Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Б. Беднов, Н. П. Стрелкова, О существовании кратчайших сетей в банаховых пространствах, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 1, 46–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 09:35:27

О существовании кратчайших сетей в банаховых пространствах

Б. Б. Беднов, Н. П. Стрелкова

Для сопряженных пространств, а также для пространства L_1 доказано, что в них для любой системы точек существует затягивающая их кратчайшая сеть. Приведен пример банахова пространства, в котором для любого $n \geq 3$ найдется система из n точек, не затягиваемая кратчайшей сетью.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm9228

1. Введение. Для данных n точек $x_1, \dots, x_n$ в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ рассмотрим две задачи.

Задача 1. Найти

$$\text{smt}(x_1, \dots, x_n) = \inf_{\Gamma} \ell(\Gamma),$$

где инфимум берется по всем связным сетям Γ , соединяющим $x_1, \dots, x_n$, а через $\ell(\Gamma)$ обозначается длина сети, т.е. сумма длин ее ребер. Если для некоторой сети Γ_0 , соединяющей $x_1, \dots, x_n$, имеем $\ell(\Gamma_0) = \text{smt}(x_1, \dots, x_n)$, то называем Γ_0 *кратчайшей сетью* с границей $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Задача 2. Найти

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \inf_{x \in X} (\|x_1 - x\| + \dots + \|x_n - x\|).$$

Если в некоторой точке инфимум достигается, то называем ее *точкой Штейнера* для системы точек $x_1, \dots, x_n$.

Инфимумы в задачах 1 и 2 достигаются не всегда, т.е. не во всяком пространстве для любой системы точек существует точка Штейнера или кратчайшая сеть. Проще всего, конечно, привести соответствующие примеры в неполном нормированном пространстве. Однако оказывается, что и в банаховом пространстве может не существовать кратчайшая сеть.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00952а). Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00664а), программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-1410.2012.1) и гранта Правительства РФ по постановлению № 220, (договор №11.G34.31.0053).

Гаркави [1] привел пример банахова пространства и трех точек в нем, для которых не существует их точки Штейнера.

Веселы [2] доказал, что любое нерефлексивное банахово пространство X можно так эквивалентно перенормировать, что в новой норме для некоторой тройки элементов $x_1, x_2, x_3 \in X$ нет точки Штейнера. Конструкция новой нормы у Веселы основана на идее Конягина [3].

Недавно Бородин [4], не зная о работах Веселы и Гаркави, для каждого $n \geq 3$ построил новый пример банахова пространства X_n , в котором существует система точек $x_1, \dots, x_n$, не имеющая ни одной точки Штейнера. Отметим, что в случае $n = 3$ задачи 1 и 2 совпадают. Используя конструкцию Бородина, Кадец [5] доказал упомянутый результат Веселы (также не зная о работах Веселы и Гаркави).

В построении Бородина важно то, что свойство несуществования точки Штейнера для приводимых троек x_1, x_2, x_3 устойчиво: для любых троек элементов x'_1, x'_2, x'_3 , достаточно близких по норме к x_1, x_2, x_3 , точка Штейнера также не существует. Для нас это свойство существенно, см. лемму 9. Можно проверить, что пример Гаркави тоже устойчив, а конструкция Кадеца, судя по всему, этим свойством устойчивости не обладает. Непонятно, обладает ли этим свойством конструкция Веселы.

Из результатов работ [1], [2], [4] сразу следует, что при $n = 3$ кратчайшей сети может не быть даже в банаховом пространстве.

Мы покажем, что существует банахово пространство и для каждого $n \geq 3$ система из n точек в нем, для которой не существует кратчайшей сети (теорема 3). Таким образом, при любом $n \geq 3$ может не существовать кратчайшей сети даже в банаховом пространстве.

С другой стороны, в широком классе пространств кратчайшая сеть существует для любого набора точек. В книге [6; гл. 2, § 2] приведено доказательство существования кратчайшей сети на полном римановом многообразии, частным случаем которого является евклидова плоскость (доказательство для плоскости см. также в [7; приложение Б]). Некоторые результаты для метрических пространств имеются в [8; гл. 4, § 5]. Мы доказываем, что в любом сопряженном пространстве и в любом пространстве $L_1(M, \Sigma, \mu)$ суммируемых по Лебегу функций для любой системы точек существует кратчайшая сеть (теорема 1).

2. Определения и простейшие свойства. *Сетью* в нормированном пространстве будем называть любое конечное множество отрезков. Эти отрезки будем называть *ребрами* сети, а их концы – *вершинами* сети. Здесь и далее все отрезки считаются невырожденными, т.е. всегда предполагается, что концы отрезка не совпадают, если не оговорено обратное.

Если в сети Γ выделено некоторое подмножество вершин D , то пару (Γ, D) будем называть *сетью с границей*, а D – *границей* сети Γ . Границу сети Γ мы будем часто обозначать через $\partial\Gamma$.

Длиной $\ell(\Gamma)$ сети Γ будем называть сумму длин ее ребер.

Как уже говорилось во введении, для конечного множества $D \subset X$ связная сеть Γ с границей D называется *кратчайшей сетью, затягивающей D* , если длина сети Γ не больше, чем длина любой другой связной сети с границей D . В этом случае $\ell(\Gamma) = \text{smt}(D)$. Вершины сети Γ , лежащие в D , будем называть *граничными*, а все остальные вершины сети – *дополнительными*.

