Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Джумадильдаев, Тождество Ворпицкого для мультиперестановок, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 464–466

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 08:53:11

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Тождество Ворпицкого для мультиперестановок

А. С. Джумадильдаев

Тождество Ворпицкого [1] (см. также [2]) выражает x^n как линейную комбинацию биномиальных полиномов:

$$x^n = \sum_{p=1}^n \binom{x+p-1}{n} a_{n,p}.$$

Коэффициенты $a_{n,p}$ имеют интересную комбинаторную интерпретацию. Для перестановки $\sigma \in S_n$ будем говорить, что i является *индексом спуска*, если $i = n$ или $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ при $i < n$. Тогда $a_{n,p}$ равен числу перестановок с p индексами спуска. Например, S_3 имеет одну перестановку с 3 индексами спуска (именно 321), четыре перестановки с двумя индексами спуска (132, 213, 231, 312) и одну перестановку с одним индексом спуска (123). Итак, $a_{3,1} = 1$, $a_{3,2} = 4$, $a_{3,3} = 1$, и

$$x^3 = \binom{x}{3} + 4 \binom{x+1}{3} + \binom{x+2}{3}.$$

Числа $a_{n,p}$ называются *числами Эйлера*. Индексы спуска и числа Эйлера допускают естественное обобщение для перестановок на мультимножествах. Пусть $\mathbf{n} = 1^{k_1} \dots n^{k_n}$ – мультимножество, т.е. множество с элементами $1, 2, \dots, n$, где каждый элемент i повторяется k_i раз. Пусть $S_{\mathbf{n}}$ – множество перестановок на мультимножестве $\mathbf{n}$. Заметим, что

$$|S_{\mathbf{n}}| = \binom{k_1 + \dots + k_n}{k_1 \dots k_n} = \frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \dots k_n!}.$$

Для $\sigma \in S_{\mathbf{n}}$, как в случае обычных перестановок, будем говорить, что i – *индекс спуска*, если $i = n$ или $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ при $i < n$. Обозначим через $\text{des } \sigma$ число индексов спуска

$$\text{des } \sigma = |\{i \mid i = n \text{ или } \sigma(i) > \sigma(i+1), 1 \leq i < n\}|.$$

Эйлерово число $a_{\mathbf{n},p}$ для мультимножества $\mathbf{n}$ определяется как число мультиперестановок с p индексами спуска,

$$a_{\mathbf{n},p} = |\{\sigma \in S_{\mathbf{n}} \mid \text{des } \sigma = p\}|.$$

Пусть $A_{\mathbf{n}} = \sum_{p \geq 0} a_{\mathbf{n},p} x^p$ – Эйлеров многочлен мультимножества $\mathbf{n}$.

ПРИМЕР. Имеем

$$\begin{aligned} S_{1^2 2^3, 1} &= \{11222\}, & S_{1^2 2^3, 2} &= \{12122, 12212, 12221, 21122, 22112, 22211\}, \\ S_{1^2 2^3, 3} &= \{21212, 21221, 22121\}, \\ A_{1^2 2^3} &= x + 6x^2 + 3x^3. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Для неотрицательных целых чисел $k_1, \dots, k_n$

$$\prod_{i=1}^n \binom{x+k_i-1}{k_i} = \sum_{p \geq 0} \binom{x+k_1+\dots+k_n-p}{k_1+\dots+k_n} a_{\mathbf{n},p},$$

где $a_{\mathbf{n},p}$ – числа Эйлера для перестановок мультимножества $\mathbf{n} = 1^{k_1} \dots n^{k_n}$.

Эта теорема следует из результатов работы [3]. Цель заметки – дать простое доказательство тождества Ворпицкого для мультиперестановок.

