Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. К. Абикенова, А. Утесов, Н. Т. Темиргалиев, О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 459–463

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:42:50

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева

Ш. Абикенова, А. Утесов, Н. Темиргалиев

Общая постановка задачи, изучаемой в данной статье, состоит в получении оценок сверху и оценок снизу (желательно совпадающих с точностью до констант) для величины (см. [1]–[6])

$$\delta_N(A; B; D_N; F)_Y = \min_{N_1+N_2=N} \inf_{(l^{(N_1, N_2)}, \varphi_N) \in D_{N_1, N_2}} \sup_{f=(f_1, f_2) \in F^{(1)} \times F^{(2)}} \|u(\cdot; f) - \varphi_N(l_1^{(1)}(f_1), \dots, l_1^{(N_1)}(f_1), l_2^{(1)}(f_2), \dots, l_2^{(N_2)}(f_2); \cdot)\|_Y \quad (1)$$

и в указании вычислительного агрегата, реализующего оценку сверху.

Всюду ниже, как правило, через N (с индексами и без) будем обозначать количество информации, или, более обще, элементов множества.

Также, без каких-либо оговорок принимается, что на классы, операторы и функции наложены такие условия, что определение δ_N имеет смысл.

В (1) символами обозначены: A – дифференциальное уравнение, а B – начальные или граничные условия, либо правая часть уравнения, F – функциональный класс.

Далее,

$$(l^{(N_1, N_2)}, \varphi_N) \equiv \varphi_N(l_1^{(1)}(f_1), \dots, l_1^{(N_1)}(f_1), l_2^{(1)}(f_2), \dots, l_2^{(N_2)}(f_2); x, t)$$

есть вычислительный агрегат, построенный по числовой информации объема $N = N_1 + N_2$, полученной об f_1 и f_2 посредством функционалов $l_1^{(1)}, \dots, l_1^{(N_1)}$ и $l_2^{(1)}, \dots, l_2^{(N_2)}$ соответственно, и переработанной по алгоритму φ_N до функции, зависящей от той же переменной, что и $u(\cdot; f)$.

И, наконец, D_{N_1, N_2} – заданный набор вычислительных агрегатов из множества всевозможных пар $\{(l^{(N_1, N_2)}, \varphi_N)\}$, т.е.

$$D_{N_1, N_2} \subset \{(l^{(N_1, N_2)}, \varphi_N)\}, \quad D_N = \bigcup_{N_1, N_2: N_1+N_2=N} D_{N_1, N_2}.$$

Существенным в этой постановке является то обстоятельство, что при заданном общем объеме информации N требуется распределить объемы N_j числовой информации, получаемой от $f_j \in F^{(j)}$, $j = 1, 2$, таким образом, чтобы суммарная погрешность δ_N была возможно малой, неухудшаемой или близкой к неухудшаемой.

Пусть Λ_N – заданное множество наборов $l^{(N)}$ из N функционалов. Тогда при $D_N = \Lambda_N \times \{\varphi_N\}$, т.е. в случае приближения вычислительными агрегатами $(l^{(N)}, \varphi_N)$ с $l^{(N)}$ из Λ_N и произвольным φ_N , величину δ_N , зависящую только от Λ_N , согласно [2] назовем *информативной мощностью семейства функционалов* Λ_N .

Соответственно через

$$\Lambda_N = P^{(N)} = \{(f(\xi_1), \dots, f(\xi_N)) : f \in F, \xi_1, \dots, \xi_N - \text{точки из множества задания функций класса } F\}$$

обозначим множество из N функционалов, являющихся значениями функции в точках, через

$$\Lambda_N = \Phi^{(N)} = \{(\widehat{f}(m^{(1)}), \dots, \widehat{f}(m^{(N)})) : f \in F, m^{(j)} \in Z^s, j = 1, \dots, N\}$$

множество из N функционалов – тригонометрических коэффициентов Фурье–Лебега, где Z^s – множество всех векторов $m = (m_1, \dots, m_s)$ из $\mathbb{R}^s$ с целочисленными компонентами и пусть

$$\Lambda_N = L^{(N)} = \{(l_1(f), \dots, l_N(f)) : f \in F\}$$

есть множество из N линейных функционалов, определенных на линейной оболочке класса F .

