j_{n+1}} \subset \text{Mod } F$ и

$B(f_{j_1 \dots j_{n+1}}(t), 2^{-n}) \subset K_{j_1 \dots j_{n+1}}(t) \subset B(f_{j_1 \dots j_{n+1}}(t), 2^{1-n})$ п.в. Поэтому (в силу теоремы 4) существуют многозначные отображения $F_{j_1 \dots j_{n+1}}(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } U)$ такие, что $\text{Mod } F_{j_1 \dots j_{n+1}} \subset \text{Mod } F$ и

$$\begin{aligned} f_{j_1 \dots j_{n+1}}(t) &\in F_{j_1 \dots j_n}(t) \cap B(f_{j_1 \dots j_{n+1}}(t), 2^{-n}) \subset F_{j_1 \dots j_n}(t) \cap K_{j_1 \dots j_{n+1}}(t) \\ &\subset F_{j_1 \dots j_{n+1}}(t) \subset F_{j_1 \dots j_n}(t) \cap B(f_{j_1 \dots j_{n+1}}(t), 2^{2-n}) \end{aligned}$$

п.в. Продолжим неограниченно нахождение чисел $N(n)$, функций $f_{j_1 \dots j_n}$ и многозначных отображений $F_{j_1 \dots j_n}$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $F(t) = \bigcup_{j_1, \dots, j_n} F_{j_1 \dots j_n}(t)$ п.в. и $f_{j_1 \dots j_m}(t) \in F_{j_1 \dots j_n}(t) \subset B(f_{j_1 \dots j_n}(t), 2^{3-n})$ п.в. при всех $m \geq n$, поэтому точки $f_{j_1 \dots j_n}(t)$, $j_s = 1, \dots, N(s)$, $s = 1, \dots, n$, при п.в. $t \in \mathbb{R}$ образуют 2^{4-n} -сеть для множества $F(t)$ и функции $f_{j_1 \dots j_l}(\cdot)$, $j_s = 1, \dots, N(s)$, $s = 1, \dots, l$, $l = 1, \dots, n$, образуют конечную 2^{4-n} -сеть в пространстве $(L^\infty(\mathbb{R}, U), D_\infty^{(\rho)})$ для множества функций $f_{j_1 \dots j_m}(\cdot)$, $j_s = 1, \dots, N(s)$, $s = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$. Осталось перенумеровать функции $f_{j_1 \dots j_n}(\cdot)$ (при всех $n \in \mathbb{N}$) с помощью одного индекса. Теорема доказана.

ЛЕММА 3. Пусть (U, ρ) – полное метрическое пространство, $f_j \in S^c(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, и множество $\{f_j(\cdot)\}$ предкомпактно в метрическом пространстве $(L^\infty(\mathbb{R}, U), D_\infty^{(\rho)})$. Обозначим $F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда $F \in S^c(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$ и $\text{Mod } F \subset \sum_j \text{Mod } f_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F_n(t) = \bigcup_{j \leq n} f_j(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Нетрудно показать, что $F_n \in S^c(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$ и $\text{Mod } F_n \subset \sum_{j \leq n} \text{Mod } f_j$ [12, лемма 5]. С другой стороны, из предкомпактности множества функций $f_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$, в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}, U)$ следует, что $F \in L^\infty(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$ и $D_\infty^{(\text{dist})}(F(\cdot), F_n(\cdot)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Поэтому доказываемое утверждение следует из замкнутости множества $S^c(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$ в метрическом пространстве $(L^\infty(\mathbb{R}, \text{cl}_b U), D_\infty^{(\text{dist})})$. Лемма доказана.

Если $F(\cdot) \in S^c(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$ (где U – полное метрическое пространство), то существует компактное множество $K \subset U$ такое, что $F(t) \subset K$ п.в. Поэтому следующая теорема вытекает из теоремы 6 и леммы 3.

ТЕОРЕМА 7. Пусть (U, ρ) – полное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{cl } U$ принадлежит пространству $S^c(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$ в том и только том случае, если существуют функции $f_j \in S^c(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$ п.в. и множество $\{f_j(\cdot)\}_{j \in \mathbb{N}}$ предкомпактно в метрическом пространстве $(L^\infty(\mathbb{R}, U), D_\infty^{(\rho)})$.

3. Пусть (U, ρ) – полное метрическое пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество функций $f_j \in M(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, называется L^∞ -псевдокомпактным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $T_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ такое, что $\kappa(T_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\{f_j(\cdot|_{T_\varepsilon})\}_{j \in \mathbb{N}}$ – предкомпактное множество в (полном) метрическом пространстве $(L^\infty(T_\varepsilon, U), D_{T_\varepsilon, \infty}^{(\rho)})$.

ЛЕММА 4. Пусть $f_j \in S(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, и множество $\{f_j(\cdot)\}$ L^∞ -псевдокомпактно. Обозначим $F(t) = \bigcup_j f_j(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда $F \in S(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$ и $\text{Mod } F \subset \sum_j \text{Mod } f_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 3, обозначим $F_n(t) = \bigcup_{j \leq n} f_j(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Имеем $F_n \in S(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$ и $\text{Mod } F_n \subset \sum_{j \leq n} \text{Mod } f_j$. Из L^∞ -псевдокомпактности множества функций f_j , $j \in \mathbb{N}$, следует, что $F \in M(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$ и $D^{(\text{dist})}(F(\cdot), F_n(\cdot)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Так как множество $S(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$ замкнуто в метрическом пространстве $(M(\mathbb{R}, (\text{cl}_b U, \text{dist})), D^{(\text{dist})})$, отсюда получаем $F \in S(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$, при этом $\text{Mod } F \subset \sum_j \text{Mod } f_j$ [3]. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 8. Пусть (U, ρ) – полное метрическое пространство, $F(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$. Тогда найдутся функции $f_j \in S(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\text{Mod } f_j \subset \text{Mod } F$, $F(t) = \bigcup_j f_j(t)$ п. в. и множество $\{f_j(\cdot)\}_{j \in \mathbb{N}}$ L^∞ -псевдокомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с теоремой 1 (при $\varepsilon = 1$) найдем множества $T_i \subset \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что $\{T_i\} \in \mathbb{M}(\text{Mod } F)$, многозначное отображение $F(t)$ определено при всех $t \in T_i$ и $\{F(t) : t \in T_i\}$ – предкомпактные множества в полном метрическом пространстве $(\text{cl}_b U, \text{dist})$, $i \in \mathbb{N}$. Определим многозначные отображения

