Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. П. Ефимова, О свойствах Q -интеграла, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 340–350

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:50:25

О свойствах Q -интеграла

М. П. Ефимова

В работе рассмотрены Q -интеграл Титчмарша и некоторое его обобщение, исследованы их элементарные свойства и получены критерии интегрируемости на множествах конечной меры.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. В работе [1] Титчмаршем было введено понятие Q -интеграла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть функция f измерима на отрезке $[a, b]$. Тогда f является Q -интегрируемой на $[a, b]$, если, полагая

$$[f(x)]_{n;0} = \begin{cases} f(x) & \text{при } |f(x)| \leq n, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

имеем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x)]_{n;0} dx$$

существует; этот предел будем называть Q -интегралом от функции f и обозначать

$$(Q) \int_a^b f(x) dx.$$

В той же работе было показано, что введенный интеграл не аддитивен по функциям. Для устранения этого недостатка Титчмарш добавил следующее условие:

$$\mu\{x \in [a, b] : |f(x)| > n\} = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть функция f является Q -интегрируемой на отрезке $[a, b]$ и выполнено условие (1). Тогда функцию f назовем A -интегрируемой на отрезке $[a, b]$ и обозначим

$$(A) \int_a^b f(x) dx = (Q) \int_a^b f(x) dx.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00669).

Фактически Q - и A -интегралы были введены в связи с изучением сопряженных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Рядом, сопряженным к тригонометрическому ряду*

$$\sigma = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

называется ряд

$$\bar{\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx.$$

Ряды σ и $\bar{\sigma}$ являются соответственно действительной и мнимой частью степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, где $c_0 = a_0/2$, $c_n = a_n - ib_n$, $n = 1, 2, \dots$, $z = re^{ix}$ при $r = 1$.

В 1911 г. Юнгом в работе [2] была установлена взаимосвязь между сопряженным тригонометрическим рядом функции f и выражением

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg}(t/2)} dt.$$

Было показано, что если f — 2π -периодическая функция ограниченной вариации, то необходимым и достаточным условием сходимости сопряженного ряда $\bar{\sigma}$ в точке x является существование предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} -\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg}(t/2)} dt,$$

совпадающего с суммой ряда $\bar{\sigma}(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Функцией, сопряженной к функции f , называется*

$$\bar{f}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} -\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg}(t/2)} dt.$$

В 1913 г. Лузиным в работе [3] было показано, что сопряженная функция существует почти всюду для любой 2π -периодической функции с суммируемым квадратом. Позднее Привалов показал, что сопряженная функция существует почти всюду для любой 2π -периодической суммируемой функции (см. [4]).

ТЕОРЕМА 1 (Титчмарш). *Если f — 2π -периодическая суммируемая функция, то сопряженная функция $\bar{f}$ и ее произведения на функции $\cos nx$ и $\sin nx$ при $n = 1, 2, \dots$ являются Q -интегрируемыми на $[0, 2\pi]$ и ряд Фурье- Q сопряженной функции $\bar{f}$ равен сопряженному (к ряду Фурье f) ряду, т.е. $(Q)\sigma[\bar{f}] = \bar{\sigma}[f]$.*

Под рядом Фурье- Q в теореме Титчмарша понимается тригонометрический ряд с коэффициентами, посчитанными по формулам Фурье, где интегрирование производится в смысле Q -интеграла.

В 1925 г. Колмогоров вывел для функции, сопряженной к суммируемой функции, оценку

$$\mu\{x \in [0, 2\pi] : |\bar{f}(x)| > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

(см. [5]), из которой следует, что результат Титчмарша допускает замену в формулировке Q -интеграла на A -интеграл.

В пятидесятые годы XX в. Ульянов занимался изучением A -интеграла и его приложений к теории сопряженных функций (см. [6]). Он доказал следующую теорему (см. [7]–[9]).