Здесь изучается следующая конкретизация общей постановки (1):

$u(\cdot; f) \equiv u(x, t; f_1, f_2)$ решение задачи Коши для волнового уравнения ($s = 1, 2, \dots$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, \quad u = u(x, t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x \equiv (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0, 1)^s, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{\omega_\nu, \dots, \omega_\nu}(0, 1)^s. \quad (3)$$

Прежде чем определить классы функций $F^{(j)}$, $j = 1, 2$, рассматриваемые в данной работе, напомним определение средней функции [7].

Для данного действительного числа $r \geq 1$ всякую непрерывную неубывающую на $[0, 1]$ функцию $\omega_r(\delta)$ такую, что

$$\omega_r(0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\omega_r(\eta)}{\eta^r} \leq C(\omega_r) \cdot \frac{\omega_r(\xi)}{\xi^r}$$

при некотором $C(\omega_r) > 0$ и всех $0 < \xi < \eta \leq 1$, называют *функцией типа модуля гладкости порядка r* .

В качестве функций типа модуля гладкости r -го порядка можно указать функции вида

$$\delta^r \ln^{r_1} \frac{2}{\delta}, \quad r \geq 1, \quad 0 \leq r_1 < +\infty, \\ \delta^r \ln^{r_1} \frac{2}{\delta} \ln^{r_2} \frac{3}{\delta}, \quad r \geq 1, \quad 0 < r_1 < +\infty, \quad -\infty < r_2 < +\infty, \quad \text{и т.п.}$$

Пусть $\{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}\}$ – система функций типа модуля гладкости порядков $r_1, \dots, r_s$ соответственно. В дальнейшем, не ограничивая общности (в случае необходимости, переходя к $(\omega_{r_j}(\delta) + \delta^r)/(\omega_{r_j}(1) + 1)$), будем считать, что все функции ω_{r_j} , $j = 1, \dots, s$, строго возрастают на $[0, 1]$ и $\omega_{r_j}(1) = 1$.

Обратную к инъективной функции g функцию будем обозначать через g^* .

Рассмотрим функции $\omega_{r_j}^*(\zeta)$, обратные к $\omega_{r_j}(\delta)$, и положим

$$\delta = \tau^*(\zeta) = \prod_{j=1}^s \omega_{r_j}^*(\zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

Очевидно, что $\delta = \tau^*(\zeta)$ является строго возрастающей функцией на $[0, 1]$, причем $\tau^*(1) = 1$. Функцию $\zeta = \tau(\delta)$, обратную к $\tau^*(\zeta)$, следуя Коляде [7], будем называть *средней функцией системы* $\{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}\}$.

Отметим, что в случае $\omega_{\nu_1}(\delta) = \dots = \omega_{\nu_s}(\delta) = \omega_\nu(\delta)$ средняя функция этой системы, очевидно, есть функция $\zeta = \tau(\delta)$, обратная к функции $\delta = \tau^*(\zeta) = (\omega_\nu^*)^s(\zeta)$.

Класс $W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0, 1)^s$ есть, по определению, множество всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье–Лебега $\hat{f}(m)$ которых удовлетворяют условию

$$\sum_{m=(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s} |\hat{f}(m)|^2 \cdot \left(\omega_{r_1}^{-2} \left(\frac{1}{m_1} \right) + \dots + \omega_{r_s}^{-2} \left(\frac{1}{m_s} \right) \right) \leq 1,$$

$$\overline{m}_j = \max\{1, |m_j|\}, \quad j = 1, \dots, s.$$

В частности, при $\omega_{r_j}(\delta) = \delta^{r_j}$ классы $W_2^{\delta^{r_1}, \dots, \delta^{r_s}}(0, 1)^s$ сводятся к обычным анизотропным классам Соболева $W_2^{r_1, \dots, r_s}(0, 1)^s$.

