Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Йонг Пинг Ли, Чун Мей Су, В. И. Иванов, Некоторые задачи теории приближений в пространствах L_p на прямой со степенным весом, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 362–383

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:37:38

Некоторые задачи теории приближений в пространствах L_p на прямой со степенным весом

Йонг Пинг Ли, Чун Мей Су, В. И. Иванов

В пространствах L_p на прямой со степенным весом изучаются вопросы приближения функций целыми функциями экспоненциального типа. С помощью дифференциально-разностного оператора Данкля и преобразования Данкля определяются оператор обобщенного сдвига, модуль гладкости и K -функционал. Доказываются прямые и обратные теоремы типа Джексона–Стечкина и Бернштейна. Устанавливается эквивалентность между модулем гладкости и K -функционалом.

Библиография: 15 названий.

1. Введение

В классической теории приближений на прямой традиционно в качестве аппарата приближения используются целые функции экспоненциального типа. В весовых пространствах L_p естественно использовать целые функции экспоненциального типа, чьи сужения на прямую принадлежат этим пространствам. Вопросы приближения функций в весовых пространствах L_p на полупрямой или четных функций на прямой были изучены Платоновым [1], [2]. С помощью оператора и преобразования Данкля, обобщенной свертки, оператора обобщенного сдвига мы распространяем его результаты на случай произвольных функций на прямой. Преобразование Данкля, обобщающее преобразование Фурье на весовой случай, было введено Розенрадом (до Ч. Данкля) в его диссертации [3]. Оно исследовалось во многих работах (см., например, [4]–[6]).

Работа построена следующим образом. В разделе 2 даются некоторые определения и обозначения, формулируются основные результаты. В разделе 3 для преобразования Данкля приводятся известные и устанавливаются новые свойства, необходимые для доказательства основных результатов. Разделы 4, 5 посвящены доказательствам теорем типа Джексона–Стечкина и Бернштейна.

Работа первого и второго авторов выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (проект 10771016), Исследовательского фонда для докторской программы высшего образования и Пекинского фонда естественных наук (проект 1102011). Работа третьего автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00564).

Далее $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ – множества действительных, комплексных, натуральных и целых чисел соответственно, $\mathbb{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел, $C^k(\mathbb{R})$, $C^\infty(\mathbb{R})$, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ – множества k -раз непрерывно дифференцируемых, бесконечно дифференцируемых, бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на $\mathbb{R}$ соответственно, $C_0(\mathbb{R})$ – множество непрерывных функций, исчезающих на ∞ , $\mathcal{S} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ – пространство Шварца быстро убывающих на ∞ функций, $\mathcal{S}'$ – его сопряженное пространство распределений медленного роста, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1/2$.

2. Основные результаты

Пусть $L_{p,\alpha}$ означает L_p -пространство на $\mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\mu_\alpha(x) \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

где мера $d\mu_\alpha(x) = (2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1))^{-1}|x|^{2\alpha+1}dx$, $L_{\infty,\alpha}$ – пространство существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с конечной нормой

$$\|f\|_{\infty,\alpha} := \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Пусть $j_\alpha(z)$ – нормированная функция Бесселя первого рода порядка α , имеющая разложение

$$j_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Положим

$$E_\alpha(z) := j_\alpha(iz) + \frac{z}{2(\alpha+1)} j_{\alpha+1}(iz). \quad (2.2)$$

Так как $z j_{\alpha+1}(z) = -2(\alpha+1)j'_\alpha(z)$, то $E_\alpha(z) = j_\alpha(iz) + i j'_\alpha(iz)$. Хорошо известно [7; следствие 5.4], что $E_\alpha(z)$ – целая функция, удовлетворяющая оценке

$$|E_\alpha^{(r)}(z)| \leq e^{|\operatorname{Re} z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим переплетающий оператор Данкля V_α на $C^\infty(\mathbb{R})$ [8], [9]

$$V_\alpha(f)(x) := a_\alpha \int_{-1}^1 f(xt)(1-t^2)^{\alpha-1/2}(1+t) dt.$$

Он может быть записан в виде

$$V_\alpha(f)(x) := a_\alpha \operatorname{sgn}(x)|x|^{-(2\alpha+1)} \int_{-|x|}^{|x|} f(y)(x^2-y^2)^{\alpha-1/2}(x+y) dy, \quad x \neq 0 \quad (2.3)$$

и $V_\alpha(f)(0) = f(0)$. Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ ядро Данкля E_α имеет представление типа Бохнера [8]

$$E_\alpha(\lambda x) = V_\alpha(e^{\lambda \cdot})(x). \quad (2.4)$$

Преобразование Данкля порядка α для функции $f \in L_{1,\alpha}$ определяется равенством

$$F_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) E_\alpha(-ixy) d\mu_\alpha(y), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Для $\alpha = -1/2$ F_α совпадает с классическим преобразованием Фурье. Преобразование F_α может быть продолжено до изометрического изоморфизма пространства $L_{2,\alpha}$ так, что $\|f\|_{2,\alpha} = \|F_\alpha f\|_{2,\alpha}$ для всех $f \in L_{2,\alpha}$ (см. лемму 3.1 в разделе 3).

Для $s \in \mathbb{R}$ оператор обобщенного сдвига T^s на $L_{2,\alpha}$ определяется равенством

$$F_\alpha(T^s f)(\xi) = E_\alpha(-is\xi) F_\alpha f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad f \in L_{2,\alpha}. \quad (2.6)$$

Линейный оператор T^s может быть продолжен до непрерывного оператора на $L_{p,\alpha}$ и для него выполняется оценка

$$\|T^s f\|_{p,\alpha} \leq 3\|f\|_{p,\alpha}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (2.7)$$

Действительно, $T^s f(t)$ имеет интегральное представление

$$\begin{aligned} T^s f(t) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\sqrt{t^2 + s^2 - 2stu}) \left(1 + \frac{t-s}{\sqrt{t^2 + s^2 - 2stu}}\right) \nu_\alpha(u) du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(-\sqrt{t^2 + s^2 - 2stu}) \left(1 - \frac{t-s}{\sqrt{t^2 + s^2 - 2stu}}\right) \nu_\alpha(u) du, \end{aligned}$$

где $\nu_\alpha(u) = b_\alpha(1+u)(1-u^2)^{\alpha-1/2}$, $b_\alpha > 0$. Отсюда и вытекает оценка (2.7) [6].

Для $f \in L_{p,\alpha}$ определим разность $\Delta_h^k f$ порядка k ($k \in \mathbb{N}$) с шагом $h > 0$ и модуль гладкости $\omega_k(f, \delta)_{p,\alpha}$ порядка k равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_h^k f(t) &= \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} T^{lh} f(t), \\ \omega_k(f, \delta)_{p,\alpha} &:= \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k f\|_{p,\alpha}, \quad \delta > 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для $\sigma > 0$ через $E_{p,\alpha}^\sigma$ обозначим класс целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$, чьи сужения на $\mathbb{R}$ принадлежат $L_{p,\alpha}$. Величину наилучшего приближения $f \in L_{p,\alpha}$ классом $E_{p,\alpha}^\sigma$ определим равенством

$$E_\sigma(f)_{p,\alpha} := \inf\{\|f - \phi\|_{p,\alpha} : \phi \in E_{p,\alpha}^\sigma\}. \quad (2.9)$$

Рассмотрим дифференциально-разностный оператор Данкля [8]

$$\Lambda_\alpha f(x) := f'(x) + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \frac{f(x) - f(-x)}{x}, \quad f \in C^1(\mathbb{R}). \quad (2.10)$$

Функция $y = E_\alpha(x)$ является единственным решением уравнения $\Lambda_\alpha y - y = 0$ с начальным условием $y(0) = 1$ [8].

Так как для $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, $\langle \Lambda_\alpha \varphi, \psi \rangle = -\langle \varphi, \Lambda_\alpha \psi \rangle$, где

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) d\mu_\alpha(x),$$

для распределения u распределение $\Lambda_\alpha u$ может быть определено формулой

$$\langle \Lambda_\alpha u, \varphi \rangle = -\langle u, \Lambda_\alpha \varphi \rangle, \quad u \in \mathcal{S}', \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Так как $L_{p,\alpha}$ вложено в $\mathcal{S}'$, оператор Λ_α определен на $L_{p,\alpha}$.

Пространство Соболева $W_{p,\alpha}^m$ определим с помощью оператора Λ_α :

$$W_{p,\alpha}^m := \{f \in L_{p,\alpha} : \Lambda_\alpha^m f \in L_{p,\alpha}\}, \quad (2.11)$$

где $\Lambda_\alpha^i f = \Lambda_\alpha(\Lambda_\alpha^{i-1} f)$ и $\Lambda_\alpha^0 f = f$. Аналогично K -функционал для $L_{p,\alpha}$ и $W_{p,\alpha}^m$ определим следующим образом:

$$K(f, \delta; L_{p,\alpha}, W_{p,\alpha}^m) := \inf\{\|f - g\|_{p,\alpha} + \delta^m \|\Lambda_\alpha^m g\|_{p,\alpha} : g \in W_{p,\alpha}^m\}.$$

Для простоты будем писать

$$K_m(f, t)_{p,\alpha} = K(f, t; L_{p,\alpha}, W_{p,\alpha}^m)_{p,\alpha}.$$

Теперь мы можем сформулировать основные результаты. Вначале это будет прямая теорема о приближении в $L_{p,\alpha}$ функций из $W_{p,\alpha}^r$ целыми функциями экспоненциального типа $\leq \sigma$. Положительные постоянные в неравенствах ниже не зависят от существенных параметров f , σ , δ , n .

