Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. О. Синицын, Асимптотическая гамильтонова редукция для геодезических на деформированных сферах и преобразование Функа–Минковского, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 474–477

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 10:47:27

Асимптотическая гамильтонова редукция для геодезических на деформированных сферах и преобразование Функа–Минковского

Д. О. Сеницын

В задачах нахождения геодезических линий на двумерных поверхностях точные аналитические решения известны только для ограниченного круга специальных случаев [1]. Поэтому представляется разумным применение для этих задач асимптотических методов аналитической механики.

Рассматриваются геодезические на поверхностях, полученных малой деформацией стандартной двумерной сферы. С помощью осреднения производится асимптотическая редукция уравнений геодезических к гамильтоновой системе с одной степенью свободы. Для специального класса деформаций сферы указанная редукция была применена ранее в [2]. В настоящей работе производится редукция для произвольной гладкой малой деформации сферы и доказывается, что осредненная система имеет гамильтониан, получаемый из функции, задающей деформацию сферы, с помощью интегрального преобразования Функа–Минковского (известного также как преобразование Радона для группы $SO(3)$), см. [3]. Функция, в главной части совпадающая с осредненным гамильтонианом, использовалась Пуанкаре для изучения замкнутых геодезических [4].

Рассмотрим движение частицы единичной массы по поверхности

$$\varphi(\vec{x}) = 0, \quad \text{где} \quad \varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 - 1 + \varepsilon \psi(\vec{x}), \quad \varepsilon \ll 1,$$

т.е. поверхность получена малым возмущением $\psi(\vec{x})$ стандартной сферы. Движение частицы описывается уравнением Лагранжа первого рода:

$$\ddot{\vec{x}} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}}.$$

Ключевое наблюдение состоит в том, что траектория частицы на малом интервале времени проходит вблизи большого круга (точного решения невозмущенной задачи – геодезической на сфере). На больших интервалах расположение этого большого круга претерпевает эволюцию со временем. Расположение большого круга может быть описано вектором нормали к его плоскости, в качестве которого служит угловой момент частицы:

$$\vec{L} = \vec{x} \times \dot{\vec{x}}.$$

Его производная по времени

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}} \times \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}} = \lambda \dot{\vec{x}} \times \left(\vec{x} + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}} \right) = \lambda \varepsilon \dot{\vec{x}} \times \frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}}.$$

Мы удерживаем в этом уравнении только члены первого порядка по ε . Ввиду этого заменяем λ на его главную часть нулевого порядка $\lambda_0 = -\dot{\vec{x}}^2 = \text{const}$ (кинетическая энергия сохраняется). Рассмотрим траектории в натуральной параметризации, для которых $\dot{\vec{x}}^2 = 1$, а значит, $\lambda_0 = -1$ и

$$\dot{\vec{L}} = -\varepsilon \dot{\vec{x}} \times \frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}}. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 10-01-00748-а, 11-02-01462-а), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3224.2010.1), АБЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № РНП-2.1.1.3704), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (номера госконтрактов: 14.740.11.0794, 02.740.11.5213).

Рис. 1. Преобразование Функа–Минковского: интегралы функции на сфере по большим кругам

Компоненты углового момента – медленные переменные, фаза обращения по большому кругу – быстрая переменная. Таким образом, эволюция момента может быть асимптотически описана с помощью метода осреднения, [5]. Рассмотрим точное решение невозмущенной системы с заданным $\vec{L}$:

$$\vec{x}_{\vec{L}}(t) = \cos t \vec{e}_1(\vec{L}) + \sin t \vec{e}_2(\vec{L}), \quad (2)$$

где векторы $\vec{e}_1(\vec{L})$, $\vec{e}_2(\vec{L})$ образуют ортонормированный базис вместе с вектором $\vec{e}_3(\vec{L}) = \vec{L}/L$, см. рис. 1.

Осреднение функции на сфере по периоду этого решения эквивалентно применению интегрального преобразования F Функа–Минковского, сопоставляющего функции на сфере ее интегралы по большим кругам, [3]:

$$(Fg(\vec{x}))(\vec{L}) = \int_0^{2\pi} g(\cos t \vec{e}_1(\vec{L}) + \sin t \vec{e}_2(\vec{L})) dt.$$

ТЕОРЕМА 1. *Осреднение уравнений (1) динамики момента по периоду точного решения (2) невозмущенной задачи дает гамильтонову систему*

$$\dot{\vec{L}} = \{\vec{L}, H(\vec{L})\},$$

где скобки Пуассона имеют вид

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} L_k \quad (3)$$

(здесь ε_{ijk} – символ Леви–Чивиты), а гамильтониан равен (с точностью до числового множителя) преобразованию Функа–Минковского, примененному к функции $\varepsilon\psi$, задающей деформацию сферы:

$$H(\vec{L}) = \frac{1}{2\pi} F(\varepsilon\psi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осредняя (1), имеем

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= -\frac{1}{2\pi} \varepsilon \int_0^{2\pi} \vec{x}_{\vec{L}}(t) \times \frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_{\vec{L}}(t)) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \varepsilon \left(F \left(\vec{x} \times \frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}} \right) \right) (\vec{L}) = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon (F \circ \vec{l}\psi)(\vec{L}), \end{aligned} \quad (4)$$

где обозначен оператор $\vec{l} = \vec{x} \times \partial/\partial\vec{x}$ (здесь $\vec{x}$ – векторный аргумент функции, к которой применяется оператор). Справедлива следующая основная

ЛЕММА 1. *Имеет место равенство*

$$F \circ \vec{l} = \vec{l} \circ F.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для ее доказательства используем следующее