Норму пространства $L^q(0, 1)^s$, $1 \leq q < \infty$, как обычно, будем обозначать через $\|\cdot\|_{L^q}$ или $\|\cdot\|_q$, т.е.

$$\|f\|_{L^q} \equiv \|f\|_q = \left(\int_{[0,1]^s} |f(x)|^q dx \right)^{1/q},$$

а под $L^\infty[0, 1]^s$ будем понимать $C[0, 1]^s$.

Под классом $L^{q, \infty} \equiv L^{q, \infty}(0, 1)^s \times [0, 1]$ будем понимать множество всех функций $g: \mathbb{R}^s \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для каждого $t \in [0, 1]$ $g_t(x) = g(x, t)$ как функция аргумента $x \in \mathbb{R}^s$ является измеримой периодической с периодом 1 по каждой из своих s переменных и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{q, \infty}} \equiv \|g\|_{L^{q, \infty}((0,1)^s \times [0,1])} = \sup_{0 \leq t \leq 1} \text{vrai} \left(\int_{(0,1)^s} |g(x, t)|^q dx \right)^{1/q} < +\infty.$$

Приведем некоторые результаты, полученные в аналогичном исследуемому случаю направлении (определения классов даны в соответствующих статьях).

Утесовым [4] для уравнения теплопроводности получены следующие двусторонние оценки ($N = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \delta_N \left(\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x, 0) = f(x); P^{(N)} \times \{\varphi_N\}; W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0, 1)^s \right)_{L^2, s, \omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}} &\asymp \tau \left(\frac{1}{N} \right), \\ \delta_N \left(\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x, 0) = f(x); P^{(N)} \times \{\varphi_N\}; H_2^{\omega_r}(0, 1)^s \right)_{L^2, s, r} &\asymp \omega_r \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right). \end{aligned}$$

Шангиреевым [5] для волнового уравнения получены следующие двусторонние оценки при $r > s/2$:

$$\begin{aligned} \delta_N \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; P^{(N)} \times \{\varphi_N\}; M_2^r(0, 1)^s \right)_{L^{q, \infty}} &\asymp N^{-r/s+1/2-1/q}, \quad s = 1, 2, \dots, \\ \delta_N \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f(x); P^{(N)} \times \{\varphi_N\}; M_2^r(0, 1)^s \right)_{L^{2, \infty}} &\asymp N^{-r/2}, \quad s = 2, \end{aligned}$$

где $M_2^r(0, 1)^s$ есть любой из классов Соболева $W_2^r(0, 1)^s$, Никольского–Бесова $B_{2, \theta}^r(0, 1)^s$, $1 \leq \theta < \infty$.

Теперь перейдем к основным результатам настоящей статьи.

Через $u(x, t; f, 0)$ обозначим решение задачи (2), (3) в случае

$$u(x, 0) = f_1(x) \equiv f(x) \in W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0, 1)^s, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \equiv 0, \quad (4)$$

и через $u(x, t; 0, f)$ – в случае

$$u(x, 0) = f_1(x) \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \equiv f(x) \in W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0, 1)^s. \quad (5)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}\}$ и ω_ν – система и отдельная функция типа модуля гладкости порядков $r_1, \dots, r_s$ и ν соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \frac{(\overline{m}_1^2 + \dots + \overline{m}_s^2)^2}{\omega_{r_1}^{-2}(1/\overline{m}_1) + \dots + \omega_{r_s}^{-2}(1/\overline{m}_s)} < \infty, \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \frac{\overline{m}_1^2 + \dots + \overline{m}_s^2}{\omega_\nu^{-2}(1/\overline{m}_1) + \dots + \omega_\nu^{-2}(1/\overline{m}_s)} < \infty$$

и такие, что

$$\omega_{k_j}(\eta \cdot \xi) \leq C(\omega_{k_j}) \cdot \omega_{k_j}(\eta) \cdot \omega_{k_j}(\xi),$$

где

$$k_j = r_j, \quad j = 1, \dots, s, \quad \text{либо} \quad k_j = \nu, \quad j = 1, \dots, s,$$

при некотором положительном $C(\omega_{k_j})$ и для всех $0 < \xi < \eta \leq 1$.