ТЕОРЕМА 2.1. Если $k \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $1 \leq p < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in W_{p,\alpha}^r$, то

$$E_\sigma(f)_{p,\alpha} \leq \frac{c}{\sigma^r} \omega_k\left(\Lambda_\alpha^r f, \frac{1}{\sigma}\right)_{p,\alpha}.$$

Следующая теорема описывает эквивалентность между K -функционалом и модулем гладкости. Эквивалентность между K -функционалом и несколько другим модулем гладкости в $L_{2,\alpha}$ установлена в [10].

ТЕОРЕМА 2.2. Если $f \in L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, $\delta > 0$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$c_1 \omega_k(f, \delta)_{p,\alpha} \leq K_k(f, \delta)_{p,\alpha} \leq c_2 \omega_k(f, \delta)_{p,\alpha}. \quad (2.12)$$

Для доказательства обратных теорем необходимо неравенство Бернштейна.

ТЕОРЕМА 2.3. Если $\sigma > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $f \in E_{p,\alpha}^\sigma$, то

$$\|\Lambda_\alpha^r f\|_{p,\alpha} \leq c \sigma^r \|f\|_{p,\alpha}.$$

Обратные теоремы имеют следующий вид.

ТЕОРЕМА 2.4. Если $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p < \infty$, $k, n \in \mathbb{N}$, то

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} \leq \frac{c}{n^k} \sum_{j=0}^n (j+1)^{k-1} E_j(f)_{p,\alpha}. \quad (2.13)$$

ТЕОРЕМА 2.5. Если $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p < \infty$, существует $r \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum_{j=1}^\infty j^{r-1} E_j(f)_{p,\alpha} < \infty$, то $f \in W_{p,\alpha}^r$ и для $k, n \in \mathbb{N}$

$$\omega_k\left(\Lambda_\alpha^r f, \frac{1}{n}\right) \leq c \left(\frac{1}{n^k} \sum_{j=0}^n (j+1)^{k+r-1} E_j(f)_{p,\alpha} + \sum_{j=n+1}^\infty j^{r-1} E_j(f)_{p,\alpha} \right). \quad (2.14)$$

3. Преобразование Данкля и предварительные результаты

Приведем основные свойства преобразования Данкля.

ЛЕММА 3.1 [4]. (i) Если $f \in L_{1,\alpha}$, то $F_\alpha f$ принадлежит $C_0(\mathbb{R})$ и $\|F_\alpha f\|_\infty \leq \|f\|_{1,\alpha}$.

(ii) Преобразование F_α является непрерывным линейным изоморфизмом пространства $\mathcal{S}$ и для всех $f \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbb{R}$ $F_\alpha^{-1}f(x) = F_\alpha f(-x)$.

(iii) Если $f, F_\alpha f \in L_{1,\alpha}$, то справедлива формула обращения

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} F_\alpha f(y) E_\alpha(ixy) d\mu_\alpha(y), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

(iv) Преобразование F_α продолжается до изометрического изоморфизма пространства $L_{2,\alpha}$ так, что для любой $f \in L_{2,\alpha}$ $\|f\|_{2,\alpha} = \|F_\alpha f\|_{2,\alpha}$. Кроме этого

$$\int_{\mathbb{R}} F_\alpha f(x) g(x) d\mu_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} F_\alpha g(x) f(x) d\mu_\alpha(x) \quad (3.2)$$

для всех $f, g \in L_{p,\alpha}$ и $p = 1, 2$.

Из свойств (i), (iv) леммы 3.1, интерполяционной теоремы Рисса–Торина для любой $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq 2$ $F_\alpha f \in L_{q,\alpha}$, $1/q + 1/p = 1$. Причем,

$$\|F_\alpha f\|_{q,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}. \quad (3.3)$$

Распространить преобразование Данкля на функции из пространства $L_{p,\alpha}$, $p > 2$, можно с помощью распределений. Преобразование Данкля F_α для распределения медленного роста $u \in \mathcal{S}'$ определим равенством

$$\langle F_\alpha u, \varphi \rangle = \langle u, F_\alpha \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (3.4)$$

В соответствии со свойством (ii) леммы 3.1 F_α является непрерывной биекцией $\mathcal{S}'$ с обратным преобразованием F_α^{-1} , для которого

$$\langle (F_\alpha)^{-1}u, \varphi \rangle = \langle u, (F_\alpha)^{-1}\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (3.5)$$

Отметим, что оба определения совпадают, если $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq 2$. Если $u \in \mathcal{S}'$, $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ и для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ существуют $k_r \geq 0$, $c_r > 0$ такие, что $|h^{(r)}(x)| \leq c_r(1+|x|)^{k_r}$, $x \in \mathbb{R}$, то произведение h и u определяется равенством $\langle hu, \varphi \rangle := \langle u, h\varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Распределение hu также является распределением медленного роста.

Отметим некоторые свойства оператора обобщенного сдвига T^s . Далее нам понадобится следующее свойство. Если $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p < \infty$, то отображение $s \mapsto T^s f: \mathbb{R} \rightarrow L_{p,\alpha}$ является непрерывным [11].

Так как $\langle T^s \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, T^{-s} \psi \rangle$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, оператор T^s можно распространить на распределения равенством $\langle T^s u, \varphi \rangle := \langle u, T^{-s} \varphi \rangle$ для $u \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Распределение $T^s u$ также является распределением медленного роста. Для функций из $L_{p,\alpha}$ оба определения T^s совпадают. Можно указать связь между преобразованием Данкля и оператором обобщенного сдвига

$$F_\alpha(T^s u)(x) = E_\alpha(-ixs)F_\alpha u(x), \quad T^s(F_\alpha u)(x) = F_\alpha(E_\alpha(i \cdot s)u)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{S}'. \quad (3.6)$$

Действительно, из определений вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned}\langle F_\alpha(T^s u), \varphi \rangle &= \langle T^s u, F_\alpha \varphi \rangle = \langle u, T^{-s}(F_\alpha \varphi) \rangle = \langle u, F_\alpha(E_\alpha(-i \cdot s) \varphi) \rangle \\ &= \langle F_\alpha u, E_\alpha(-i \cdot s) \varphi \rangle = \langle E_\alpha(-i \cdot s) F_\alpha u, \varphi \rangle, \\ \langle T^s(F_\alpha u), \varphi \rangle &= \langle F_\alpha u, T^{-s} \varphi \rangle = \langle u, F_\alpha(T^{-s} \varphi) \rangle = \langle u, E_\alpha(i \cdot s) F_\alpha \varphi \rangle \\ &= \langle u E_\alpha(i \cdot s), F_\alpha \varphi \rangle = \langle F_\alpha(u E_\alpha(i \cdot s)), \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Если $f, F_\alpha f \in L_{1,\alpha}$, то $T^s f(x) = T^{-x} f(-s)$. Действительно, из (3.1)

$$\begin{aligned}T^{-x} f(-s) &= \int_{\mathbb{R}} F_\alpha(T^{-x} f)(y) E_\alpha(-isy) d\mu_\alpha(y) = \int_{\mathbb{R}} E_\alpha(ixy) F_\alpha f(y) E_\alpha(-isy) d\mu_\alpha(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} E_\alpha(ixy) F_\alpha(T^s f)(y) d\mu_\alpha(y) = T^s f(x).\end{aligned}$$

Обобщенную свертку функций $f \in L_{p,\alpha}$ и $g \in L_{q,\alpha}$ определим равенством

$$f *_\alpha g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) T^x \tilde{g}(y) d\mu_\alpha(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

где $\tilde{g}(y) = g(-y)$.

Свертка Данкля исследовалась во многих работах (см., например, [6], [7]). Приведем аналог неравенства Юнга.

ЛЕММА 3.2 [12]. *Если $p, q, r \geq 1$, $1/r + 1 = 1/p + 1/q$, $f \in L_{p,\alpha}$, $g \in L_{q,\alpha}$, то $f *_\alpha g \in L_{r,\alpha}$ и*

$$\|f *_\alpha g\|_{r,\alpha} \leq 3 \|f\|_{p,\alpha} \|g\|_{q,\alpha}. \quad (3.8)$$

Если $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$ и $g \in \mathcal{S}$, то [4]

$$F_\alpha(f *_\alpha g) = F_\alpha(f) F_\alpha(g). \quad (3.9)$$

Следующая лемма распространяет равенство (3.9) на более общие функции.

ЛЕММА 3.3. (i) *Равенство (3.9) справедливо, если $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq 2$ и $g \in L_{1,\alpha}$.*

(ii) *Если $f \in L_{p,\alpha}$, $2 < p \leq \infty$, $g \in L_{1,\alpha}$, $F_\alpha g \in C^\infty(\mathbb{R})$ и для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ существуют $m_k \geq 0$, $c_k > 0$ такие, что*

$$|(F_\alpha g)^{(k)}(x)| \leq c_k (1 + |x|)^{m_k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

то (3.9) выполнено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Так как $C_c^\infty(\mathbb{R})$ плотно в $L_{1,\alpha}$ [4], для любого $\epsilon > 0$ и некоторой $g_m \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ $\|g_m - g\|_{1,\alpha} < \epsilon$. По лемме 3.2 при $p = r$ $f *_\alpha g \in L_{p,\alpha}$. Следовательно, $F_\alpha(f *_\alpha g) \in L_{q,\alpha}$, $1/q + 1/p = 1$ и

$$\|F_\alpha(f *_\alpha g)\|_{q,\alpha} \leq \|f *_\alpha g\|_{p,\alpha} \leq 3 \|f\|_{p,\alpha} \|g\|_{1,\alpha}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\|F_\alpha(f *_\alpha g) - (F_\alpha f)(F_\alpha g)\|_{q,\alpha} &\leq \|F_\alpha(f *_\alpha (g - g_m))\|_{q,\alpha} + \|(F_\alpha f)(F_\alpha g_m - F_\alpha g)\|_{q,\alpha} \\ &\leq \|f *_\alpha (g - g_m)\|_{p,\alpha} + \|F_\alpha f\|_{q,\alpha} \|F_\alpha(g - g_m)\|_\infty \\ &\leq 3 \|f\|_{p,\alpha} \|g - g_m\|_{1,\alpha} + \|F_\alpha f\|_{q,\alpha} \|g - g_m\|_{1,\alpha} \\ &\leq 4 \|f\|_{p,\alpha} \epsilon;\end{aligned}$$

следовательно, (3.9) выполнено.

