Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. М. Эминян, О средних значениях функции $\tau_k(n)$
в некоторых последовательностях натуральных чисел,
Матем. заметки, 2011, том 90, выпуск 3, 454–463

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:30:53

О средних значениях функции $\tau_k(n)$ в некоторых последовательностях натуральных чисел

К. М. Эминян

В статье получена асимптотическая формула для среднего значения функции $\tau_k(n)$ – числа решений уравнения $x_1 \cdots x_k = n$ в натуральных числах $x_1, \dots, x_k$ – в некоторых специальных последовательностях натуральных чисел.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Пусть $q > 1$, $n = c_0 + c_1q + \cdots + c_\nu q^\nu$, $0 \leq c_0, c_1, \dots, c_\nu < q$, – разложение натурального числа n в системе счисления с основанием q . Тогда $S(n) = c_0 + c_1 + \cdots + c_\nu$.

В работе [1] Гельфонд доказал следующую теорему: для числа целых n , $n \leq x$, удовлетворяющих условиям

$$n \equiv l \pmod{m}, \quad \sum_{b=0}^{\nu} c_b \equiv a \pmod{p}, \quad n = \sum_{b=0}^{\nu} c_b q^b,$$

где $q > 1$, $p > 1$, $m > 1$; l, a – целые и $(p, q-1) = 1$, справедлива асимптотическая формула

$$T_0(x) = \frac{x}{mp} + O(x^\lambda), \quad \lambda < 1,$$

где λ не зависит от x, m, l, a .

В частности, если $p = q = 2$, то $\lambda = (\ln 3)/(2 \ln 2)$. В указанном частном случае автор получил в [2] асимптотическую формулу для суммы вида

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ \sum c_b \equiv a \pmod{2}}} \tau(n),$$

где a равно 0 или 1.

Доказательство теоремы Гельфонда основано на его оценке тригонометрической суммы, которую мы цитируем в лемме 1.

В настоящей статье продолжают исследования в данном направлении. Основным результатом статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k \geq 2$, $p > 1$, $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число. Пусть q – столь большое натуральное число, что

$$\theta(q) = \frac{\ln(6(1 + \ln q))}{\ln q} < \frac{1}{k},$$

причем $(q-1, p) = 1$. Пусть $a \in \mathbb{Z}$ – произвольное число. Тогда справедлива асимптотическая формула.

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ S(n) \equiv a \pmod{2}}} \tau_k(n) = \frac{1}{p} \sum_{n \leq x} \tau_k(n) + O(x^{1-1/k+\theta(q)+\varepsilon}) + O(x^{\lambda+\varepsilon}),$$

где $\lambda \in (0, 1)$ зависит лишь от p и q .

Для доказательства этой теоремы помимо леммы 1 требуется оценка интеграла от модуля тригонометрической суммы, данная в лемме 4.

2. Леммы.

ЛЕММА 1. Пусть α – произвольное вещественное число, $p > 1$, z – целые числа, $(z, p) = 1$, $(p, q-1) = 1$, $Q > 1$,

$$S_Q(\alpha, z) = \sum_{n < q^Q} \exp\left\{\alpha n + \frac{z}{p} S(n)\right\}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|S_Q(\alpha, z)| \leq q^{\lambda Q},$$

где $\lambda \in (0, 1)$ зависит лишь от p и q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1].

ЛЕММА 2. Пусть $T_0, T \geq \delta > 0$ – вещественные числа, f – комплекснозначная непрерывная на отрезке $[T_0, T_0 + T]$ функция, имеющая непрерывную производную в интервале $(T_0, T_0 + T)$, и пусть F – множество вещественных чисел из отрезка $[T_0 + \delta/2, T_0 + T - \delta/2]$ такое, что $|t - t'| > \delta$ для любых различных t и t' из F . Тогда

$$\sum_{t \in F} |f(t)| \leq \frac{1}{\delta} \int_{T_0}^{T_0+T} |f(t)| dt + \int_{T_0}^{T_0+T} |f'(t)| dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [3].