ТЕОРЕМА 2 (Ульянов). *Если f – 2π -периодическая суммируемая функция, а φ – такая 2π -периодическая ограниченная функция, что ее сопряженная функция $\bar{\varphi}$ также ограничена, то $\bar{f}\varphi$ является A -интегрируемой на $[0, 2\pi]$ функцией, и имеет место равенство Рисса*

$$(A) \int_0^{2\pi} \bar{f}(x)\varphi(x) dx = -(L) \int_0^{2\pi} f(x)\bar{\varphi}(x) dx.$$

Кроме того, Ульяновым были рассмотрены некоторые классы A -интегрируемых функций (см. [10; с. 658–663]):

ТЕОРЕМА 3 (Ульянов). *Пусть $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ – последовательность действительных чисел, выполнены условия $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^\infty |a_n - a_{n+1}| < \infty$. Тогда обе функции, определяемые рядами*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx, \quad \bar{f}(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n \sin nx,$$

A -интегрируемы, и эти ряды являются их рядами Фурье- A .

Отметим, что A -интеграл обладает рядом отрицательных свойств. В частности, из A -интегрируемости функции на некотором отрезке $[a, b]$ не следует существование A -интеграла на подотрезке $[a', b'] \subsetneq [a, b]$. В работе [11] построен пример A -интегрируемой на отрезке функции, которая не является A -интегрируемой на любом подотрезке $[a', b'] \subsetneq [a, b]$. Но даже если интеграл существует для почти всех подотрезков (как для сопряженной функции), то нет никакой дифференциальной связи между A -интегралом и подынтегральной функцией. Кроме того, A -интеграл противоречит несобственному интегралу Лебега (см. обзор в [6]). В связи с этим рассматриваются также различные сужения A -интеграла.

С другой стороны, Q -интеграл практически не изучался ввиду его неаддитивности по функциям. В данной работе введено новое понятие Q -интеграла, получены достаточное условие его аддитивности и аналог критерия Лебега интегрируемости на множествах конечной меры, а также изучена взаимосвязь между введенным интегралом и Q -интегралом Титчмарша.

2. Обобщенный Q -интеграл и достаточное условие его аддитивности.

Рассмотрим некоторое пространство с мерой (Ω, Σ, μ) . Отметим, что определение Q -интегрируемости может быть перенесено на измеримые функции на (Ω, Σ, μ) с заменой отрезка $[a, b]$ на измеримое множество E . Более того, при определении Q -интеграла вид срезки оказывается существенным ввиду отсутствия условия (1). В связи с этим Лукашенко было предложено следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть E – измеримое множество, функция $f(x)$ измерима на E . Тогда $f(x)$ является Q -интегрируемой в обобщенном смысле на множестве E , если, полагая

$$[f(x)]_n = \begin{cases} -n & \text{при } f(x) \leq -n, \\ f(x) & \text{при } -n < f(x) \leq n, \\ n & \text{при } f(x) > n, \end{cases}$$

имеем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E [f(x)]_n dx$ существует; этот предел будем называть *обобщенным Q -интегралом* от функции $f(x)$ и обозначать $(Q_{об}) \int_E f(x) dx$.

Через $Q(E)$ будем обозначать множество Q -интегрируемых на E функций. Аналогичным образом определим $Q_{об}(E)$. Как будет показано далее (см. теорему 8), для любого измеримого множества E конечной меры $Q(E) \subseteq Q_{об}(E)$, Q - и $Q_{об}$ -интегралы совпадают на $Q(E)$. Тем самым, $Q_{об}$ -интеграл действительно обобщает Q -интеграл Титчмарша.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $f(x)$ – действительнзначные функции на множестве E , $\alpha(x) \leq \beta(x)$ при всех $x \in E$. Обозначим

$$[f(x)]_{[\alpha(x), \beta(x)]} = \begin{cases} \alpha(x) & \text{при } f(x) \leq \alpha(x), \\ f(x) & \text{при } \alpha(x) < f(x) \leq \beta(x), \\ \beta(x) & \text{при } f(x) > \beta(x). \end{cases}$$

Отметим, что $[f(x)]_n = [f(x)]_{[\alpha(x), \beta(x)]}$ при $\alpha(x) \equiv -n$ и $\beta(x) \equiv n$.