(ii) Как и ранее существует последовательность $g_m \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, для которой выполнено $\|g - g_m\|_{1,\alpha} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда $\|F_\alpha g - F_\alpha g_m\|_\infty \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Если $\varphi \in \mathcal{S}$, то

$$\begin{aligned} \langle F_\alpha(f *_\alpha g), \varphi \rangle - \langle F_\alpha(f)F_\alpha(g), \varphi \rangle &= \langle f *_\alpha g - f *_\alpha g_m, F_\alpha \varphi \rangle - \langle F_\alpha f, F_\alpha(g - g_m)\varphi \rangle \\ &= \langle f *_\alpha (g - g_m), F_\alpha \varphi \rangle - \langle f, F_\alpha(F_\alpha(g - g_m)\varphi) \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда и из выбора последовательности g_m вытекает (3.9).

Напомним некоторые свойства оператора Данкля Λ_α . Прямые вычисления показывают, что $F_\alpha(\Lambda_\alpha \varphi)(x) = ix F_\alpha \varphi(x)$; следовательно,

$$F_\alpha(\Lambda_\alpha^n \varphi)(x) = (ix)^n F_\alpha \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

для любой $\varphi \in \mathcal{S}$.

С другой стороны легко получить формулу $\Lambda_\alpha(F_\alpha \varphi)(x) = F_\alpha(-it\varphi(t))(x)$, поэтому

$$F_\alpha(\Lambda_\alpha u)(x) = (ix)F_\alpha u(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{S}'. \quad (3.10)$$

Если $\Lambda_\alpha^n f \in L_{1,\alpha}$, то

$$|F_\alpha f(x)| \leq \frac{\|F_\alpha(\Lambda_\alpha^n f)\|_\infty}{|x|^n} \leq \frac{\|\Lambda_\alpha^n f\|_{1,\alpha}}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad u \in \mathcal{S}'. \quad (3.11)$$

Проверим, что операторы T^s и Λ_α коммутируют, т.е.

$$T^s(\Lambda_\alpha u) = \Lambda_\alpha(T^s u), \quad u \in \mathcal{S}'. \quad (3.12)$$

В этом легко убедиться, сравнивая преобразования Данкля от обеих частей (3.12):

$$F_\alpha(\Lambda_\alpha(T^s u))(x) = ix F_\alpha(T^s u)(x) = ix E_\alpha(-ixs) F_\alpha u(x) = F_\alpha(T^s(\Lambda_\alpha u))(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следующее предложение является аналогом теоремы Пэли–Винера

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4 [5]. Пусть $\sigma > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ и $f \in C(\mathbb{R})$. Функция f может быть продолжена до целой функции из $E_{p,\alpha}^\sigma$ тогда и только тогда, когда $f \in L_{p,\alpha}$ и $F_\alpha f$ имеет носитель на $[-\sigma, \sigma]$, т.е. $\langle F_\alpha f, \varphi \rangle = 0$ для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ с носителем вне $[-\sigma, \sigma]$.

4. Доказательство теоремы Джексона–Стечкина

При доказательстве теоремы 2.1 будем использовать преобразование Данкля как основной инструмент.

Применяя преобразование Данкля в смысле распределений к $\Delta_h^k f$, $f \in L_{p,\alpha}$, получим

$$F_\alpha(\Delta_h^k f)(x) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} E_\alpha(-ilh x) F_\alpha f(x).$$

Обозначим

$$E_{\alpha,k}(x) := \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} E_\alpha(-ilx).$$

Тогда

$$F_\alpha(\Delta_h^k f)(x) = E_{\alpha,k}(hx)F_\alpha f(x). \quad (4.1)$$

Следуя обозначениям из [2], положим $j_{\alpha,k}(x) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} j_\alpha(lx)$. Тогда

$$E_{\alpha,k}(x) = j_{\alpha,k}(x) - \frac{ikx}{2(\alpha+1)}(j_{\alpha+1,k}(x) - j_{\alpha+1,k-1}(x)). \quad (4.2)$$

Для $j_{\alpha,k}$ [2] справедливы следующие свойства:

- (1) $j_{\alpha,k}$ является четной целой функцией;
- (2) $j_{\alpha,k}(x) \rightarrow 1$, $j_{\alpha,k}^{(n)}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$;
- (3) в нуле $j_{\alpha,k}(x)$ имеет нуль порядка k , если k четное и порядка $k+1$, если k нечетное.

Следовательно, $E_{\alpha,k}$ — целая функция, $E_{\alpha,k}(x) \rightarrow 1$, $E_{\alpha,k}^{(n)}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Если k четное, то

$$E_{\alpha,k}(x) = x^k f_1(x) - \frac{ikx}{2(\alpha+1)}(x^k g_1(x) - x^k h_1(x)) = x^k f_1(x) - \frac{ikx^{k+1}}{2(\alpha+1)} l_1(x),$$

а если k нечетное, то

$$E_{\alpha,k}(x) = x^{k+1} f_2(x) - \frac{ikx}{2(\alpha+1)}(x^{k+1} g_2(x) - x^{k-1} h_2(x)) = x^{k+1} f_2(x) - \frac{ikx^k}{2(\alpha+1)} l_2(x),$$

где $f_i, g_i, h_i, l_i \in C^\infty(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, и в нуле они отличны от нуля.

Для $k, r \in \mathbb{N}$, $k \geq r$ положим

$$g_r^*(x) := x^{-r} E_{\alpha,k}(x), \quad g_{k,r} := F_\alpha^{-1}(g_r^*).$$

В соответствии со свойствами $E_{\alpha,k}$ функция g_r^* бесконечно дифференцируемая и исчезает на ∞ . Следовательно, $g_r^*, g_{k,r} \in \mathcal{S}'$. Покажем, что $g_{k,r} \in L_{1,\alpha}$. Определим четную функцию $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(x) = 1$, если $|x| \leq 1$ и $\eta(x) = 0$, если $|x| \geq 2$.

ЛЕММА 4.1. Если $f_r(x) := (1 - \eta(x))/x^r$, $r \in \mathbb{N}$, то $K_r := F_\alpha(f_r) \in L_{1,\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для четного r лемма была доказана в [2]. Если $r = 2m - 1$, $m \geq 1$, то

$$\begin{aligned} F_\alpha(f_r)(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \eta(x)}{x^r} \left(j_\alpha(\lambda x) - \frac{i\lambda x}{2(\alpha+1)} j_{\alpha+1}(\lambda x) \right) d\mu_\alpha(x) \\ &= -i\lambda \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \eta(x)}{x^{2m}} j_{\alpha+1}(\lambda x) d\mu_{\alpha+1}(x) = -i\lambda F_{\alpha+1}(f_{2m})(\lambda). \end{aligned}$$

Как и в [2] x^{-2m} может быть записано в виде $x^{-2m} = s^m(1-s)^{-m}$, где $s = (1+x^2)^{-1}$. Значит, справедливо разложение $x^{-2m} = \sum_{j=m}^{\infty} a_j s^j$. Пусть $P_N(s) = \sum_{j=m}^N a_j s^j$ — частичная сумма этого ряда. Пусть далее

$$Q_N(x) = P_N((1+x^2)^{-1}), \quad R_N(x) = x^{-2m} - Q_N(x), \quad \Lambda_N(x) = (1 - \eta(x))R_N(x).$$

Тогда

$$f_{2m}(x) = \Lambda_N(x) + Q_N(x) - \eta(x)Q_N(x).$$

Как и в [2] Λ_N , $F_{\alpha+1}(\Lambda_N) \in L_{1,\alpha+1}$, если N достаточно большое. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} |\lambda F_{\alpha+1}(\Lambda_N)(\lambda)| |\lambda|^{2\alpha+1} d\lambda \leq c \int_{-1}^1 |\lambda|^{2\alpha+2} d\lambda + \int_{|\lambda| \geq 1} |F_{\alpha+1}(\Lambda_N)(\lambda)| |\lambda|^{2\alpha+3} d\lambda < \infty.$$

Остается показать, что при $d \geq 1$

$$\lambda F_{\alpha+1} \left(\frac{1}{(1 + |\cdot|^2)^d} \right) (\lambda) \in L_{1,\alpha}.$$

Известно, что

$$F_{\alpha+1} \left(\frac{1}{(1 + |\cdot|^2)^d} \right) (\lambda) = c_{\alpha,d} \int_0^\infty e^{-\lambda^2/4t} e^{-t} t^{d-\alpha-3} dt$$

(см. [2]), поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \lambda F_{\alpha+1} \left(\frac{1}{(1 + |\cdot|^2)^d} \right) (\lambda) \right\|_{1,\alpha} &= c'_{\alpha,d} \int_0^\infty \lambda^{2\alpha+2} \int_0^\infty e^{-\lambda^2/4t} e^{-t} t^{d-\alpha-3} dt d\lambda \\ &= c'_{\alpha,d} \int_0^\infty e^{-t} t^{d-\alpha-3} \int_0^\infty \lambda^{2\alpha+2} e^{-\lambda^2/4t} d\lambda dt \\ &= c''_{\alpha,d} \int_0^\infty e^{-t} t^{d-3/2} dt < \infty. \end{aligned}$$

Лемма 4.1 доказана.