ЛЕММА 3. Пусть $k \geq 2$, $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число, $|f(n)| \leq 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| \sum_{n \leq x} \tau_k(n) f(n) \right| \ll x^\varepsilon \sum_{l \leq x^{1-1/k}} \left| \sum_{a(l) < ln \leq x} f(ln) \right| + x^{1-1/k+\varepsilon},$$

где $a(l)$ зависит лишь от l и меньше x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k = 2$. Воспользуемся формулой

$$\tau(n) = 2 \sum_{0 < l < \sqrt{n}} \frac{1}{l} \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i(ny/l)} + \delta, \quad (1)$$

где $\delta = 1$ или $\delta = 0$ в зависимости от того, является ли n квадратом целого числа или нет (см. [4; с. 53]).

Имеем

$$\left| \sum_{n \leq x} \tau(n) f(n) \right| \ll \sum_{l < \sqrt{x}} \left| \sum_{l^2 < ln \leq x} f(ln) \right| + \sqrt{x}.$$

Пусть теперь $k > 2$. Справедливо тождество

$$S = \sum_{n \leq x} \tau_k(n) f(n) = \sum_{mn \leq x} \tau_{k-2}(m) \tau(n) f(mn) = S_1 + S_2,$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{mn \leq x; n < (mn)^{2/k}} \tau_{k-2}(m) \tau(n) f(mn), \\ S_2 &= \sum_{mn \leq x; m \leq (mn)^{1-2/k}} \tau_{k-2}(m) \tau(n) f(mn); \end{aligned}$$

здесь мы по определению полагаем, что $\tau_1(m)$ тождественно равно 1.

Оценим сумму S_2 :

$$|S_2| \leq \sum_{m \leq x^{1-2/k}} \tau_{k-2}(m) \left| \sum_{m^{k/(k-2)} \leq mn \leq x} \tau(n) f(mn) \right|.$$

Снова пользуясь формулой (1), имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{m \leq x^{1-2/k}} \tau_{k-2}(m) \left| \sum_{m^{k/(k-2)} \leq mn \leq x} \tau(n) f(mn) \right| \\ & \leq 2 \sum_{m \leq x^{1-2/k}} \tau_{k-2}(m) \left| \sum_{m^{k/(k-2)} \leq mn \leq x} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{n}}} 1 \right) f(mn) \right| \\ & \quad + \sum_{m \leq x^{1-2/k}} \tau_{k-2}(m) \sum_{n^2 \leq x/m} 1 \\ & \ll \sum_{m \leq x^{1-2/k}} \tau_{k-2}(m) \sum_{d < \sqrt{x/m}} \left| \sum_{\substack{m^{k/(k-2)} \leq dmn \leq x \\ d^2 m < dmn}} f(dmn) \right| + \sqrt{x} \sum_{m \leq x^{1-2/k}} \frac{\tau_{k-2}(m)}{\sqrt{m}} \\ & \ll \sum_{l < x^{1-1/k}} \left(\sum_{\substack{md=l \\ m \leq x^{1-2/k} \\ d < \sqrt{x/m}}} \tau_{k-2}(m) \right) \left| \sum_{\substack{m^{k/(k-2)} \leq ln \leq x \\ dl < ln}} f(ln) \right| + x^{1-1/k+\varepsilon}. \quad (2) \end{aligned}$$

Пусть $l = dm$, $d < \sqrt{x/m}$, $m \leq x^{1-2/k}$, $a(l, m) = \max([m^{k/(k-2)}] + 1, dl)$. Пусть $a(l)$ – то $a(l, m)$, при котором модуль суммы

$$\sum_{a(l, m) < ln \leq x} f(ln)$$

максимален. Тогда

$$\begin{aligned} |S_2| &\ll \sum_{l < x^{1-1/k}} \left(\sum_{\substack{m|l, m \leq x^{1-2/k} \\ l/m < \sqrt{x/m}}} \tau_{k-2}(m) \right) \left| \sum_{a(l) < ln \leq x} f(ln) \right| + x^{1-1/k+\varepsilon} \\ &\ll x^\varepsilon \sum_{l < x^{1-1/k}} \left| \sum_{a(l) < ln \leq x} f(ln) \right| + x^{1-1/k+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Осталось оценить сумму S_1 .