Доказательство основано на понятии размеченных перестановок [4]. Пусть $\sigma \in S_{\mathbf{n}}$. Размеченная перестановка с базой σ есть перестановка σ с разметками между компонентами σ такими, что каждый индекс спуска имеет, по крайней мере, одну разметку. Пусть $B_{\mathbf{n}}$ – множество размеченных перестановок на мультимножестве $\mathbf{n} = 1^{k_1} \dots n^{k_n}$. Пусть $b_{\mathbf{n},p}$ – число размеченных перестановок с p разметками. Например, $B_{1^2 2^2}$ имеет 9 размеченных перестановок с 2 разметками,

$$\{1122//, 112/2/, 11/22/, 1/122/, /1122/, 12/12/, 122/1/, 2/112/, 22/11/\}.$$

Итак, $b_{1^2 2^2, 2} = 9$.

ЛЕММА 2. Имеем

$$\sum_{p \geq 1} b_{\mathbf{n},p} x^p = \frac{\sum_{i \geq 0} a_{\mathbf{n},i} x^i}{(1-x)^{k_1+\dots+k_n+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Размеченная перестановка с p разметками может быть получена из перестановки с $p-i$ индексами спусков с помощью включения i разметок в $k_1+\dots+k_n+1$ местах. Это можно сделать $\binom{k_1+\dots+k_n+i}{i}$ способами. Поэтому

$$b_{\mathbf{n},p} = \sum_{i \geq 0} \binom{k_1+\dots+k_n+i}{i} a_{\mathbf{n},p-i}.$$

ЛЕММА 3. Имеем

$$b_{\mathbf{n},p} = \prod_{i=1}^n \binom{p+k_i-1}{k_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим размеченную перестановку с p разметками. Пронумеруем разметки слева направо $1, 2, \dots, p$. Пусть $x_{i,j}$ – число компонент, равных i между $(j-1)$ -й и j -й разметками при $j > 1$, и $x_{i,1}$ обозначает число компонент, равных i перед первой разметкой при $j = 1$. Заметим, что компоненты базовой перестановки между $(j-1)$ -й и j -й разметками образуют (если они есть) неубывающую последовательность. Поэтому всякая размеченная перестановка с p разметками удовлетворяет следующей системе из n уравнений:

$$\sum_{j=1}^p x_{i,j} = k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и обратно, всякое неотрицательное целочисленное решение такой системы соответствует размеченной перестановке с p разметками, причем такое соответствие взаимно-однозначно. Эти уравнения независимы и каждое уравнение имеет $\binom{k_i+p-1}{k_i}$ неотрицательных целочисленных решений. Поэтому количество размеченных перестановок с p разметками равно $\prod_{i=1}^n \binom{k_i+p-1}{k_i}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По леммам 2, 3

$$\prod_{i=1}^n \binom{p+k_i-1}{k_i} = \sum_{i=0}^p \binom{k_1+\dots+k_n+i}{i} a_{\mathbf{n},p-i}$$

$$= \sum_{i=0}^p \binom{k_1 + \dots + k_n + p - i}{p - i} a_{\mathbf{n},p} = \sum_{i=0}^p \binom{p + k_1 + \dots + k_n - i}{k_1 + \dots + k_n} a_{\mathbf{n},p};$$

здесь p – любое целое число. Поэтому мы можем заменить p на формальный параметр x .

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $k_1 = \dots = k_n = k$. Тогда

$$\binom{x + k - 1}{k}^n = \sum_{p \geq 0} \binom{x + k - 2 + p}{kn} a_{\mathbf{n},p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 1 и из того факта, что $a_{\mathbf{n},p} = a_{\mathbf{n},(n-1)k+2-p}$ для всех $p = 1, 2, \dots, (n-1)k + 1$.

В частности в случае $k_1 = \dots = k_n = 1$ мы получаем тождество Ворпицкого.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Worpitzky, *J. Reine Angew. Math.*, **94** (1883), 203–232. [2] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики*, Вильямс, М., 2009.
[3] J. F. Dillon, D. P. Roselle, *SIAM J. Appl. Math.*, **17**:6 (1969), 1086–1093. [4] I. Gessel, R. P. Stanley, *J. Combinatorial Theory Ser. A*, **24**:1 (1978), 24–33.

А. С. Джумадильдаев

Казахско-Британский технический университет,

г. Алматы, Казахстан

E-mail: askar56@hotmail.com

Поступило

14.12.2010