Имеем

$$g_r^*(x) = x^{-r} E_{\alpha,k}(x) = E_{\alpha,k}(x) f_r(x) + \frac{E_{\alpha,k}(x)}{x^r} \eta(x).$$

Из леммы 4.1, ограниченности оператора T^s в $L_{1,\alpha}$ получим

$$F_\alpha(E_{\alpha,k} f_r) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} (T^l K_r) \in L_{1,\alpha}$$

и $g_{k,r} \in L_{1,\alpha}$. Теперь положим

$$g_{k,r}^h(t) := F_\alpha^{-1}(h^r g_r^*(h \cdot))(t).$$

Очевидно, что

$$g_{k,r}^h(t) = h^r F_\alpha^{-1}(g_r^*(h \cdot))(t) = h^{r-2\alpha-2} F_\alpha^{-1}(g_r^*(\cdot)) \left(\frac{t}{h} \right).$$

Так как $g_{k,r} = F_\alpha^{-1}(g_r^*)$, то

$$g_{k,r}^h(t) = h^{r-2\alpha-2} g_{k,r} \left(\frac{t}{h} \right), \quad \|g_{k,r}^h\|_{1,\alpha} = h^r \|g_{k,r}\|_{1,\alpha}. \quad (4.3)$$

ЛЕММА 4.2. Если $k, r \in \mathbb{N}$, $k \geq r$, $f \in W_{p,\alpha}^r$, $1 \leq p < \infty$, то

$$\Delta_h^k f = (-i)^r g_{kr}^h *_\alpha \Lambda_\alpha^r f, \quad \|\Delta_h^k f\|_{p,\alpha} \leq c h^r \|\Lambda_\alpha^r f\|_{p,\alpha}, \quad (4.4)$$

где $c = c(k, r, \alpha) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (4.1)

$$F_\alpha(\Delta_h^k f)(x) = E_{\alpha,k}(hx)F_\alpha f(x).$$

Если $f \in \mathcal{S}$, то (4.4) следует из (3.8)

$$\begin{aligned} F_\alpha((-i)^r g_{k,r}^h *_\alpha \Lambda_\alpha^r f)(x) &= F_\alpha(g_{k,r}^h)F_\alpha((-i)^r \Lambda_\alpha^r f)(x) \\ &= x^{-r} E_{\alpha,k}(hx)(-i)^r (ix)^r F_\alpha f(x) = E_{\alpha,k}(hx)F_\alpha f(x). \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{S}$ плотно в $W_{p,\alpha}^r$, то (4.4) верно для любой $f \in W_{p,\alpha}^r$. Из леммы 3.2, (4.3), (4.4)

$$\|\Delta_h^k f\|_{p,\alpha} \leq 3\|g_{k,r}^h\|_{1,\alpha}\|\Lambda_\alpha^r f\|_{p,\alpha} = 3h^r\|g_{k,r}\|_{1,\alpha}\|\Lambda_\alpha^r f\|_{p,\alpha}.$$

Лемма 4.2 доказана.

Из определения модуля гладкости и леммы 4.2 вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Для модуля гладкости $\omega_k(f, t)_{p,\alpha}$, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие свойства:

- (i) $\omega_k(f, t)_{p,\alpha}$ не убывает по t ;
- (ii) $\omega_k(f + g, t)_{p,\alpha} \leq \omega_k(f, t)_{p,\alpha} + \omega_k(g, t)_{p,\alpha}$;
- (iii) $\omega_k(f, t)_{p,\alpha} \leq 3 \cdot 2^k \|f\|_{p,\alpha}$;
- (iv) если $f \in W_{p,\alpha}^r$, $1 \leq p < \infty$, $k \geq r$, то $\omega_k(f, t)_{p,\alpha} \leq c(k, r, \alpha)t^r \|\Lambda_\alpha^r f\|_{p,\alpha}$.

Следуя [2], построим приближающий оператор типа оператора Валле–Пуссена. Пусть $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ определена как выше, $q = F_\alpha^{-1}(\eta)$ и $q_\sigma = F_\alpha^{-1}(\eta(\cdot/\sigma))$. Тогда $q, q_\sigma \in \mathcal{S}$. Линейный оператор $P_\sigma(f) := q_\sigma *_\alpha f$ отображает $L_{p,\alpha}$ в $L_{p,\alpha}$ и

$$F_\alpha(P_\sigma(f))(x) = \eta\left(\frac{x}{\sigma}\right)F_\alpha(f)(x).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Если $f \in L_{p,\alpha}$, $\sigma > 0$, $1 \leq p < \infty$, то

- (1) $P_\sigma(f) \in E_{p,\alpha}^{2\sigma}$ и $P_\sigma(g) = g$ для любой $g \in E_{p,\alpha}^\sigma$;
- (2) $\|P_\sigma(f)\|_{p,\alpha} \leq A\|f\|_{p,\alpha}$;
- (3) $\|f - P_\sigma(f)\|_{p,\alpha} \leq BE_\sigma(f)_{p,\alpha}$, где A и $B > 0$ зависят только от α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Из определения функции η носитель $\text{supp } \eta(\cdot/\sigma) \subseteq [-2\sigma, 2\sigma]$, поэтому $\text{supp } F_\alpha(P_\sigma(f)) \subseteq [-2\sigma, 2\sigma]$. Принадлежность $P_\sigma(f)$ к $E_{p,\alpha}^{2\sigma}$ вытекает из предложения 3.4, так как $P_\sigma(f) \in L_{p,\alpha} \cap C(\mathbb{R})$. Если $g \in E_{p,\alpha}^\sigma$, то $\text{supp } F_\alpha g \subseteq [-\sigma, \sigma]$ по предложению 3.4. Равенство $\eta(x/\sigma) = 1$ для $x \in [-\sigma, \sigma]$ влечет $F_\alpha g(x) = \eta(x/\sigma)F_\alpha g(x)$, поэтому $P_\sigma(g) = g$.

(2) Из леммы 3.2

$$\|P_\sigma(f)\|_{p,\alpha} = \|q_\sigma *_\alpha f\|_{p,\alpha} \leq 3\|q_\sigma\|_{1,\alpha}\|f\|_{p,\alpha} = A\|f\|_{p,\alpha},$$

где $A = 3\|q_\sigma\|_{1,\alpha} = 3\|q\|_{1,\alpha}$.

(3) Выберем $h \in E_{p,\alpha}^\sigma$ так, чтобы $\|f - h\|_{p,\alpha} \leq 2E_\sigma(f)_{p,\alpha}$. Применяя равенство $P_\sigma(h) = h$ и предыдущее неравенство, получим

$$\|f - P_\sigma(f)\|_{p,\alpha} = \|f - h + P_\sigma(h - f)\|_{p,\alpha} \leq \|f - h\|_{p,\alpha} + A\|f - h\|_{p,\alpha} \leq BE_\sigma(f)_{p,\alpha},$$

где $B = 2A + 2$.

ТЕОРЕМА 4.5. Если $f \in W_{p,\alpha}^r$, $1 \leq p < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, то

$$E_\sigma(f)_{p,\alpha} \leq \frac{c}{\sigma^r} \omega_k \left(\Lambda_\alpha^r f, \frac{a}{\sigma} \right)_{p,\alpha}, \quad (4.5)$$

где $c = c(k, r, \alpha) > 0$, $a = a(k, \alpha) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$E_\sigma(f)_{p,\alpha} \leq \|f - P_{\sigma/2}(f)\|_{p,\alpha}, \quad \|\Delta_{a/\sigma}^k (\Lambda_\alpha^r f)\|_{p,\alpha} \leq \omega_k \left(\Lambda_\alpha^r f, \frac{a}{\sigma} \right),$$

достаточно показать, что

$$\|f - P_{\sigma/2}(f)\|_{p,\alpha} \leq c\sigma^{-r} \|\Delta_{a/\sigma}^k (\Lambda_\alpha^r f)\|_{p,\alpha}. \quad (4.6)$$

Будем следовать схеме, предложенной в [2], отмечая только основные моменты доказательства. Имеем

$$\begin{aligned} F_\alpha(f - P_{\sigma/2}(f))(x) &= \left(1 - \eta\left(\frac{2x}{\sigma}\right)\right) F_\alpha f(x) \\ &= (-i)^r \sigma^{-r} \frac{1 - \eta(2x/\sigma)}{(x/\sigma)^r E_{\alpha,k}(ax/\sigma)} F_\alpha(\Delta_{a/\sigma}^k (\Lambda_\alpha^r f))(x) \\ &= (-i)^r \sigma^{-r} \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) F_\alpha(\Delta_{a/\sigma}^k (\Lambda_\alpha^r f))(x). \end{aligned}$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1 - \eta(2x)}{x^r E_{\alpha,k}(ax)}.$$

Положим $E_{\alpha,k}(x) = 1 - \tau(x)$. Так как $j_\alpha^{(n)}(x) = O(|x|^{-\alpha-1/2})$, $x \rightarrow \infty$, то $\tau^{(n)}(x) = O(|x|^{-\alpha-1/2})$, $x \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Выберем $a > 0$ так, чтобы $|\tau(x)| \leq 1/2$ при $|x| \geq a/2$. В окрестности нуля $1 - \eta(x) = 0$, поэтому $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ и ее производные растут на ∞ не быстрее некоторой степени $|x|$, в частности, $\varphi \in \mathcal{S}'$.