ЛЕММА 1. Верно равенство

$$[f(x) + g(x)]_{[\alpha(x), \beta(x)]} = [f(x)]_{[\alpha(x) - g(x), \beta(x) - g(x)]} + g(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что

$$[f(x)]_{[\alpha(x) - g(x), \beta(x) - g(x)]} = \begin{cases} \alpha(x) - g(x) & \text{при } f(x) + g(x) \leq \alpha(x), \\ f(x) & \text{при } \alpha(x) < f(x) + g(x) \leq \beta(x), \\ \beta(x) - g(x) & \text{при } f(x) + g(x) > \beta(x). \end{cases}$$

Но этому же выражению равно и $[f(x) + g(x)]_{[\alpha(x), \beta(x)]} - g(x)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $f(x)$ – действительнзначные функции на множестве E , $\alpha(x) \leq \beta(x)$, $f(x) \leq \gamma(x)$ и $\alpha(x) \leq \gamma(x)$ при всех $x \in E$. Тогда $\alpha(x) \leq [f(x)]_{[\alpha(x), \beta(x)]} \leq \gamma(x)$ при всех $x \in E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной точки $x \in E$ возможны следующие случаи:

- а) если $f(x) \leq \alpha(x)$, то $\alpha(x) = [f(x)]_{[\alpha(x), \beta(x)]} \leq \gamma(x)$;
- б) если $\alpha(x) < f(x) \leq \beta(x)$, то $\alpha(x) < f(x) = [f(x)]_{[\alpha(x), \beta(x)]} \leq \gamma(x)$;
- в) если $f(x) > \beta(x)$, то $\alpha(x) \leq \beta(x) = [f(x)]_{[\alpha(x), \beta(x)]} < f(x) \leq \gamma(x)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mu(E) < \infty$, функция $f(x)$ является Q -интегрируемой в обобщенном смысле на E , $g(x)$ суммируема (интегрируема по Лебегу) на E . Тогда функция $f(x) + g(x)$ также Q -интегрируема в обобщенном смысле на E , и верно равенство

$$(Q_{об}) \int_E (f(x) + g(x)) dx = (Q_{об}) \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx. \quad (*)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, для начала, $g(x) \geq 0$ при всех $x \in E$.

Для доказательства утверждения достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_E [f(x) + g(x)]_n dx - \int_E ([f(x)]_n + g(x)) dx \right) = 0. \quad (**)$$

В самом деле, прибавляя к обеим частям **(**)** выражение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E ([f(x)]_n + g(x)) dx = (Q_{об}) \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx,$$

получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E [f(x) + g(x)]_n dx = (Q_{об}) \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

Итак, докажем **(**)**. С учетом леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_E [f(x) + g(x)]_n dx - \int_E ([f(x)]_n + g(x)) dx \right| \\ &= \left| \int_E ([f(x)]_{[-n-g(x), n-g(x)]} + g(x) - [f(x)]_{[-n, n]} - g(x)) dx \right| \\ &= \left| \int_E h_n(x) dx \right| \leq \int_E |h_n(x)| dx, \end{aligned}$$

где $h_n(x) = [f(x)]_{[-n-g(x), n-g(x)]} - [f(x)]_{[-n, n]}$.

Пусть значение $x \in E$ таково, что $f(x) > -n$, $f(x) < n - g(x)$. В силу неравенств $-n \geq -n - g(x)$ и $n - g(x) \leq n$ имеем в этом случае $h_n(x) = f(x) - f(x) = 0$. Кроме того, если $x \in E$ таково, что $f(x) \leq -n$, то $[f(x)]_{[-n, n]} = -n$ и

$$-n - g(x) \leq [f(x)]_{[-n-g(x), n-g(x)]} \leq -n$$

по лемме 2, откуда $|h_n(x)| \leq g(x)$. Аналогично, если значение $x \in E$ таково, что $f(x) \geq n - g(x)$, то $[f(x)]_{[-n-g(x), n-g(x)]} = n - g(x)$ и