Если $k = 3$, то $\tau_{k-2}(m) = 1$, $2/k = 1 - 1/k$, поэтому

$$|S'_1| \leq \sum_{l < x^{1-1/k}} \tau(l) \left| \sum_{l^{k/2} < lm \leq x} f(lm) \right| \ll x^\varepsilon \sum_{l < x^{1-1/k}} \left| \sum_{l^{k/2} < lm \leq x} f(lm) \right|.$$

Если $k = 4$, то $2/k = 1 - 2/k$, поэтому

$$|S'_1| \leq \sum_{l < x^{1-2/k}} \tau(l) \left| \sum_{l^{k/2} < lm \leq x} \tau(m) f(lm) \right|.$$

Последняя сумма оценивается так же, как S_2 .

Пусть $k \geq 5$. Справедливо тождество

$$S_1 = S'_1 + S''_1,$$

где

$$\begin{aligned} S'_1 &= \sum_{n < x^{2/k}} \tau(n) \sum_{\substack{n^{k/2} < m_1 m_2 n \leq x \\ m_2 < (m_1 m_2 n)^{2/k}}} \tau_{k-4}(m_1) \tau(m_2) f(m_1 m_2 n), \\ S''_1 &= \sum_{n < x^{2/k}} \tau(n) \sum_{\substack{n^{k/2} < m_1 m_2 n \leq x \\ m_1 n \leq (m_1 m_2 n)^{1-2/k}}} \tau_{k-4}(m_1) \tau(m_2) f(m_1 m_2 n). \end{aligned}$$

Для S''_1 имеем неравенство

$$|S''_1| \leq \sum_{l \leq x^{1-2/k}} \left(\sum_{n|l, n < x^{2/k}} \tau(n) \tau_{k-4}\left(\frac{l}{n}\right) \right) \left| \sum_{\substack{n^{k/2} < lm_2 \leq x \\ l^{k/(k-2)} < lm_2}} \tau(m_2) f(lm_2) \right|.$$

Последняя сумма оценивается так же, как S_2 .

Рассмотрим сумму S'_1 , которая равна

$$\sum_{n < x^{2/k}} \tau(n) \sum_{m_2 < x^{2/k}} \tau(m_2) \sum_{\substack{n^{k/2} < m_1 m_2 n \leq x \\ m_2^{k/2} < (m_1 m_2 n)}} \tau_{k-4}(m_1) f(m_1 m_2 n).$$

Заметим, что в результате проведенного преобразования $\tau_{k-2}(m)$ заменилось на $\tau_{k-4}(m_1)$. Если $k \neq 5, 6$, будем повторять это преобразование до тех пор, пока $\tau_{k-4}(m_1)$ заменится на $\tau_1(m_1)$ или $\tau(m_1)$ (в зависимости от четности k).

Если k – нечетное число, то в результате придем к неравенству

$$|S'_1| \ll x^\varepsilon \sum_{l < x^{1-1/k}} \left| \sum_{a(l) < lm \leq x} f(lm) \right|,$$

где $a(l)$ – некоторое число, меньшее x и возможно не совпадающее с $a(l)$, возникшим при оценке S_2 .

Если же k – четное число, то придем к неравенству

$$|S'_1| \ll x^{\varepsilon/2} \sum_{l < x^{1-2/k}} \left| \sum_{b(l) < lm \leq x} \tau(m) f(lm) \right|,$$

где $b(l) < x$.

Последняя сумма оценивается так же, как S_2 .

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $Q > 1$,

$$S_Q(\alpha, z) = \sum_{n < q^Q} e^{2\pi i(\alpha n + (z/p)S(n))}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\int_0^1 |S_Q(\alpha, z)| d\alpha \leq q^{Q\theta},$$

где $\theta = \ln(6(1 + \ln q))/\ln q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем тождество

$$S_Q(\alpha, z) = \prod_{r=0}^{Q-1} \sum_{n=0}^{q-1} e^{2\pi i n(\alpha q^r + z/p)}.$$

Разобьем промежутки интегрирования на q равных частей

$$\int_0^1 |S_Q(\alpha, z)| d\alpha = \sum_{j=0}^{q-1} \int_{j/q}^{(j+1)/q} |S_Q(\alpha, z)| d\alpha.$$

Сделаем во всех полученных интегралах замены переменных

$$\alpha = \frac{x+j}{q}, \quad j = 0, 1, \dots, q-1.$$

Тогда получим

$$\int_0^1 |S_Q(\alpha, z)| d\alpha = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \int_0^1 \left| S_Q\left(\frac{x+j}{q}, z\right) \right| dx.$$