Положим $h_\sigma(g) := F_\alpha^{-1}(\varphi(\cdot/\sigma)F_\alpha g)$, $g \in L_{p,\alpha}$. Наша цель показать, что h_σ — ограниченный оператор из $L_{p,\alpha}$ в $L_{p,\alpha}$ и для всех $g \in L_{p,\alpha}$ $\|h_\sigma(g)\|_{p,\alpha} \leq M\|g\|_{p,\alpha}$, где $M > 0$ не зависит от σ и g .

Для $|t| < 1$ $(1-t)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} t^j$. Обозначим $S_N(t) = \sum_{j=0}^N t^j$. Тогда $(1-t)^{-1} - S_N(t) = o(t^N)$, $t \rightarrow 0$. Поэтому

$$\frac{1}{E_{\alpha,k}(x)} = \frac{1}{1 - \tau(x)} = S_N(\tau(x)) + o(|x|^{-N(\alpha+1/2)}), \quad x \rightarrow \infty.$$

Положим $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, где

$$\varphi_1(x) = \frac{1 - \eta(2x)}{x^r} \left(\frac{1}{E_{\alpha,k}(ax)} - S_N(\tau(ax)) \right), \quad \varphi_2(x) = \frac{1 - \eta(2x)}{x^r} S_N(\tau(ax)).$$

Следовательно, достаточно доказать, что для $g \in L_{p,\alpha}$

$$\left\| F_\alpha^{-1} \left(\varphi_1 \left(\frac{\cdot}{\sigma} \right) F_\alpha g \right) \right\|_{p,\alpha} \leq M_1 \|g\|_{p,\alpha}, \quad \left\| F_\alpha^{-1} \left(\varphi_2 \left(\frac{\cdot}{\sigma} \right) F_\alpha g \right) \right\|_{p,\alpha} \leq M_2 \|g\|_{p,\alpha}.$$

(i) Имеем $\varphi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Так как

$$\frac{1}{E_{\alpha,k}(ax)} - S_N(\tau(ax)) = o(|x|^{-N(\alpha+1/2)}),$$

то $\varphi_1 \in L_{1,\alpha}$, если N достаточно большое. Аналогично, $\Lambda_\alpha^n \varphi_1(x) = o(|x|^{-N(\alpha+1/2)})$, и $\Lambda_\alpha^n \varphi_1 \in L_{1,\alpha}$. Применяя (3.11), получим, что $F_\alpha \varphi_1 \in L_{1,\alpha}$, поэтому $F_\alpha(\varphi_1(\cdot/\sigma)) \in L_{1,\alpha}$ и $\|F_\alpha(\varphi_1(\cdot/\sigma))\|_{1,\alpha} = \|F_\alpha(\varphi_1)\|_{1,\alpha}$.

Согласно леммам 3.2, 3.3

$$\left\| F_\alpha^{-1} \left(\varphi_1 \left(\frac{\cdot}{\sigma} \right) F_\alpha g \right) \right\|_{p,\alpha} \leq M_1 \|g\|_{p,\alpha},$$

где $M_1 > 0$ не зависит от σ и g .

(ii) Учитывая, что

$$F_\alpha^{-1}(E_\alpha(-il \cdot) F_\alpha g) = T^l g,$$

и T^l – ограниченный оператор, необходимо показать, что

$$\left\| F_\alpha^{-1} \left(\frac{1 - \eta(2 \cdot / \sigma)}{(\cdot / \sigma)^r} F_\alpha g \right) \right\|_{p,\alpha} \leq M_2 \|g\|_{p,\alpha},$$

где $M_2 > 0$ не зависит от σ и g .

Если $r = 0$, то $F_\alpha^{-1}((1 - \eta(2 \cdot / \sigma)) F_\alpha g) = g - P_{\sigma/2}(g)$ и требуемое неравенство вытекает из предложения 4.4. Если $r \geq 1$, то по лемме 4.1

$$\left\| F_\alpha^{-1} \left(\frac{1 - \eta(2 \cdot / \sigma)}{(\cdot / \sigma)^r} F_\alpha g \right) \right\|_{p,\alpha} \leq \|K_r\|_{1,\alpha} \|g\|_{p,\alpha}.$$

Следовательно,

$$\|f - P_{\sigma/2}(f)\|_{p,\alpha} = \sigma^{-r} \|h_\sigma(\Delta_{a/\sigma}^k \Lambda_\alpha^r f)\|_{p,\alpha} \leq c \sigma^{-r} \|\Delta_{a/\sigma}^k \Lambda_\alpha^r f\|_{p,\alpha},$$

где $c = c(k, r, \alpha)$, $a = a(k, \alpha)$. Теорема 4.5 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Если $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p < \infty$, $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$\|\Lambda_\alpha^m(P_\sigma(f))\|_{p,\alpha} \leq c \sigma^m \omega_m \left(f, \frac{b}{\sigma} \right)_{p,\alpha}, \quad (4.7)$$

где $c = c(m, \alpha) > 0$, $b = b(m, \alpha) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать неравенство

$$\|\Lambda_\alpha^m(P_\sigma(f))\|_{p,\alpha} \leq c \sigma^m \|\Delta_{b/\sigma}^m f\|_{p,\alpha}. \quad (4.8)$$

Применяя преобразование Данкля к $\Lambda_\alpha^m(P_\sigma(f))$, получим

$$\begin{aligned} F_\alpha(\Lambda_\alpha^m(P_\sigma(f)))(x) &= (ix)^m F_\alpha(P_\sigma(f))(x) = (ix)^m \eta \left(\frac{x}{\sigma} \right) F_\alpha(f)(x) \\ &= \sigma^m \phi \left(\frac{x}{\sigma} \right) E_{\alpha,m} \left(\frac{bx}{\sigma} \right) F_\alpha f(x). \end{aligned}$$

Здесь

$$\phi(x) := \frac{(ix)^m \eta(x)}{E_{\alpha,m}(bx)}.$$

Из определения $E_{\alpha,m}(x) = x^m g_{\alpha,m}(x)$, где $g_{\alpha,m} \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $g_{\alpha,m}(0) \neq 0$. Выберем $b > 0$ так, чтобы $g_{\alpha,m}(x) \neq 0$ при $|x| \leq 2b$. Следовательно, $\phi \in \mathcal{S}$. Если $\psi := F_\alpha^{-1}\phi$, то $\psi \in \mathcal{S}$. Для $\psi_\sigma = F_\alpha^{-1}(\phi(\cdot/\sigma))$ $\|\psi_\sigma\|_{1,\alpha} = \|\psi\|_{1,\alpha}$. Из (3.9)

$$\Lambda_\alpha^m(P_\sigma(f)) = \sigma^m \psi_\sigma *_\alpha (\Delta_{b/\sigma}^m f).$$

Отсюда и из (3.8)

$$\|\Lambda_\alpha^m(P_\sigma(f))\|_{p,\alpha} \leq 3\sigma^m \|\psi_\sigma\|_{1,\alpha} \|\Delta_{b/\sigma}^m f\|_{p,\alpha} = c\sigma^m \|\Delta_{b/\sigma}^m f\|_{p,\alpha}, \quad (4.9)$$

где $c = 3\|\psi\|_{1,\alpha}$. Предложение 4.6 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Согласно предложению 4.3 для $f \in L_{p,\alpha}$, $g \in W_{p,\alpha}^k$

$$\begin{aligned} \omega_k(f, t)_{p,\alpha} &\leq \omega_k(f - g, t)_{p,\alpha} + \omega_k(g, t)_{p,\alpha} \leq 3 \cdot 2^k \|f - g\|_{p,\alpha} + ct^k \|\Lambda_\alpha^k g\|_{p,\alpha} \\ &\leq D(\|f - g\|_{p,\alpha} + t^k \|\Lambda_\alpha^k g\|_{p,\alpha}), \end{aligned}$$

поэтому

$$\omega_k(f, t)_{p,\alpha} \leq DK_k(f, t)_{p,\alpha}.$$

С другой стороны, $P_\sigma(f) \in W_{p,\alpha}^k$ и

$$K_k(f, t)_{p,\alpha} \leq \|f - P_\sigma(f)\|_{p,\alpha} + t^k \|\Lambda_\alpha^k(P_\sigma(f))\|_{p,\alpha}.$$

Из предложения 4.6

$$\|\Lambda_\alpha^k(P_\sigma(f))\|_{p,\alpha} \leq c\sigma^k \omega_k\left(f, \frac{b}{\sigma}\right)_{p,\alpha}.$$

Из предложения 4.4

$$\|f - P_\sigma(f)\|_{p,\alpha} \leq BE_\sigma(f)_{p,\alpha}.$$

Применяя теорему 4.5, получим

$$\|f - P_\sigma(f)\|_{p,\alpha} \leq d\omega_k\left(f, \frac{A}{\sigma}\right)_{p,\alpha},$$

где $A = \max\{a, b\}$. Выбирая $\sigma = A/t$, получим

$$K_k(f, t)_{p,\alpha} \leq c_2 \omega_k(f, t)_{p,\alpha}.$$

Теорема 2.2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Из определения K -функционала для $\delta \geq 1$

$$K_k(f, \delta t)_{p,\alpha} \leq \delta^k K_k(f, t)_{p,\alpha}.$$

Отсюда и из теоремы 2.2 для $\delta \geq 1$

$$\omega_k(f, \delta t)_{p,\alpha} \leq d\delta^k \omega_k(f, t)_{p,\alpha}.$$

Применяя теорему 4.5, получим

$$E_\sigma(f)_{p,\alpha} \leq \frac{c_1}{\sigma^r} \omega_k\left(\Lambda_\alpha^r f, \frac{a}{\sigma}\right)_{p,\alpha} \leq \frac{c}{\sigma^r} \omega_k\left(\Lambda_\alpha^r f, \frac{1}{\sigma}\right)_{p,\alpha}.$$

Теорема 2.1 доказана.

