Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Раутиан, О структуре и свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 470–473

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9226>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 08:58:24

О структуре и свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике

Н. А. Раутиан

1. Постановка задачи. В предлагаемой работе исследуются интегродифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве H

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + K(0)A^2 u(t) + \int_0^t K'(t-s)A^2 u(s) ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \quad (2)$$

Предполагается, что A – самосопряженный положительный оператор, действующий в пространстве H , имеющий компактный обратный, скалярная функция $K(t)$ допускает представление

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t}, \quad (3)$$

где числа $c_j > 0$, $\gamma_{j+1} > \gamma_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $\gamma_j \rightarrow +\infty$ ($j \rightarrow +\infty$) и выполнено условие

$$K(0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < \infty. \quad (4)$$

Из условия (4) следует, что ядро $K'(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Если к условию (4) добавить условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty, \quad (5)$$

то ядро $K'(t)$ будет принадлежать пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Указанные уравнения представляют собой абстрактную форму интегродифференциальных уравнений, описывающих процесс распространения тепла в средах с памятью (уравнения типа Гуртина–Пипкина см. [1], [2]), процесс распространения звука в вязкоупругих средах (см. [3]), а также возникающих в задачах усреднения в перфорированных средах (закон Дарси, см. [4]).

В работе получены представления решений задачи (1), (2) в виде рядов по экспонентам, отвечающим точкам спектра оператор-функции, являющейся символом уравнения (1).

2. Определения и обозначения. Превратим область определения $\text{Dom}(A^\beta)$ оператора A^β , $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β , введя на $\text{Dom}(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$.

Через $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H , снабженное нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t} (\|u^{(n)}(t)\|_H^2 + \|A^n u(t)\|_H^2) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geq 0.$$

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ см. в гл. I монографии [5]. При $n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^0(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вектор-функцию u назовем *сильным решением задачи* (1), (2), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geq 0$, удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальным условиям (2).

Рассмотрим оператор-функцию $L(\lambda)$, которая является символом (аналогом характеристического квазиполинома) уравнения (1):

$$L(\lambda) := \lambda^2 I + \lambda \hat{K}(\lambda) A^2, \quad \hat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k(\lambda + \gamma_k)}. \quad (6)$$

Здесь $\hat{K}(\lambda)$ – преобразование Лапласа функции $K(t)$, I – единичный оператор, действующий в пространстве H .

Обозначим $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A , отвечающих собственным значениям a_j : $Ae_j = a_j e_j$, $j \in \mathbb{N}$. Собственные значения оператора A удовлетворяют строгим неравенствам $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \dots$, $a_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим сужение $l_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n^2 \lambda \hat{K}(\lambda)$ оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n . Таким образом, получаем счетный набор мероморфных функций $l_n(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$.

Представления решений задачи (1), (2) в виде рядов по экспонентам, полученные в работе, зависят от структуры и свойств спектра оператор-функции $L(\lambda)$.

Структура спектра оператор-функции $L(\lambda)$ имеет вид

$$\sigma(L) := \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \lambda_{kn} \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\pm} \right)}, \quad (7)$$

где $\{\lambda_{k,n} \mid k \in \mathbb{N}\}$ – действительные нули, а $\lambda_n^{\pm}$ – пара комплексно-сопряженных нулей, $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$ мероморфной функции $l_n(\lambda)$ (подробнее см. [6].)

Будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$$\sup_k \{\gamma_k(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty. \quad (8)$$

Отметим, что условие (8) было введено и использовано в работе [7].