$$n - g(x) \leq [f(x)]_{[-n, n]} \leq n, \quad |h_n(x)| \leq g(x).$$

Обозначим $F_n^1 = \{x \in E \mid f(x) \leq -n\}$, $F_n^2 = \{x \in E \mid f(x) \geq n - g(x)\}$. Тогда из проведенных выше рассуждений следует, что

$$|h_n(x)| \leq g(x) \chi_{F_n^1 \cup F_n^2}(x) \leq g(x) \chi_{F_n^1}(x) + g(x) \chi_{F_n^2}(x),$$

где $\chi_F(x)$ — характеристическая функция множества F .

Отметим, что $F_n^2 = \{x \in E \mid f(x) + g(x) \geq n\}$. В силу конечности меры множества E и измеримости функций f и $f + g$ имеем $\mu(F_n^1) \rightarrow 0$ и $\mu(F_n^2) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как g суммируема на E , то

$$\int_E g(x) \chi_{F_n^j}(x) dx = \int_{F_n^j} g(x) dx \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ и $j = 1, 2$. Следовательно,

$$\int_E |h_n(x)| dx \leq \int_E g(x) \chi_{F_n^1}(x) dx + \int_E g(x) \chi_{F_n^2}(x) dx \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, и соотношение $(**)$ доказано.

Рассмотрим случай суммируемой функции g произвольного знака. Представим ее в виде разности $g = g_+ - g_-$ неотрицательных суммируемых функций. С учетом доказанного выше следующие функции будут $Q_{\text{об}}$ -интегрируемы: $f + g_+$, $-(f + g_+)$, $-(f + g_+) + g_- = -(f + g)$, $f + g$. Равенство $(*)$ проверяется непосредственно.

Следующий пример показывает, что аналог теоремы 4 для Q -интеграла неверен. Через $\theta(x)$ будем обозначать функцию Хевисайда, т.е.

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1. Положим $s_n = \sum_{k=1}^n 1/k^2$, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pi^2/6 < 2$. Зададим функцию $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $h(0) = 0$, $h(x) = n^2$ при $x \in (s_{n-1}, s_n]$, $n \geq 1$, $h(x) = 0$ при $x > s$, $h(x) = -h(-x)$ при $x < 0$. Тогда $h(x) \in Q([-2, 2])$, но

$$h(x) + \theta(x) \in Q_{\text{об}}([-2, 2]) \setminus Q([-2, 2]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $f(x) = h(x) + \theta(x)$ не является Q -интегрируемой на $[-2, 2]$. Достаточно проверить, что

$$\Delta_n = \int_{-2}^2 ([f(x)]_{n;0} - [f(x)]_{n-1;0}) dx \not\rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. В самом деле, при $n = k^2$ имеем $\Delta_n = -1$.

Интересно отметить, что в работе [12] изучаются условия сходимости интегралов Курцвейля–Хенстока от срезов вида $[f(x)]_{[-N, M]}$, где M, N – положительные действительные числа, к интегралу Курцвейля–Хенстока от функции $f(x)$ при $M, N \rightarrow \infty$. При этом оказывается, что для срезов вида

$$[f(x)]_{[-N, M];0} = \begin{cases} f(x) & \text{при } -N \leq f(x) \leq M, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

аналогичные результаты уже не будут иметь места.