5. Доказательство обратных теорем

1. Существование наилучшего приближения. В этом разделе докажем, что для любой $f \in L_{p,\alpha}$, $\sigma > 0$ существует $f_\sigma \in E_{p,\alpha}^\sigma$, для которой

$$\|f - f_\sigma\|_{p,\alpha} = E_\sigma(f)_{p,\alpha}.$$

Вначале установим аналог неравенства Никольского разных метрик для целых функций экспоненциального типа (см. [13; 3.3.5]). Для четных функций это сделано в [1].

ТЕОРЕМА 5.1. Если $f \in E_{p,\alpha}^\sigma$, $1 \leq p < p' \leq \infty$, то

$$\|f\|_{p',\alpha} \leq C \sigma^{(2\alpha+2)(1/p-1/p')} \|f\|_{p,\alpha},$$

где $C = C(\alpha, p, p') > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 3.4 $\text{supp } F_\alpha f \subseteq [-\sigma, \sigma]$. Для $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi(x) = 1$, $|x| \leq 1$ положим

$$\phi = F_\alpha^{-1} \varphi \in \mathcal{S}, \quad \phi_\sigma(x) = F_\alpha^{-1} \left(\varphi \left(\frac{\cdot}{\sigma} \right) \right) (x) = \sigma^{2\alpha+2} \phi(\sigma x).$$

Тогда

$$F_\alpha f(x) = \varphi \left(\frac{x}{\sigma} \right) F_\alpha f(x)$$

и согласно (3.9)

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) T^x \tilde{\phi}_\sigma(y) d\mu_\alpha(y).$$

Случай 1: $p' = \infty$. Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$|f(x)| \leq \|f\|_{p,\alpha} \|T^x \tilde{\phi}_\sigma\|_{q,\alpha} \leq 3 \|f\|_{p,\alpha} \|\tilde{\phi}_\sigma\|_{q,\alpha}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

Так как

$$\|\tilde{\phi}_\sigma\|_{q,\alpha} = \|\phi_\sigma\|_{q,\alpha} = \sigma^{(2\alpha+2)/p} \|\phi\|_{q,\alpha},$$

то

$$\|f\|_\infty \leq 3 \|\phi\|_{q,\alpha} \sigma^{(2\alpha+2)/p} \|f\|_{p,\alpha}.$$

Случай 2: $p < p' < \infty$. Имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{p',\alpha} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |f(x)|^{p'-p} d\mu_\alpha(x) \right)^{1/p'} \leq \|f\|_\infty^{(p'-p)/p'} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\mu_\alpha(x) \right)^{1/p'} \\ &\leq (3 \|\phi\|_{q,\alpha} \sigma^{(2\alpha+2)/p} \|f\|_{p,\alpha})^{(p'-p)/p'} \|f\|_{p,\alpha}^{p/p'} = C \sigma^{(2\alpha+2)(1/p-1/p')} \|f\|_{p,\alpha}, \end{aligned}$$

где $C = (3 \|\phi\|_{q,\alpha})^{(p'-p)/p'}$. Теорема 5.1 доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. Для любой $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\sigma \geq 0$ существует $f_\sigma \in E_{p,\alpha}^\sigma$, для которой

$$\|f - f_\sigma\|_{p,\alpha} = E_\sigma(f)_{p,\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = \infty$ утверждение известно (см. [14; 2.6.2]). Пусть $p < \infty$, $\{f_n\}$ – минимизирующая последовательность из $E_{p,\alpha}^\sigma$, для которой выполнено $\|f - f_n\|_{p,\alpha} \rightarrow E_\sigma(f)_{p,\alpha}$ при $n \rightarrow \infty$. Так как последовательность $\{f_n\}$ ограничена в $L_{p,\alpha}$, по теореме 5.1 она ограничена и в L_∞ . По теореме о компактности целых функций (см. [13; 3.3.6]) существует подпоследовательность f_{n_k} и функция $f_\sigma \in E_{\infty,\alpha}^\sigma$, для которых

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z) = f_\sigma(z), \quad x \in \mathbb{R},$$

причем сходимость равномерная на ограниченных множествах. Следовательно, для любого $K > 0$ и характеристической функции χ

$$\|f_\sigma \chi_{\{|x| \leq K\}}\|_{p,\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} \chi_{\{|x| \leq K\}}\|_{p,\alpha} \leq M.$$

Переходя к пределу при $K \rightarrow \infty$, получим, что $f_\sigma \in E_{p,\alpha}^\sigma$. Так как

$$\|(f - f_\sigma) \chi_{\{|x| \leq K\}}\|_{p,\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|(f - f_{n_k}) \chi_{\{|x| \leq K\}}\|_{p,\alpha} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\|_{p,\alpha} = E_\sigma(f)_{p,\alpha},$$

то

$$\|f - f_\sigma\|_{p,\alpha} \leq E_\sigma(f)_{p,\alpha}.$$

Обратное неравенство очевидно. Теорема 5.2 доказана.

2. Интерполяционная формула и неравенство Бернштейна.

ЛЕММА 5.3. Пусть $\Omega \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\sigma > 0$. Тогда для $x \in [-\sigma, \sigma]$ справедливо разложение

$$\Omega(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^\sigma E_\alpha \left(i \frac{\pi k x}{2\sigma} \right), \quad (5.1)$$

причем для коэффициентов $c_k^\sigma \in \mathbb{C}$ выполнены следующие условия:

- (1) они непрерывно зависят от σ ;
- (2) для любого $\sigma_0 > 0$ существуют $c_k = c_k(\sigma_0)$ такие, что $|c_k^\sigma| \leq c_k$ при $0 < \sigma \leq \sigma_0$ и $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k < \infty$.

В частности, ряд (5.1) сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как переплетающий оператор Данкля V_α является топологическим изоморфизмом пространства $C^\infty(\mathbb{R})$ [15], существует функция $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которой

$$\Omega(x) = V_\alpha(f)(x) = a_\alpha \int_{-1}^1 f(xt)(1-t^2)^{\alpha-1/2}(1+t) dt. \quad (5.2)$$

Пусть сначала f четная. Она может быть разложена на отрезке $[-\sigma, \sigma]$ в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{2k}^\sigma e^{itk\pi/\sigma}, \quad (5.3)$$

где

$$c_{2k}^\sigma = c_{2k}^\sigma(f) = \frac{1}{2\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} f(u) e^{-ik\pi u/\sigma} du. \quad (5.4)$$

Интегрируя (5.4) дважды по частям, получим

$$c_{2k}^\sigma = \frac{\sigma}{\pi^2 k^2} \left(f'(\sigma) \cos k\pi - \int_0^\sigma f''(u) \cos \frac{k\pi}{\sigma} u du \right), \quad k \neq 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |c_{2k}^\sigma| &\leq \frac{1}{\pi^2 k^2} \left(\sigma |f'(\sigma)| + \sigma \int_0^\sigma |f''(u)| du \right) \\ &\leq \frac{1}{\pi^2 k^2} \left(\max_{0 \leq \sigma \leq \sigma_0} \sigma |f'(\sigma)| + \sigma_0 \int_0^{\sigma_0} |f''(u)| du \right) = c_{2k}. \end{aligned}$$

Из (5.2) и (5.3)

$$\Omega(x) = V_\alpha(f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^\sigma E_\alpha \left(i \frac{k\pi x}{2\sigma} \right),$$

где $c_{2k-1}^\sigma = 0$. Свойства (1), (2) леммы 5.3 в этом случае выполнены.

Если f нечетная, то ее разложение в ряд Фурье на $[-\sigma, \sigma]$ имеет вид

$$e^{i\pi t/2\sigma} f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{2k-1}^\sigma e^{ik\pi t/\sigma},$$

где

$$\begin{aligned} c_{2k-1}^\sigma &= c_{2k-1}^\sigma(f) := \frac{1}{2\sigma} \int_{-\sigma}^\sigma f(u) e^{i(\pi/2\sigma - k\pi/\sigma)u} du = \frac{i}{\sigma} \int_0^\sigma f(u) \sin \left(\frac{1-2k}{2\sigma} \pi u \right) du \\ &= \frac{4\sigma i}{(1-2k)^2 \pi^2} \left(f'(\sigma) \sin \left(\frac{1}{2} - k \right) \pi - \int_0^\sigma f''(u) \sin \left(\frac{1-2k}{2\sigma} \pi u \right) du \right), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} |c_{2k-1}^\sigma| &\leq \frac{4\sigma}{(1-2k)^2 \pi^2} \left(|f'(\sigma)| + \int_0^\sigma |f''(u)| du \right) \\ &\leq \frac{4}{(1-2k)^2 \pi^2} \left(\max_{0 \leq \sigma \leq \sigma_0} \sigma |f'(\sigma)| + \sigma_0 \int_0^{\sigma_0} |f''(u)| du \right) = c_{2k-1}. \end{aligned}$$

Из (5.2)

$$\Omega(x) = V_\alpha(f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{2k-1}^\sigma E_\alpha \left(i \frac{2k-1}{2\sigma} \pi x \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^\sigma E_\alpha \left(i \frac{k\pi x}{2\sigma} \right),$$

где $c_{2k}^\sigma = 0$. Свойства (1), (2) леммы 5.3 также выполнены.

Производную произвольной $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ можно представить в виде суммы четной и нечетной составляющей, поэтому лемма 5.3 справедлива и в этом случае.

Разложение четной бесконечно дифференцируемой функции в ряд по системе $\{j_\alpha(\pi k x/(2\sigma))\}$ было получено в [1].