3. Формулировка результатов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(t) = 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$, вектор-функция $u(t) \in W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$, $\gamma > 0$, является сильным решением задачи (1), (2) и выполнены условия (4), (8). Тогда для любого $t \in \mathbb{R}_+$ решение $u(t)$ задачи (1), (2) представимо в виде суммы ряда

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^+ \varphi_{0n}) e^{\lambda_n^+ t} e_n}{l_n'(\lambda_n^+)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^- \varphi_{0n}) e^{\lambda_n^- t} e_n}{l_n'(\lambda_n^-)} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_{k,n} \varphi_{0n}) e^{\lambda_{k,n} t}}{l_n'(\lambda_{k,n})} \right) e_n, \end{aligned} \quad (9)$$

сходящегося по норме пространства H , где $\lambda_{k,n}$ – действительные нули мероморфной функции $l_n(\lambda)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\dots < -\gamma_{k+1} < x_{k+1} < \lambda_{k+1,n} < -\gamma_k < \dots < -\gamma_1 < \lambda_{1,n}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

x_k – действительные нули функции $\lambda \hat{K}(\lambda)$, причем $\lambda_{1,n} = x_1 = 0$, $\lambda_{k,n} = x_k + O(1/a_n^2)$, $a_n \rightarrow +\infty$, $\lambda_n^{\pm}$ – пара комплексно-сопряженных нулей, $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$, асимптотически представимых в следующем виде:

1) если выполнено условие (5), то

$$\lambda_n^\pm = \pm i(\sqrt{K(0)} \cdot a_n + O(1)) - \frac{1}{2K(0)} \sum_{k=1}^{\infty} c_k + O\left(\frac{1}{a_n^2}\right), \quad a_n \rightarrow +\infty; \quad (11)$$

2) если условие (5) не выполнено, то

$$\lambda_n^\pm = \pm i\Theta(\{c_k\}, \{\gamma_k\})a_n + \Phi(a_n, c_k, \gamma_k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

где $\Theta(\{c_k\}, \{\gamma_k\})$ – некоторая положительная постоянная, зависящая от последовательностей $\{c_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$, $\operatorname{Re} \Phi(a_n, c_k, \gamma_k) = O(a_n)$, $\operatorname{Im} \Phi(a_n, c_k, \gamma_k) = o(a_n)$ при $a_n \rightarrow +\infty$, причем $\lim_{a_n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \Phi(a_n, c_k, \gamma_k) = -\infty$.

Заметим, что случаю 2) удовлетворяют последовательности $\{c_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$, которые имеют следующие асимптотические представления:

$$c_k = \frac{\mathcal{A}}{k^\alpha} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right), \quad \gamma_k = \mathcal{B}k^\beta + O(k^{\beta-1}), \quad k \rightarrow +\infty, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad \alpha + \beta > 1.$$

В [6] для указанных последовательностей приведены асимптотические формулы комплексных собственных значений $\lambda_n^\pm$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H_1$, то ряд, полученный из (9) p -кратным почленным дифференцированием по t при $p = 0, 1, 2$, сходится в пространстве H_{2-p} равномерно по t на любом отрезке $[t_0, T]$, где $0 < t_0 < T < +\infty$. При этом, для всех $t \in [t_0, T]$ справедливы оценки

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(p)}(t) e_n \right\|_{H_{2-p}}^2 \leq d(\|A\varphi_1\|^2 + \|A^2\varphi_0\|^2), \quad p = 0, 1, 2,$$

с константой d , не зависящей от вектор-функций φ_1 и φ_0 .

Кроме того, в случае конечного числа слагаемых в (3) (т.е. $c_j = 0$ для $j > N$, $N \in \mathbb{N}$) можно положить $t_0 = 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть вектор-функция $f(t) \in W_{2,\gamma^*}^2(\mathbb{R}_+, A)$ при некотором $\gamma^* \geq 0$, вектор-функция $u(t) \in W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$, $\gamma > \gamma^*$ является сильным решением задачи (1), (2) и выполнены условия (4), (8), $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}_+$ решение $u(t)$ задачи (1), (2) представимо в виде суммы ряда

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t, \lambda_n^+) e_n + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t, \lambda_n^-) e_n + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \omega_n(t, \lambda_{kn}) \right) e_n, \quad (13)$$