Пусть также $\tau_1(\delta)$ и $\tau_2(\delta)$ – средние функции систем модулей гладкости $\{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}\}$ и $\{\omega_\nu, \dots, \omega_\nu\}$ соответственно.

Тогда в случае задачи (2), (3) имеет место соотношение ($N = 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} & \min_{\substack{N_1 + N_2 = N \\ N_1 \geq 2, N_2 \geq 2}} \inf_{l_1^{(1)}, \dots, l_N^{(1)}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0,1)^s \\ f_2 \in W_2^{\omega_\nu, \dots, \omega_\nu}(0,1)^s}} \\ & \|u(\cdot; f_1, f_2) - \varphi_N(l_1^{(1)}(f_1), \dots, l_1^{(N_1)}(f_1), \dots, l_2^{(1)}(f_2), \dots, l_2^{(N_2)}(f_2); \cdot)\|_{L^2, \infty} \\ & \asymp \min_{\substack{s, \omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}, \omega_\nu \\ N_1 + N_2 = N \\ N_1 \geq 2, N_2 \geq 2}} \left(\tau_1\left(\frac{1}{N_1}\right) + \tau_2\left(\frac{1}{N_2}\right) \cdot N_2^{-1/s} \right) \end{aligned}$$

причем оценка сверху в случае задачи (2), (4) достигается на следующем агрегате ($N = 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_N^{(1)}(l_1(f), \dots, l_N(f); x, t) &= \sum_{\substack{k=(k_1, \dots, k_s) \\ |k_j| \leq n_j, j=1, \dots, s}} \hat{f}(k) \cos(2\pi\sqrt{(k, k)})te^{2\pi i(x, k)}, \\ n_j &= \left[\left(\omega_{r_j}^* \left(\tau_1 \left(\frac{1}{N} \right) \right) \right)^{-1} \right] + 1, \quad j = 1, 2, \dots, s, \end{aligned}$$

а в случае задачи (2), (5) на агрегате вида

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_N^{(2)}(l_1(f), \dots, l_N(f); x, t) &= \sum_{\substack{k=(k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}^s \\ |k_j| \leq n, j=1, \dots, s}} \hat{f}(k) \frac{\sin(2\pi\sqrt{(k, k)})t}{\sqrt{(k, k)}} e^{2\pi i(x, k)}, \\ n &= \left[\left(\omega_\nu^* \left(\tau_2 \left(\frac{1}{N} \right) \right) \right)^{-1} \right] + 1. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть даны числа s ($s = 1, 2, \dots$), $r_j \geq 1$, $j = 1, \dots, s$, и ν такие, что

$$\begin{aligned} \frac{5}{r_j} + \sum_{k=1, k \neq j}^s \frac{1}{r_j} &< 2, \quad j = 1, \dots, s, \quad \frac{3}{r_j} + \frac{3}{r_l} + \sum_{k=1, k \neq j, k \neq l}^s \frac{1}{r_j} < 2, \quad j, l = 1, \dots, s, \quad j \neq l, \\ \nu &> 1 + \frac{s}{2}. \end{aligned}$$

Тогда в условиях теоремы 1 при

$$\omega_{r_1}(\delta) = \delta^{r_1}, \dots, \omega_{r_s}(\delta) = \delta^{r_s}, \quad \omega_\nu(\delta) = \delta^\nu$$