Так же, как и в [1], для четных целых функций экспоненциального типа доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 5.4. Пусть $f \in E_{p,\alpha}^\sigma$, $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$,

$$f_\delta(x) := f(x) \left(\frac{\sin \delta x}{\delta x} \right)^k.$$

Тогда

- (1) f_δ является целой функцией экспоненциального типа $\sigma + k\delta$;
- (2) $f_\delta \in L_{p,\alpha}$ и $\|f_\delta\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}$;
- (3) если $k \geq 2[\alpha] + 4$, то $f_\delta \in E_{1,\alpha}^{\sigma+k\delta}$;
- (4) $f_\delta \rightarrow f$ ($\delta \rightarrow 0$) в $\mathcal{S}'$.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть Ω – бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста и в соответствии с леммой 5.3

$$\Omega(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^\sigma E_\alpha \left(i \frac{k\pi}{2\sigma} x \right), \quad |x| \leq \sigma.$$

Тогда для любой $f \in E_{p,\alpha}^\sigma$, $1 \leq p \leq \infty$

$$F_\alpha(\Omega F_\alpha^{-1} f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^\sigma (T^{k\pi/2\sigma} f)(x). \quad (5.5)$$

Ряд (5.5) сходится абсолютно в $L_{p,\alpha}$ и равномерно на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая четной f и оператора сдвига на полупрямой доказательство теоремы 5.5 имеется в [1]. В нашем случае оно аналогично. Приведем его для полноты.

Пусть сначала $f, F_\alpha f \in L_{1,\alpha}$. По предложению 3.4 $\text{supp } F_\alpha f, \text{supp } F_\alpha^{-1} f \subseteq [-\sigma, \sigma]$. Функция

$$\omega_\sigma(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^\sigma E_\alpha \left(i \frac{k\pi}{2\sigma} t \right) \quad (5.6)$$

непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, так как ряд сходится равномерно. Для $t \in [-\sigma, \sigma]$ $\omega_\sigma(t) = \Omega(t)$, поэтому для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\omega_\sigma(t) F_\alpha^{-1} f(t) = \Omega(t) F_\alpha^{-1} f(t)$$

и достаточно доказать, что

$$F_\alpha(\omega_\sigma F_\alpha^{-1} f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^\sigma (T^{k\pi/2\sigma} f)(x). \quad (5.7)$$

Частичные суммы

$$\lambda_N(t) = \sum_{|k| < N} c_k^\sigma E_\alpha \left(i \frac{k\pi}{2\sigma} t \right)$$

ряда (5.6) сходятся равномерно на $\mathbb{R}$, поэтому

$$\begin{aligned} |F_\alpha(\omega_\sigma F_\alpha^{-1} f)(x) - F_\alpha(\lambda_N F_\alpha^{-1} f)(x)| &= |F_\alpha((\omega_\sigma - \lambda_N) F_\alpha^{-1} f)(x)| \\ &\leq \|\omega_\sigma - \lambda_N\|_\infty \|F_\alpha^{-1} f\|_{1,\alpha} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства

$$F_\alpha(\lambda_N F_\alpha^{-1} f)(x) = \sum_{|k| < N} c_k^\sigma F_\alpha \left(E_\alpha \left(i \frac{k\pi}{2\sigma} \cdot \right) F_\alpha^{-1} f \right)(x) = \sum_{|k| < N} c_k^\sigma (T^{k\pi/2\sigma} f)(x)$$

вытекает (5.7). Согласно (2.7) ряд (5.7) сходится абсолютно в $L_{p,\alpha}$ при $1 \leq p < \infty$ и равномерно на $\mathbb{R}$.

Пусть теперь $f \in E_{p,\alpha}^\sigma$, $1 \leq p \leq \infty$. Как и в лемме 5.4 положим

$$f_\delta(x) = f(x) \left(\frac{\sin \delta x}{\delta x} \right)^r, \quad r = 2[\alpha] + 4.$$

Тогда $f_\delta \in E_{1,\alpha}^{\sigma+r\delta}$, $\text{supp } F_\alpha^{-1} f_\delta \subseteq [-\sigma, \sigma]$, $F_\alpha^{-1} f_\delta \in C[-\sigma, \sigma]$. Поэтому по-предыдущему

$$F_\alpha(\Omega F_\alpha^{-1} f_\delta)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{\sigma+r\delta} (T^{k\pi/2(\sigma+r\delta)} f_\delta)(x).$$

Так как в силу леммы 5.4 $f_\delta \rightarrow f$, $\delta \rightarrow 0$, в $\mathcal{S}'$, то $F_\alpha(\Omega F_\alpha^{-1} f_\delta) \rightarrow F_\alpha(\Omega F_\alpha^{-1} f)$, $\delta \rightarrow 0$, в $\mathcal{S}'$. Действительно, для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ при $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \langle F_\alpha(\Omega F_\alpha^{-1} f_\delta), \varphi \rangle &= \langle F_\alpha^{-1} f_\delta, \Omega F_\alpha \varphi \rangle \\ &= \langle f_\delta, F_\alpha^{-1}(\Omega \varphi) \rangle \rightarrow \langle f, F_\alpha^{-1}(\Omega \varphi) \rangle = \langle F_\alpha(\Omega F_\alpha^{-1} f), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Остается доказать, что для функций

$$\Phi_\delta(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{\sigma+r\delta} (T^{k\pi/2(\sigma+r\delta)} f_\delta)(x), \quad \Phi(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^\sigma T^{k\pi/2\sigma} f(x),$$

$\Phi_\delta \rightarrow \Phi$, $\delta \rightarrow 0$, в $\mathcal{S}'$. Вначале покажем, что в $\mathcal{S}'$ при $\delta \rightarrow 0$

$$c_k^{\sigma+r\delta} T^{k\pi/2(\sigma+r\delta)} f_\delta \rightarrow c_k^\sigma T^{k\pi/2\sigma} f. \quad (5.8)$$

По лемме 5.3 $c_k^{\sigma+r\delta} \rightarrow c_k^\sigma$, $\delta \rightarrow 0$, поэтому достаточно показать, что в $\mathcal{S}'$ при $\delta \rightarrow 0$

$$T^{k\pi/2(\sigma+r\delta)} f_\delta \rightarrow T^{k\pi/2\sigma} f.$$

Действительно, для любой $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} &|\langle T^{k\pi/2(\sigma+r\delta)} f_\delta, \varphi \rangle - \langle T^{k\pi/2\sigma} f, \varphi \rangle| \\ &= |\langle (T^{k\pi/2(\sigma+r\delta)} - T^{k\pi/2\sigma}) f_\delta, \varphi \rangle + \langle T^{k\pi/2\sigma} (f_\delta - f), \varphi \rangle| \\ &= |\langle f_\delta, (T^{-k\pi/2(\sigma+r\delta)} - T^{-k\pi/2\sigma}) \varphi \rangle + \langle f_\delta - f, T^{-k\pi/2\sigma} \varphi \rangle| \\ &\leq \|f\|_\infty \| (T^{-k\pi/2(\sigma+r\delta)} - T^{-k\pi/2\sigma}) \varphi \|_{1,\alpha} + |\langle f_\delta - f, T^{-k\pi/2\sigma} \varphi \rangle|. \end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$ в силу непрерывности оператора T^s по s в $L_{1,\alpha}$, а второе слагаемое – в силу леммы 5.4. Таким образом, (5.8) доказано.

По лемме 5.3 существует последовательность $c_k = c_k(\delta_0)$ такая, что $|c_k^{\sigma+r\delta}| \leq c_k$ для $0 < \delta \leq \delta_0$ и $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k < \infty$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\sum_{|k| > N} c_k < \varepsilon$. Тогда для $\varphi \in \mathcal{S}$

$$|\langle \Phi_\delta - \Phi, \varphi \rangle| \leq \sum_{|k| \leq N} |\langle (c_k^{\sigma+r\delta} T^{k\pi/2(\sigma+r\delta)} f_\delta - c_k^\sigma T^{k\pi/2\sigma} f), \varphi \rangle| + 6\|f\|_\infty \|\varphi\|_{1,\alpha} \sum_{|k| > N} c_k.$$

В силу (5.8)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |\langle \Phi_\delta - \Phi, \varphi \rangle| \leq 6 \|f\|_\infty \|\varphi\|_{1,\alpha} \varepsilon,$$

а в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \langle \Phi_\delta - \Phi, \varphi \rangle = 0.$$

Теорема 5.5 доказана.

Пусть $f \in E_{p,\alpha}^\sigma$. Тогда $F_\alpha(\Lambda_\alpha f)(x) = ix F_\alpha f(x)$ и $\Lambda_\alpha f(x) = F_\alpha(-i(\cdot) F_\alpha^{-1} f(\cdot))(x)$. Используя разложение

$$it = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k-1} \sigma}{(k-1/2)^2 \pi^2} e^{i((2k-1)/2\sigma)\pi t}, \quad |t| \leq \sigma,$$

равенство $V_\alpha(t)(x) = x/2(\alpha+1)$, (2.4), лемму 5.3, теорему 5.5, получим следующую интерполяционную формулу.

ТЕОРЕМА 5.6. Если $f \in E_{p,\alpha}^\sigma$, $1 \leq p \leq \infty$, $\sigma > 0$, то

$$\Lambda_\alpha f(x) = \frac{2(\alpha+1)\sigma}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{(k-1/2)^2} (T^{((2k-1)/2\sigma)\pi} f)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.9)$$

Ряд (5.9) сходится абсолютно в $f \in L_{p,\alpha}$ и равномерно на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Неравенство Бернштейна легко вытекает из теоремы 5.6 и (2.7).