3. Аналоги критерия Лебега для $Q_{об}$ - и Q -интегралов. Рассмотрим множества $F_n(f) = \{x \in E \mid |f(x)| \geq n\}$ при всех $n \geq 0$. Имеет место следующий критерий интегрируемости функций по Лебегу на множествах конечной меры (см. [13; теорема 17.4]):

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mu(E) < \infty$, функция $f(x)$ измерима на E . Тогда $f(x) \in L(E)$, если и только если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(F_n(f)) < \infty.$$

Аналогичный критерий интегрируемости верен и для $Q_{об}$ -интеграла. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\begin{aligned} E^+(f) &= \{x \in E \mid f(x) \geq 0\}, & E^-(f) &= E \setminus E^+(f), \\ E_n(f) &= F_{n-1}(f) \setminus F_n(f) = \{x \in E \mid n-1 \leq |f(x)| < n\}, & n &\geq 1, \\ F_n^\pm(f) &= F_n(f) \cap E^\pm(f), & E_n^\pm(f) &= E_n(f) \cap E^\pm(f), \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть $\mu(E) < \infty$, функция $f(x)$ измерима на E и заданы некоторые множества $A_n \subseteq \{x \in E \mid n-1 \leq |f(x)| \leq n\}$. Положим $A_n^\pm = A_n \cap E^\pm(f)$,

$$\delta_n = \int_{A_n} f(x) dx - n[\mu(A_n^+) - \mu(A_n^-)], \quad n \geq 1.$$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $a_n^\pm = \mu(A_n^\pm)$, $a_n = a_n^+ - a_n^-$. Нетрудно видеть, что

$$(n-1)a_n^+ \leq \int_{A_n^+} f(x) dx \leq na_n^+, \quad -na_n^- \leq \int_{A_n^-} f(x) dx \leq -(n-1)a_n^-.$$

Следовательно,

$$(n-1)a_n^+ - na_n^- \leq \int_{A_n} f(x) dx \leq na_n^+ - (n-1)a_n^-.$$

Тем самым для $\delta_n = \int_{A_n} f(x) dx - na_n$ имеем неравенство $-a_n^+ \leq \delta_n \leq a_n^-$, откуда $|\delta_n| \leq a_n^+ + a_n^- = \mu(A_n)$. Но тогда

$$\sum_{n=1}^m |\delta_n| \leq \sum_{n=1}^m \mu(A_n) \leq 2\mu(\{x \in E \mid |f(x)| \leq m\}) \leq 2\mu(E).$$

Таким образом, $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| \leq 2\mu(E) < \infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ сходится абсолютно.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mu(E) < \infty$ и $f(x)$ измерима на E . Тогда $f(x) \in Q_{об}(E)$, если и только если сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\mu(F_n^+(f)) - \mu(F_n^-(f))].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$r_n = \mu(F_n^+(f)) - \mu(F_n^-(f)), \quad a_n = \mu(E_n^+(f)) - \mu(E_n^-(f)).$$

Так как $F_n^\pm(f) \subseteq F_{n-1}^\pm(f)$ и $E_n^\pm(f) = F_{n-1}^\pm(f) \setminus F_n^\pm(f)$, то $a_n = r_{n-1} - r_n$.

Положим $\delta_n = \int_{E_n(f)} f(x) dx - na_n$. Получим

$$\begin{aligned} \int_E [f(x)]_m dx &= \sum_{n=1}^m \int_{E_n(f)} f(x) dx + m\mu(F_m^+(f)) - m\mu(F_m^-(f)) \\ &= \sum_{n=1}^m (\delta_n + na_n) + mr_m = \sum_{n=1}^m \delta_n + \sum_{n=1}^m n(r_{n-1} - r_n) + mr_m \\ &= \sum_{n=1}^m \delta_n + \sum_{n=0}^{m-1} r_n. \end{aligned}$$

Но ряд $\sum_{n=1}^\infty \delta_n$ сходится по лемме 3 при $A_n = E_n(f)$. Следовательно, $f(x) \in Q_{\text{об}}(E)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=0}^\infty r_n$.

Воспользуемся теоремой 6 для построения примера двух Q -интегрируемых функций, сумма которых не Q -интегрируема в обобщенном смысле.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & x \in \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right], \quad n \geq 1, \\ 0, & x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Положим $h_1(x) = g(x) - g(x+1)$, $h_2(x-1) = g(x) - g(x+1)$. Тогда $h_1(x), h_2(x) \in Q([-2, 2])$, но

$$h_1(x) + h_2(x) \notin Q_{\text{об}}([-2, 2]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что интеграл от любой срезки функций $h_1(x)$ и $h_2(x)$ равен нулю. Тем самым, $h_1(x), h_2(x) \in Q([-2, 2])$.