имеет место соотношение $N = 4, 5, \dots$

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N \\ N_1 \geq 1, N_2 \geq 1}} \inf_{\substack{l_1^{(1)}, \dots, l_N^{(1)}, \\ l_1^{(2)}, \dots, l_N^{(2)} - \text{линейные функционалы, } \varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1, \dots, r_s} (0,1)^s \\ f_2 \in W_2^{\nu, \dots, \nu} (0,1)^s}} \|u(\cdot; f_1, f_2) - \varphi_N(l_1^{(1)}(f_1), \dots, l_1^{(N_1)}(f_1), \dots, l_2^{(1)}(f_2), \dots, l_2^{(N_2)}(f_2); \cdot)\|_{L^2, \infty} \\ \asymp_{s, r_1, \dots, r_s, \nu} N^{-\min\{(r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1}), (\nu+1)s^{-1}\}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть даны модули гладкости $\omega_{r_j}(\delta) = \delta^{r_j} \ln^{k_j} 2/\delta$, $r_j \geq 1$, $k_j > 0$, $j = 1, \dots, s$, и $\omega_\nu(\delta) = \delta^\nu \ln^\lambda 2/\delta$, $\nu \geq 1$, $\lambda > 0$.

Тогда в условиях теорем 1 имеют место соотношения ($N = 2, 3, \dots$)

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N \\ N_1 \geq 1, N_2 \geq 1}} \inf_{\substack{l_1^{(1)}, \dots, l_N^{(1)}, \\ l_1^{(2)}, \dots, l_N^{(2)} - \text{линейные функционалы, } \varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}} (0,1)^s \\ f_2 \in W_2^{\omega_\nu, \dots, \omega_\nu} (0,1)^s}} \|u(\cdot; f_1, f_2) - \varphi_N(l_1^{(1)}(f_1), \dots, l_1^{(N_1)}(f_1), \dots, l_2^{(1)}(f_2), \dots, l_2^{(N_2)}(f_2); \cdot)\|_{L^2, \infty} \\ \asymp_{s, r_1, \dots, r_s, \nu} \begin{cases} \frac{(\ln N)^{\max\{(k_1 r_1^{-1} + \dots + k_s r_s^{-1})(r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1})^{-1}, \lambda\}}}{N^{(\nu+1)s^{-1}}}, & \text{если } (r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1})^{-1} = (\nu+1)s^{-1}; \\ \frac{(\ln N)^\lambda}{N^{(\nu+1)s^{-1}}}, & \text{если } (r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1})^{-1} > (\nu+1)s^{-1}; \\ \left(\frac{(\ln N)^{(k_1 r_1^{-1} + \dots + k_s r_s^{-1})}}{N} \right)^{(r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1})^{-1}}, & \text{если } (r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1})^{-1} < (\nu+1)s^{-1}. \end{cases}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Темиргалиев, *Математика: Избранное. Наука*, Изд-во ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, Астана, 2009. [2] Н. Темиргалиев, *Вестн. ЕНУ им. Л. Н. Гумилева*, 2010, Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, 1–194. [3] Ш. У. Ажгалиев, *Матем. заметки*, **82:2** (2007), 177–182. [4] А. Б. Утесов, *Задача восстановления функций и интегралов на обобщенных классах и решений уравнения теплопроводности*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Алматы, 2001. [5] Е. И. Шангиреев, *О восстановлении решений волнового уравнения*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Караганда, 2002. [6] И. Ж. Ибатулин, Н. Темиргалиев, *Дифференц. уравнения*, **44:4** (2008), 491–506. [7] В. И. Коляда, *Сиб. матем. журн.*, **14:4** (1973), 766–790.

Ш. Абикиенова

Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилёва, г. Астана
E-mail: shabik_25@mail.ru

Поступило

25.10.2010

Исправленный вариант

17.09.2011

А. Утесов

Актюбинский государственный
университет имени К. Жубанова

Н. Темиргалиев

Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилёва, г. Астана
E-mail: ntmath29@mail.ru