Из неравенства Бернштейна и предложения 4.3 (iv) выводим следствие.

СЛЕДСТВИЕ 5.7. Если $f \in E_{p,\alpha}^\sigma$, $1 \leq p < \infty$, $\sigma > 0$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$\omega_k(f, \delta)_{p,\alpha} \leq c(\sigma\delta)^k \|f\|_{p,\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Согласно теореме 5.2 для любого $\sigma \geq 0$ существует $f_\sigma \in E_{p,\alpha}^\sigma$, для которой $\|f - f_\sigma\|_{p,\alpha} = E_\sigma(f)_{p,\alpha}$. Для любого $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} &\leq \omega_k\left(f - f_{2^{m+1}}, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} + \omega_k\left(f_{2^{m+1}}, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} \\ &\leq 3 \cdot 2^k E_{2^{m+1}}(f)_{p,\alpha} + \omega_k\left(f_{2^{m+1}}, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha}. \end{aligned}$$

Согласно предложению 4.3

$$\begin{aligned} \omega_k\left(f_{2^{m+1}}, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} &\leq \frac{c_{k,\alpha}}{n^k} \|\Lambda_\alpha^k f_{2^{m+1}}\|_{p,\alpha} \\ &\leq \frac{c_{k,\alpha}}{n^k} \left(\|\Lambda_\alpha^k f_1\|_{p,\alpha} + \sum_{j=0}^m \|\Lambda_\alpha^k f_{2^{j+1}} - \Lambda_\alpha^k f_{2^j}\|_{p,\alpha} \right). \end{aligned}$$

По неравенству Бернштейна

$$\begin{aligned}\|\Lambda_\alpha^k f_{2^{j+1}} - \Lambda_\alpha^k f_{2^j}\|_{p,\alpha} &\leq c 2^{(j+1)k} \|f_{2^{j+1}} - f_{2^j}\|_{p,\alpha} \leq c 2^{(j+1)k+1} E_{2^j}(f)_{p,\alpha}, \\ \|\Lambda_\alpha^k f_1\|_{p,\alpha} &= \|\Lambda_\alpha^k f_1 - \Lambda_\alpha^k f_0\|_{p,\alpha} \leq 2E_0(f)_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\omega_k\left(f_{2^{m+1}}, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} &\leq \frac{c_{k,\alpha}}{n^k} \left(2E_0(f)_{p,\alpha} + 2c \sum_{j=0}^m 2^{(j+1)k} E_{2^j}(f)_{p,\alpha}\right) \\ &\leq \frac{B_{k,\alpha}}{n^k} \left(E_0(f)_{p,\alpha} + \sum_{j=0}^m 2^{(j+1)k} E_{2^j}(f)_{p,\alpha}\right).\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{l=2^{j-1}+1}^{2^j} l^{k-1} E_l(f)_{p,\alpha} \geq 2^{(j-1)(k-1)} E_{2^j}(f)_{p,\alpha} \cdot 2^{j-1} = 2^{(j-1)k} E_{2^j}(f)_{p,\alpha}, \quad (5.10)$$

получим

$$\begin{aligned}\omega_k\left(f_{2^{m+1}}, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} &\leq \frac{B_{k,\alpha}}{n^k} \left(E_0(f)_{p,\alpha} + 2^k E_1(f)_{p,\alpha} + \sum_{j=1}^m 2^{2k} \sum_{l=2^{j-1}+1}^{2^j} l^{k-1} E_l(f)_{p,\alpha}\right) \\ &\leq \frac{D_{k,\alpha}}{n^k} \sum_{j=0}^{2^m} (j+1)^{k-1} E_j(f)_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Выбирая m так, чтобы $2^m \leq n < 2^{m+1}$, придем к неравенству

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} \leq \frac{C}{n^k} \sum_{j=0}^n (j+1)^{k-1} E_j(f)_{p,\alpha},$$

где $C = C_{k,\alpha} > 0$ и не зависит от f и n . Теорема 2.4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5. Рассмотрим следующий ряд:

$$\Lambda_\alpha^r f_1 + \sum_{j=0}^{\infty} (\Lambda_\alpha^r f_{2^{j+1}} - \Lambda_\alpha^r f_{2^j}). \quad (5.11)$$

Из неравенства Бернштейна имеем

$$\|\Lambda_\alpha^r f_{2^{j+1}} - \Lambda_\alpha^r f_{2^j}\| \leq c 2^{(j+1)r} E_{2^j}(f)_{p,\alpha} \leq c_1 \sum_{l=2^{j-1}+1}^{2^j} l^{r-1} E_l(f)_{p,\alpha}.$$

Следовательно, ряд (5.11) сходится к некоторой функции $g \in L_{p,\alpha}$. Покажем, что $g = \Lambda_\alpha^r$, т.е. $f \in W_{p,\alpha}^r$. Если

$$S_N = \Lambda_\alpha^r f_1 + \sum_{j=0}^N (\Lambda_\alpha^r f_{2^{j+1}} - \Lambda_\alpha^r f_{2^j})$$

и $\phi \in \mathcal{S}$, то

$$\begin{aligned}\langle F_\alpha g, \phi \rangle &= \langle g, F_\alpha \phi \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N, F_\alpha \phi \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle F_\alpha S_N, \phi \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle (ix)^r F_\alpha f_{2^{N+1}}, \phi \rangle = \langle (ix)^r F_\alpha f, \phi \rangle.\end{aligned}$$

Следовательно, $F_\alpha g = (ix)^r F_\alpha f$ и $g = \Lambda_\alpha^r f$.

Остается доказать неравенство (2.14). Имеем

$$\omega_k \left(\Lambda_\alpha^r f, \frac{1}{n} \right)_{p,\alpha} \leq \omega_k \left(\Lambda_\alpha^r f - S_N, \frac{1}{n} \right)_{p,\alpha} + \omega_k \left(S_N, \frac{1}{n} \right)_{p,\alpha}.$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned}\omega_k \left(\Lambda_\alpha^r f - S_N, \frac{1}{n} \right)_{p,\alpha} &\leq 3 \cdot 2^k \|\Lambda_\alpha^r f - S_N\|_{p,\alpha} \leq c 2^{k+1} \sum_{j=N+1}^{\infty} 2^{(j+1)r} E_{2^j}(f)_{p,\alpha} \\ &\leq D \sum_{l=2^{N+1}}^{\infty} l^{r-1} E_l(f)_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

С другой стороны, из следствия 5.7

$$\begin{aligned}\omega_k \left(S_N, \frac{1}{n} \right)_{p,\alpha} &\leq \omega_k \left(\Lambda_\alpha^r f_1, \frac{1}{n} \right)_{p,\alpha} + \sum_{j=0}^N \omega_k \left(\Lambda_\alpha^r f_{2^{j+1}} - \Lambda_\alpha^r f_{2^j}, \frac{1}{n} \right)_{p,\alpha} \\ &\leq \frac{C}{n^k} \|f_1\|_{p,\alpha} + \frac{C}{n^k} \sum_{j=0}^N 2^{(j+1)(k+r)} E_{2^j}(f)_{p,\alpha}.\end{aligned}$$

Применяя (5.10), и выбирая N так, чтобы $2^N \leq n < 2^{N+1}$, закончим доказательство (2.14). Теорема 2.5 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. С. Платонов, “Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:5 (2007), 149–196.
- [2] С. С. Платонов, “Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций на полупрямой”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:1 (2009), 154–174.
- [3] C. T. Roosenraad, *Inequalities with Orthogonal Polynomials*, Ph.D. Thesis, Univ. of Wisconsin–Madison, 1969.
- [4] M. F. E. de Jeu, “The Dunkl transform”, *Invent. Math.*, **113**:1 (1993), 147–162.
- [5] N. B. Andersen, M. de Jeu, “Elementary proofs of Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform on the real line”, *Int. Math. Res. Not.*, **30** (2005), 1871–1831.
- [6] S. Thangavelu, Y. Xu, “Convolution operator and maximal function for the Dunkl transform”, *J. Anal. Math.*, **97**:1 (2005), 25–55.
- [7] M. Rösler, “Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators”, *Comm. Math. Phys.*, **192**:3 (1998), 519–542.
- [8] C. F. Dunkl, “Integral kernels with reflection group invariance”, *Canad. J. Math.*, **43**:6 (1991), 1213–1227.
- [9] Ó. Ciaurri, J. L. Varona, “A Whittaker–Shannon–Kotel’nikov sampling theorem related to the Dunkl transform”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:9 (2007), 2939–2947.

- [10] С. С. Платонов, Е. С. Белкина, “Эквивалентность K -функционалов и модулей гладкости, построенных по обобщенным сдвигам Данкля”, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 8, 3–15.
- [11] M. A. Mourou, K. Trimèche, “Calderon’s reproducing formula related to the Dunkl operator on the real line”, *Monatsh. Math.*, **136**:1 (2002), 47–65.
- [12] H. Mejjaoli, N. Sraieb, “Uncertainty principles for the continuous Dunkl Gabor transform and the Dunkl continuous wavelet transform”, *Mediterr. J. Math.*, **5**:4 (2008), 443–466.
- [13] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.
- [14] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматлит, М., 1960.
- [15] K. Trimèche, “The Dunkl intertwining operator on spaces of functions and distributions and integral representation of its dual”, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **12**:4 (2001), 349–374.

Йонг Пинг Ли

Beijing Normal University

E-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Поступило

23.03.2011

Исправленный вариант

04.06.2011

Чун Мей Су

Beijing Normal University

E-mail: pinkapple13@yeah.net

В. И. Иванов

Тульский государственный университет

E-mail: ivaleryi@mail.ru