$$F_i(t) = \begin{cases} F(t), & \text{если } t \in T_i, \\ \{x_0\}, & \text{если } t \notin T_i, \end{cases}$$

$i \in \mathbb{N}$ (где x_0 – фиксированный элемент пространства U). Из леммы 1 следует, что $F_i \in S^c(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$ и $\text{Mod } F_i \subset \text{Mod } F$. Поэтому из теоремы 6 вытекает существование функций $f_j^{(i)} \in S^c(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, таких, что

$$\text{Mod } f_j^{(i)} \subset \text{Mod } F_i \subset \text{Mod } F, \quad F_i(t) = \overline{\bigcup_j f_j^{(i)}(t)}$$

п. в. и множество $\{f_j^{(i)}(\cdot)\}_{j \in \mathbb{N}}$ предкомпактно в пространстве $(L^\infty(\mathbb{R}, U), D_\infty^{(\rho)})$. Определим функции $f_j(\cdot) = \sum_i f_j^{(i)}(\cdot) \chi_{T_i}(\cdot)$. Имеем $F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$ п. в. В силу леммы 1 $f_j \in S(\mathbb{R}, U)$, $\text{Mod } f_j \subset \text{Mod } F$. При этом для любого $m \in \mathbb{N}$ множество $\{f_j(\cdot|_{\bigcup_{i \leq m} T_i})\}$ предкомпактно в метрическом пространстве

$$\left(L^\infty \left(\bigcup_{i \leq m} T_i, U \right), D_{\bigcup_{i \leq m} T_i, \infty}^{(\rho)} \right).$$

Так как $\kappa(\bigcup_{i \leq m} T_i) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$, то $\{f_j(\cdot)\}_{j \in \mathbb{N}}$ – L^∞ -псевдокомпактное множество. Теорема доказана.

Следствием леммы 4 и теоремы 8 является теорема 9.

ТЕОРЕМА 9. Пусть (U, ρ) – полное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{cl } U$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$ в том и только том случае, если существуют функции $f_j \in S(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $F(t) = \bigcup_j f_j(t)$ п. в. и множество $\{f_j(\cdot)\}_{j \in \mathbb{N}}$ L^∞ -псевдокомпактно.

Если $f(\cdot)$ – измеримое сечение многозначного отображения $F(\cdot) \in M'_p(\mathbb{R}, (\text{cl}_b U, \text{dist}))$, $p \geq 1$, то $\rho(f(t), x_0) \leq \text{dist}(F(t), \{x_0\})$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$; отсюда $f(\cdot) \in M'_p(\mathbb{R}, U)$. Поэтому следующая теорема вытекает из теоремы 9 и равенства (1).

ТЕОРЕМА 10. Пусть (U, ρ) – полное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{cl} U$ принадлежит пространству $S_p(\mathbb{R}, \text{cl}_c U)$, $p \geq 1$, в том и только том случае, если существуют функции $f_j \in S_p(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$ н. в., $\{f_j(\cdot)\}_{j \in \mathbb{N}}$ – L^∞ -псевдокомпактное множество и $\sup_{j \in \mathbb{N}} \rho(f_j(\cdot), x_0) \in M'_p(\mathbb{R}, U)$ (где x_0 – фиксированный элемент пространства U).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Castaing Ch., Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions // Lecture Notes in Math. V. 580. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
- [2] Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. М.: Наука, 1985.
- [3] Данилов Л. И. Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 10. С. 3–24.
- [4] Долбилов А. М., Шнейберг И. Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сиб. матем. ж. 1991. Т. 32. № 2. С. 172–175.
- [5] Данилов Л. И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Изв. отдела матем. и информатики УдГУ. 1993. № 1. С. 16–78.
- [6] Данилов Л. И. О сечениях многозначных почти периодических отображений. Деп. в ВИНТИ 31.07.95, № 2340-B95. Новосибирск: Ред. “Сиб. матем. ж.”, 1995.
- [7] Данилов Л. И., Иванов А. Г. К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае // Изв. вузов. Матем. 1994. № 6. С. 50–59.
- [8] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. О. О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев: Наукова думка, 1977. С. 54–61.
- [9] Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.
- [10] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [11] Данилов Л. И. О почти периодических мерозначных функциях. Деп. в ВИНТИ 05.05.96, № 1434-B96. Т. 1. Ижевск: ФТИ УрО РАН, 1996.
- [12] Данилов Л. И. Многозначные почти периодические отображения и их сечения. Деп. в ВИНТИ 24.09.93, № 2465-B93. Ижевск: ФТИ УрО РАН, 1993.
- [13] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.

Физико-технический институт Уральского отделения РАН, г. Ижевск

Поступило

06.03.1998

Исправленный вариант

21.01.2000