Обозначим $f(x) = h_1(x) + h_2(x)$, $E = [-2, 2]$. Покажем, что $f(x) \notin Q_{\text{об}}(E)$. Пусть $n \geq 1$. Для начала отметим, что $\mu(\{x \in E \mid g(x) \geq n/2\}) = 1/\sqrt{n}$. Рассмотрим множества $F_n^\pm(f)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu(F_n^+(f)) &= 2\mu(F_n^+(g)) = 2\mu\left(\left\{x \in E \mid g(x) \geq \frac{2n}{2}\right\}\right) = \frac{2}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \\ \mu(F_n^-(f)) &= \mu\left(\left\{x \in E \mid g(x) \geq \frac{n}{2}\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^\infty \left[\mu(F_n^+(f)) - \mu(F_n^-(f)) \right] = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{n}},$$

и ряд расходится. По теореме 6 имеем $f(x) \notin Q_{\text{об}}(E)$.

Перейдем к критерию Q -интегрируемости функций. Рассмотрим множества

$$G_1(f) = \{x \in E \mid |f(x)| \leq 1\}, \quad G_n(f) = \{x \in E \mid n-1 < |f(x)| \leq n\}, \quad n > 1.$$

Кроме того, обозначим $G_n^\pm(f) = G_n(f) \cap E^\pm(f)$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\mu(E) < \infty$ и $f(x)$ измерима на E . Тогда $f(x) \in Q(E)$, если и только если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n[\mu(G_n^+(f)) - \mu(G_n^-(f))].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $a_n^\pm = \mu(G_n^\pm(f))$, $a_n = a_n^+ - a_n^-$. Положим $\delta_n = \int_{G_n(f)} f(x) dx - na_n$. По лемме 3 при $A_n = G_n(f)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ сходится абсолютно. Тогда

$$\int_E [f(x)]_{m;0} dx = \sum_{n=1}^m \int_{G_n(f)} f(x) dx = \sum_{n=1}^m (\delta_n + na_n) = \sum_{n=1}^m \delta_n + \sum_{n=1}^m na_n,$$

и $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_E [f(x)]_{m;0} dx$ существует тогда и только тогда, когда сходится $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$.

4. О соотношении $Q_{\text{об}}$ - и Q -интегралов. Из примера 1 следует, что множество $Q_{\text{об}}(E) \setminus Q(E)$ непусто при условии $0 < \mu(E) < \infty$. С другой стороны, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\mu(E) < \infty$ и $f(x) \in Q(E)$. Тогда $f(x) \in Q_{\text{об}}(E)$ и

$$(Q_{\text{об}}) \int_E f(x) dx = (Q) \int_E f(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$H_0(f) = E, \quad H_n(f) = \{x \in E \mid |f(x)| > n\}, \quad n \geq 1, \\ H_n^\pm(f) = H_n(f) \cap E_n^\pm(f).$$

Отметим, что $G_n(f) = H_{n-1}(f) \setminus H_n(f)$. Кроме того, $f(x) \in Q_{\text{об}}(E)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} [\mu(H_n^+(f)) - \mu(H_n^-(f))]$. В самом деле, доказательство этого факта дословно повторяет доказательство теоремы 6 при замене множеств $E_n(f)$ и $F_n(f)$ на $G_n(f)$ и $H_n(f)$ соответственно.