сходящегося по норме пространства H , где

$$\omega_n(t, \lambda) = \frac{\int_0^t f_n(\tau) e^{\lambda(t-\tau)} d\tau}{l'_n(\lambda)}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и выполнено условие $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{-3/2} < \infty$. Тогда ряд, полученный из (13) p -кратным почленным дифференцированием по t при $p = 0, 1, 2$, сходится в пространстве H_{2-p} равномерно по t на любом отрезке $[t_0, T]$, где $0 < t_0 < T < +\infty$, причем

$$\omega_n^{(p)}(t, \lambda) = \frac{((p-1)f'_n(0) + \lambda^{(p-1)}f_n(0))e^{\lambda t} + \int_0^t f_n^{(p)}(\tau) e^{\lambda(t-\tau)} d\tau}{l'_n(\lambda)}$$

и для всех $t \in [t_0, T]$ справедливы следующие оценки:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) e_n \right\|_{H_2}^2 \leq d \|A^2 f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(p)}(t) e_n \right\|_{H_{2-p}}^2 \\ & \leq d (\|A^{2-p} f^{(p)}(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2 + \|A^{2-p} f(0)\|_H^2 + (p-1) \|f'(0)\|_H^2), \quad p = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Ряды (9) и (13) получены в результате применения обращения преобразования Лапласа решения задачи (1), (2), с использованием интегрирования по прямоугольным контурам, разделяющим точки $-\gamma_j$ (конструкция этих контуров приведена в [6]). Существенную роль при этом играют оценки оператор-функции $L^{-1}(\lambda)$ на указанных контурах. Кроме того, при доказательстве теорем 1–4 существенно используются представления (10), (11) и (12), полученные в работе [6].

В заключение отметим, что разрешимость задачи (1), (2) в описанных выше пространствах Соболева изучалась в работе [6], но не рассматривался вопрос о представлении решений в виде рядов по элементарным решениям. Кроме того, разрешимость уравнения типа Гуртина–Пипкина в тех же пространствах изучалась в [8] и в [2], в иных функциональных пространствах. В частных случаях локализация спектра оператор-функции $L(\lambda)$ изучалась в работах [7], [9]. В [6], [10], [11] приводятся результаты о корректной разрешимости и спектральный анализ уравнений вида (1).

Автор выражает глубокую благодарность профессорам В. В. Власову, Е. В. Радкевичу, А. С. Шамаеву и А. А. Шкаликову за конструктивные замечания и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Е. Гуртин, А. С. Пипкин, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **31**:2 (1968), 113–126.
 [2] L. Pandolfi, *Appl. Math. Optim.*, **52**:2 (2005), 143–165. [3] А. И. Милославский, *Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости*, Деп. в Укр. ВИНТИ № 1229-УК87, Харьков.
 [4] Д. А. Космодемьянский, А. С. Шамаев, *Труды Четвертой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 14–21 августа, 2005). Часть 3*, СМФН, **17**, РУДН, М., 2006, 88–109. [5] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, т. 1, Мир, М., 1971. [6] В. В. Власов, Н. А. Раутиан, А. С. Шамаев, *Уравнения в частных производных*, СМФН, **39**, РУДН, М., 2011, 36–65. [7] S. Ivanov, T. Sheronova, *Spectrum of the Heat Equation with Memory*, arXiv:math.CV/0912.1818v1. [8] В. В. Власов, Д. А. Медведев, *Функционально-дифференциальные уравнения*, СМФН, **30**, РУДН, М., 2008, 3–173. [9] S. A. Ivanov, *Spectrum of the Heat Equation with Memory*, arXiv:math.CV/1002.2831. [10] В. В. Власов, Дж. Ву, Г. Р. Кабирова, *Труды Пятой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 17–24 августа, 2008). Часть 1*, СМФН, **35**, РУДН, М., 2010, 44–59. [11] В. В. Власов, Н. А. Раутиан, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **29**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2011, 28–67.

Н. А. Раутиан

Российский экономический университет
им. Г. В. Плеханова, г. Москва
E-mail: nrautian@mail.ru

Поступило

16.03.2011