Рассмотрим $S_Q((x+j)/q, z)$. Выделяя в произведении первый сомножитель, имеем тождество

$$\begin{aligned} S_Q\left(\frac{x+j}{q}, z\right) &= \sum_{n=0}^{q-1} e^{2\pi i n((x+j)/q + z/p)} \prod_{r=1}^{Q-1} \sum_{n=0}^{q-1} e^{2\pi i n((x+j)q^r/q + z/p)} \\ &= \sum_{n=0}^{q-1} e^{2\pi i n((x+j)/q + z/p)} S_{Q-1}(x, z). \end{aligned}$$

Пусть

$$h_j(x) = \left| \sum_{n=0}^{q-1} e^{2\pi i n((x+j)/q + z/p)} \right|.$$

Имеем неравенство

$$\int_0^1 |S_Q(\alpha)| d\alpha \leq \int_0^1 \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} h_j(x) |S_{Q-1}(x)| dx.$$

Получим равномерную по x оценку суммы $\sum_{j=0}^{q-1} h_j(x)$. Неравенство $h_j(x) \leq q$ тривиально.

Далее, если $z/p + (x+j)/q \notin \mathbb{Z}$, то

$$h_j(x) = \left| \frac{1 - e^{2\pi i q((x+j)/q + z/p)}}{1 - e^{2\pi i ((x+j)/q + z/p)}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \pi((x+j)/q + z/p)|} \leq \frac{1}{2\|(x+j)/q + z/p\|},$$

где $\|x\|$ – расстояние от x до ближайшего к нему целого числа. Итак,

$$h_j(x) \leq \min\left(q, \frac{1}{2\|(x+j)/q + z/p\|}\right).$$

Оценим сумму

$$\frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \min\left(q, \frac{1}{2\|(x+j)/q + z/p\|}\right) \leq \frac{6}{q}(q + q \ln q) = 6(1 + \ln q)$$

(см., например, [5; с. 66, начало доказательства леммы 6]).

Получено неравенство

$$\int_0^1 |S_Q(\alpha)| d\alpha \leq 6(1 + \ln q) \int_0^1 |S_{Q-1}(\alpha)| d\alpha,$$

справедливое для любого Q , большего 1. Из него следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S_Q(\alpha)| d\alpha &\leq (6(1 + \ln q))^{Q-1} \int_0^1 |S_1(\alpha)| d\alpha \\ &\leq (6(1 + \ln q))^{Q-1} \int_0^1 \min\left(q, \frac{1}{\|\alpha + z/p\|}\right) d\alpha. \end{aligned}$$

Оценим последний интеграл. Поскольку функция $\|x\|$ является периодической с периодом 1 и четной,

$$\int_0^1 \min\left(q, \frac{1}{\|\alpha + z/p\|}\right) d\alpha = 2 \int_0^{1/2} \min\left(q, \frac{1}{\|\alpha\|}\right) d\alpha \leq 2 + 2 \int_{1/q}^{1/2} \frac{d\alpha}{\alpha} < 2 + 2 \log q.$$

Отсюда имеем

$$\int_0^1 |S_Q(\alpha)| d\alpha \ll (6(1 + \ln q))^Q = q^{Q \ln(6(1 + \ln q)) / \ln q},$$

что и требовалось доказать.

3. Доказательство теоремы. 1. Подготовка к применению большого решета. Имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ S(n) \equiv a \pmod{2}}} \tau_k(n) &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{p} \sum_{z=0}^{p-1} \tau_k(n) e^{2\pi i(z(S(n)-a))/p} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{n \leq x} \tau_k(n) + \frac{1}{p} \sum_{z=1}^{p-1} e^{-2\pi i a z/p} \sum_{n \leq x} \tau_k(n) e^{2\pi i z S(n)/p}. \end{aligned}$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно при любом нецелом z/p оценить сумму

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n) e^{2\pi i z S(n)/p}.$$

Применим к ней лемму 3:

$$\left| \sum_{n \leq x} \tau_k(n) e^{2\pi i z S(n)/p} \right| \ll W x^\varepsilon + x^{1-1/k+\varepsilon},$$