Обозначим $h_n = \mu(H_n^+(f)) - \mu(H_n^-(f))$ при $n \geq 0$, $s_m = \sum_{n=0}^{m-1} h_n$ при $m \geq 1$. Так как $f(x) \in Q(E)$, $\mu(G_n^+(f)) - \mu(G_n^-(f)) = h_{n-1} - h_n$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n(h_{n-1} - h_n)$ сходится по теореме 7. Следовательно, сходится последовательность

$$c_m = \sum_{n=1}^m n(h_{n-1} - h_n) = s_m - mh_m.$$

Обозначим $c = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m$. Из соотношений $s_{m+1} = s_m + h_m$, $mh_m = s_m - c_m$ получим

$$s_{m+1} = \frac{m+1}{m} s_m - \frac{c_m}{m}, \quad \frac{s_{m+1}}{m+1} = \frac{s_m}{m} - \frac{c_m}{m(m+1)}.$$

Таким образом,

$$\frac{s_m}{m} = s_1 - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{c_n}{n(n+1)}.$$

Кроме того, $h_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, откуда $s_m/m = c_m/m + h_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Так как c_n ограничены в совокупности, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n/(n(n+1))$ сходится абсолютно. Следовательно,

$$s_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n(n+1)}, \quad \frac{s_m}{m} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{c_n}{n(n+1)}.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть N таково, что $|c_n - c| \leq \varepsilon$ при всех $n \geq N$. Тогда при $m \geq N$ имеем

$$\frac{s_m}{m} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{c_n}{n(n+1)} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{c + \varepsilon}{n(n+1)} = (c + \varepsilon) \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{c + \varepsilon}{m},$$

откуда $s_m \leq c + \varepsilon$. Аналогично $s_m \geq c - \varepsilon$ при $m \geq N$. Тем самым, $s_m \rightarrow c$ при $m \rightarrow \infty$, т.е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ сходится, $f(x) \in Q_{об}(E)$.

По определению $Q_{об}$ - и Q -интегралов имеем

$$\begin{aligned} & (Q_{об}) \int_E f(x) dx - (Q) \int_E f(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E ([f(x)]_n - [f(x)]_{n;0}) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{H_n(f)} n \frac{f(x)}{|f(x)|} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n[\mu(H_n^+(f)) - \mu(H_n^-(f))] = \lim_{n \rightarrow \infty} nh_n. \end{aligned}$$

Но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n = \lim_{m \rightarrow \infty} mh_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (s_m - c_m) = 0,$$

и интегралы совпадают.

Автор благодарна своему научному руководителю профессору Т.П. Лукашенко за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. С. Titchmarsh, "On conjugate functions", *Proc. London Math. Soc.* (2), **29** (1929), 49–80.
- [2] W. H. Young, "Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fouriershen Reihe", *Münchener Sitzungsberichte*, **41** (1911), 261–371.
- [3] N. Lusin, "Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier", *Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris)*, **156** (1913), 1655–1658.
- [4] И. И. Привалов, "Интеграл Cauchy", *Изв. ун-та, физ.-матем. фак.*, Саратов, **1** (1918), 1–94.
- [5] A. Kolmogoroff, "Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier", *Fund. Math.*, **7** (1925), 24–29.
- [6] Т.П. Лукашенко, "А-интеграл и его применение в исследованиях П.Л. Ульянова и других математиков", *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 5, 77–82.
- [7] П.Л. Ульянов, "Некоторые вопросы А-интегрирования", *Докл. АН СССР*, **102:6** (1955), 1077–1080.

- [8] П. Л. Ульянов, “ A -интеграл и его применение к теории тригонометрических рядов”, *УМН*, **10**:1 (1955), 189–191.
- [9] П. Л. Ульянов, “ A -интеграл и сопряженные функции”, *Математика. Том VIII*, Уч. записки Моск. гос. ун-та, **181**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1956, 139–157.
- [10] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [11] Т. П. Лукашенко, “Об A -интегрируемости функций”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, № 5, 59–63.
- [12] R. Bianconi, “On the convergence of the integrals of a truncated Henstock–Kurzweil integrable function”, *Real Anal. Exchange*, **23**:1 (1997/98), 247–250.
- [13] М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов, *Мера и интеграл*, Университетский учебник, Факториал, М., 1998.

М. П. Ефимова

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: efimova.margarita@gmail.com

Поступило

08.07.2010

Исправленный вариант

14.10.2010