СВОЙСТВО 1. *Преобразование F коммутирует с трехмерными вращениями: для $R \in SO(3)$ выполнено*

$$R \circ F = F \circ R, \quad \text{где} \quad R\psi(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x}).$$

Действительно,

$$(R(F\psi))(\vec{L}) = \int_0^{2\pi} \psi(\vec{x}_{R^{-1}\vec{L}}(t)) dt = \int_0^{2\pi} \psi(R^{-1}\vec{x}_{\vec{L}}(t)) dt = (FR\psi)(\vec{L}).$$

Заметим, что компоненты $\vec{l}$ суть операторы бесконечно малых поворотов:

$$l_i = - \left(\frac{d}{d\alpha} R_i(\alpha) \right) \Big|_{\alpha=0},$$

где $R_i(\alpha)$ – вращение вокруг оси i на угол α . Поэтому

$$(l_i \circ F)\psi = - \frac{d}{d\alpha} ((R_i(\alpha) \circ F)\psi) \Big|_{\alpha=0} = - \frac{d}{d\alpha} ((F \circ R_i(\alpha))\psi) \Big|_{\alpha=0} = (F \circ l_i)\psi.$$

Пользуясь леммой, мы можем поменять местами операторы в (4):

$$\dot{\vec{L}} = - \frac{1}{2\pi} \varepsilon(\vec{l} \circ F\psi) = - \frac{1}{2\pi} \varepsilon \left(\vec{L} \times \frac{\partial}{\partial \vec{L}} \right) (F\psi)(\vec{L}).$$

Но легко видеть, что оператор $\vec{L} \times \partial/\partial\vec{L}$ действует на произвольную функцию $G(\vec{L})$ как взятие ее скобки Пуассона с $\vec{L}$: $\vec{L} \times \partial G/\partial\vec{L} = \{G, \vec{L}\}$ для базисных скобок (3). Поэтому осредненная система имеет *гамильтонову форму*:

$$\dot{\vec{L}} = \{\vec{L}, H(\vec{L})\}, \quad \text{где} \quad H(\vec{L}) = \frac{1}{2\pi} F(\varepsilon\psi).$$

Теорема доказана.

Алгебра Пуассона (3) имеет функцию Казимира $\vec{L}^2$. Поэтому фазовое пространство осредненной системы – двумерная сфера $\vec{L}^2 = \text{const}$. Таким образом, мы имеем гамильтонову систему с одной степенью свободы, которая, следовательно, интегрируема. Топологическая структура ее динамики описывается фазовым портретом на двумерной сфере. Траектории суть линии уровня гамильтониана $H(\vec{L}) = \text{const}$. Стационарные точки системы соответствуют геодезическим, лежащим в окрестности плоского сечения поверхности.

Вопросы осреднения в системах с одной быстрой фазой рассматривались в [6], см. также [7]. Из описанной Нейштадтом [6] возможности проведения многократного осреднения (некоторые уточнения см. в [8]) следует, что для аналитических функций деформации $\psi(\vec{x})$ векторное поле, задающее исходный геодезический поток, экспоненциально близко к некоторому гамильтонову векторному полю, задающему вполне интегрируемую систему. Экспоненциальная близость здесь понимается в том смысле, что разность указанных векторных полей имеет порядок $O(e^{-\alpha/\varepsilon})$, $\alpha > 0$. Постоянную α в принципе можно оценить, используя методы, изложенные в [8], см. также [9].

Кроме того, к данной системе применима теория КАМ для систем с собственным вырождением с двумя степенями свободы [10]. По теореме об отсутствии эволюции для таких

систем при возмущении, снимающем вырождение, получаем, что если для данной функции деформации сферы $\psi(\vec{x})$ условие снятия вырождения выполнено, то на бесконечном интервале времени действие $\vec{L}^2$, сопряженное быстрой фазе, и действие осредненной системы, которое функционально связано с ее энергией $H(\vec{L})$, остаются ε -близки к своим начальным значениям. Поэтому траектории момента $\vec{L}$ в точной системе проходят в ε -окрестности совместных линий уровня $\vec{L}^2 = \text{const}$, $H(\vec{L}) = \text{const}$, являющихся траекториями осредненной системы.

В целом данная редукция позволяет исследовать общую структуру расположения геодезических на деформированной сфере.

Автор благодарит В. Л. Голо за внимание к этой работе.

Автор признателен С. Ю. Доброхотову, А. И. Шафаревичу, А. И. Нейштадту, Д. В. Трещеву за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, т. 1–3, УРСС, М., 2001. [2] V. L. Golo, D. O. Sinitsyn, *Письма в ЭЧАЯ*, **5**:3 (2008), 473–478. [3] И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин, М. И. Граев, *Избранные задачи интегральной геометрии*, Добросвет, М., 2010. [4] H. Poincaré, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **6**:3 (1905), 237–274. [5] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, УРСС, М., 2003. [6] А. И. Нейштадт, *ПММ*, **48**:2 (1984), 197–204. [7] J. Brüning, S. Yu. Dobrokhoto, K. V. Pankrashkin, *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:1 (2002), 14–49; **9**:4 (2002), 400–416. [8] Д. В. Трещев, *Рег. хаот. дин.*, **2**:3–4 (1997), 9–20. [9] Д. В. Трещев, *Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем*, Библиотека студента-математика, **6**, Фазис, М., 1998. [10] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, “Математические аспекты классической и небесной механики”, *Динамические системы – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **3**, ВИНТИ, М., 1985, 5–290.

Д. О. Сеницын

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: d_sinitsyn@mail.ru

Поступило

10.03.2011