где

$$W = \sum_{l \leq x^{1-1/k}} \left| \sum_{a(l) < l n \leq x} e^{2\pi i((z/p)S(ln))} \right|,$$

$a(l) < x$. Пусть $H \in \mathbb{N}$, $x \in [q^{H-1}, q^H)$, $H \geq H_0 > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} W &\leq \sum_{l \leq x^{1-1/k}} \frac{1}{l} \sum_{b=1}^l \left| \sum_{a(l) < n \leq x} e^{2\pi i((b/l)n + (z/p)S(n))} \right| \\ &= \sum_{l \leq x^{1-1/k}} \frac{1}{l} \sum_{b=1}^l \left| \sum_{n < q^H} e^{2\pi i((b/l)n + (z/p)S(n))} \sum_{a(l) < n_1 \leq x} \int_0^1 e^{2\pi i y(n_1 - n)} dy \right| \\ &\leq \int_0^1 \sum_{l < x^{1-1/k}} \frac{1}{l} \sum_{b=1}^l \left| \sum_{a(l) < n_1 \leq x} e^{2\pi i y n_1} \right| \left| \sum_{n < q^H} e^{2\pi i((b/l-y)n + (z/p)S(n))} \right| dy \\ &\leq \int_0^1 \min\left(x, \frac{1}{\|y\|}\right) \sum_{l < x^{1-1/k}} \frac{1}{l} \sum_{b=1}^l \left| \sum_{n < q^H} e^{2\pi i((b/l-y)n + (z/p)S(n))} \right| dy. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$S_H(\alpha, z) = \sum_{n < q^H} e^{2\pi i(\alpha n + (z/p)S(n))}.$$

Справедливо тождество

$$S_H(\alpha, z) = \prod_{l=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{q-1} e^{2\pi i u(\alpha q^l + z/p)}. \quad (3)$$

Преобразуем сумму

$$\begin{aligned} \sum_{l < x^{1-1/k}} \frac{1}{l} \sum_{b=1}^l \left| S_H\left(\frac{b}{l} - y, z\right) \right| &= \sum_{d < x^{1-1/k}} \sum_{l \leq x^{1-1/k}} \frac{1}{l} \sum_{\substack{b=1 \\ (b,l)=d}}^l \left| S_H\left(\frac{b}{l} - y, z\right) \right| \\ &= \sum_{d < x^{1-1/k}} \frac{1}{d} \sum_{l_1 \leq (x^{1-1/k})/d} \frac{1}{l_1} \sum_{b_1=1}^{l_1} \left| S_H\left(\frac{b_1}{l_1} - y, z\right) \right| \\ &\ll \log x \sum_{l_1 < x^{1-1/k}} \frac{1}{l_1} \sum_{b_1=1}^{l_1} \left| S_H\left(\frac{b_1}{l_1} - y, z\right) \right|, \end{aligned}$$

где штрих означает, что $(b_1, l_1) = 1$.

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{l_1 < x^{1-1/k}} \frac{1}{l_1} \sum_{b_1=1}^{l_1} \left| S_H\left(\frac{b_1}{l_1} - y, z\right) \right| \\ \ll \sum_{r \leq (1-1/k) \log_q x + 1} q^{-r+1} \sum_{q^{r-1} \leq l_1 < q^r} \sum_{b_1=1}^{l_1} \left| S_H\left(\frac{b_1}{l_1} - y, z\right) \right| \\ \leq \sum_{r \leq H/2} q^{-r+1} \sum_{q^{r-1} \leq l_1 < q^r} \sum_{b_1=1}^{l_1} \left| S_H\left(\frac{b_1}{l_1} - y, z\right) \right| \\ + \sum_{H/2 < r \leq (1-1/k) \log_q x + 1} q^{-r+1} \sum_{q^{r-1} \leq l_1 < q^r} \sum_{b_1=1}^{l_1} \left| S_H\left(\frac{b_1}{l_1} - y, z\right) \right|. \end{aligned}$$

При $r < H/2$ воспользуемся тождеством

$$\left| S_H\left(\frac{b_1}{q_1} - y, z\right) \right| = \left| S_{2r}\left(\frac{b_1}{q_1} - y, z\right) \right| \left| S_{H-2r}\left(\left(\frac{b_1}{q_1} - y\right) q^{2r}, z\right) \right|,$$

которое сразу следует из (3), и леммой 1:

$$\left| S_{H-2r}\left(\left(\frac{b_1}{q_1} - y\right) q^{2r}, z\right) \right| \ll q^{(H-2r)\lambda+1} \ll x^\lambda q^{-2r\lambda+1},$$

$0 < \lambda < 1$, справедливой при $z/p \notin \mathbb{Z}$.

Таким образом,

$$W \ll x^\lambda \log x \sum_{r \leq H/2} q^{-r-2r\lambda+1} \int_0^1 \min\left(x, \frac{1}{\|y\|}\right) \sum_{q^{r-1} \leq l_1 < q^r} \sum_{b_1=1}^{l_1'} \left| S_{2r}\left(\frac{b_1}{l_1} - y, z\right) \right| dy \\ + \log x \int_0^1 \min\left(x, \frac{1}{\|y\|}\right) \sum_{H/2 < r \leq (1-1/k) \log_q x + 1} q^{-r+1} \sum_{q^{r-1} \leq l_1 < q^r} \sum_{b_1=1}^{l_1'} \left| S_H\left(\frac{b_1}{l_1} - y, z\right) \right| dy.$$

2. Окончание доказательства. Теперь все готово для применения неравенства большого решета (леммы 2). Имеем

$$W \ll x^\lambda \log x \int_0^1 \min\left(x, \frac{1}{\|y\|}\right) dy \sum_{r \leq H/2} q^{r-2r\lambda+1} \int_0^1 |S_{2r}(\alpha - y, z)| d\alpha \\ + \log x \int_0^1 \min\left(x, \frac{1}{\|y\|}\right) dy \sum_{H/2 < r \leq (1-1/k) \log_q x + 1} q^{r+1} \int_0^1 |S_H(\alpha - y, z)| d\alpha.$$

Так как функции $S_{2r}(\alpha, z)$ и $S_H(\alpha, z)$ периодические с периодом 1, в силу леммы 4 получаем

$$\int_0^1 |S_{2r}(\alpha - y, z)| d\alpha = \int_0^1 |S_{2r}(\alpha, z)| d\alpha \ll q^{2r\theta}, \\ \int_0^1 |S_H(\alpha - y, z)| d\alpha = \int_0^1 |S_H(\alpha, z)| d\alpha \ll q^{H\theta} \ll x^\theta;$$

следовательно,

$$W \ll x^\lambda \log^2 x \sum_{r \leq H/2} q^{r(1-2\lambda+2\theta)+1} + \log^2 x \sum_{H/2 < r \leq (1-1/k) \log_q x + 1} q^{r+1} x^\theta \\ \ll \left(x^\lambda \sum_{r \leq H/2} q^{r(1-2\lambda+2\theta)+1} + q x^{1-1/k+\theta} \right) \log^2 x.$$

Рассмотрим два случая:

1) если $1 - 2\lambda + 2\theta < 0$,

$$\sum_{r \leq H/2} q^{r(1-2\lambda+2\theta)} \ll 1;$$

2) если $1 - 2\lambda + 2\theta \geq 0$,

$$\sum_{r \leq H/2} q^{r(1-2\lambda+2\theta)} \ll q^{H/2(1-2\lambda+2\theta)} \ll x^{1/2-\lambda+\theta}.$$

Итак,

$$|W| \ll (x^\lambda + x^{1-1/k+\theta}) \ln^2 x \ll (x^\lambda + x^{1-1/k+\theta}) \ln^2 x$$

(множитель q в окончательной оценке мы не пишем, поскольку считаем, что параметр q не растет с ростом основного параметра x).

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. O. Gelfond, “Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données”, *Acta Arith.*, **13** (1968), 259–265.
- [2] К. М. Эминян, “О проблеме делителей Дирихле в некоторых последовательностях натуральных чисел”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55:3** (1991), 680–686.
- [3] Г. Монтгомери, *Мультипликативная теория чисел*, Мир, М., 1974.
- [4] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, Наука, М., 1981.
- [5] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1975.

К. М. Эминян

Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана

E-mail: eminyan@mail.ru

Поступило

03.12.2009

Исправленный вариант

15.06.2010