Пусть Γ_1, Γ_2 – две сети с одной и той же границей D . Будем говорить, что сети Γ_1 и Γ_2 являются сетями *одного типа*, если существует взаимно-однозначное соответствие между множествами вершин $V(\Gamma_1)$ и $V(\Gamma_2)$, оставляющее граничные вершины на месте и сохраняющее ребра (т.е. пара вершин в Γ_1 соединена ребром если и только если соответствующая пара вершин в Γ_2 соединена ребром).

Легко видеть, что отношение “иметь один тип” является отношением эквивалентности на множестве сетей с данной границей. Классы эквивалентности сетей будем называть *типами*.

Каждой сети можно поставить в соответствие граф (абстрактный), множество вершин которого совпадает с множеством вершин сети, и пара вершин является ребром графа, если и только если эти две вершины соединены отрезком в сети. Ясно, что у сетей одного типа граф одинаков. Сеть называется *связной*, если соответствующий граф связан; аналогично на сети переносятся понятия *дерева*, *степени* вершины, *подсети* (аналог подграфа), и т.д.

Имеет место следующее очевидное утверждение.

ЛЕММА 1. При поиске $\text{smt}(x_1, \dots, x_n) = \inf_{\Gamma} \ell(\Gamma)$ и кратчайшей сети с границей $\{x_1, \dots, x_n\}$ достаточно ограничиться рассмотрением сетей со свойствами:

- 1) сеть – дерево,
- 2) каждая дополнительная вершина сети имеет степень не меньше, чем 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что при наличии цикла или висячей дополнительной вершины из сети можно удалить ребро, не нарушая связность сети и не увеличивая ее длину. Если x – вершина степени 2, $[x, u]$ и $[x, v]$ – соответствующие ребра, то можно удалить вершину x и ребра $[x, u]$ и $[x, v]$, добавив ребро $[u, v]$.

Лемма доказана.

В дальнейшем всюду будем предполагать, что для всех рассматриваемых сетей выполнены свойства из леммы 1, если не оговорено противное.

ЛЕММА 2. Сеть с n граничными вершинами имеет не более $n - 2$ дополнительных вершин и не более $2n - 3$ ребер. Данные n граничных точек $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ могут быть соединены сетями конечного числа различных типов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в сети N дополнительных вершин и E ребер. Тогда $E = N + n - 1$, поскольку наша сеть – дерево, и $2E \geq n + 3N$, поскольку из каждой дополнительной вершины выходит не меньше трех ребер и не меньше одного ребра выходит из каждой граничной вершины. Поэтому $N \leq n - 2$ и $E \leq 2n - 3$.

Для каждого $N \leq n - 2$ число графов-деревьев на данных $n + N$ вершинах конечно. Поэтому число типов сетей, стягивающих данную границу, конечно.

Лемма доказана.

3. Существование кратчайших сетей. Пусть X – линейное нормированное пространство, пространства X^* и X^{**} – первое и второе сопряженные к X соответственно.

Напомним, что непустое множество T называется *направленным*, если на нем введена частичная упорядоченность, удовлетворяющая следующему условию: для всяких $t, s \in T$ найдется такое $u \in T$, что $t \leq u$ и $s \leq u$.

Направленностью (см., например, [9; гл. 1, § 9] в топологическом пространстве X называется набор элементов $\{x_t\}_{t \in T}$ в X , индексиремых направленным множеством T . Направленность $\{x_t\}_{t \in T}$ называется *поднаправленностью* направленности $\{y_s\}_{s \in S}$, если есть такое отображение $\pi: T \rightarrow S$, что $x_t = y_{\pi(t)}$ и для всякого $s_0 \in S$ найдется $t_0 \in T$ с условием $\pi(t) \geq s_0$ при всех $t \geq t_0$.

По определению, направленность $\{x_t\}_{t \in T}$ в топологическом пространстве X сходится к элементу $x \in X$, если для всякого открытого множества U , содержащего x , найдется такой индекс t_0 , что $x_t \in U$ для всех $t \in T$ с условием $t \geq t_0$.

ТЕОРЕМА 1. *В банаховом пространстве X , для которого существует проектор $P: X^{**} \rightarrow X$ нормы 1 (в частности, в любом сопряженном пространстве или в пространстве L_1 [10]), для любого натурального n и для любых точек $x_1, \dots, x_n$ существует затягивающая их кратчайшая сеть.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сети в пространстве X^{**} с границей $x_1, \dots, x_n \in X$. Заметим, что дополнительные вершины кратчайшей сети можно искать лишь в замкнутом шаре $B \subset X^{**}$ радиуса $2 \cdot \sum_{i=1}^n \|x_i\|$ с центром в нуле. Действительно, любая дополнительная вершина связной сети соединяется со всеми x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ по ломаным, и если некоторая вершина a_l кратчайшей сети Γ лежит вне шара B , то длина этой сети больше $\|a_l - x_1\| \geq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$. Но сеть $\bigcup_{i=1}^n [0, x_i]$ имеет длину, равную $\sum_{i=1}^n \|x_i\|$, что противоречит тому, что сеть Γ является кратчайшей.

Фиксируем один тип сетей. На множестве $\mathcal{S}$ сетей данного типа с границей $x_1, \dots, x_n \in X$ введем частичный порядок: $\Gamma_1 \geq \Gamma_2$ тогда и только тогда, когда $\ell(\Gamma_1) \leq \ell(\Gamma_2)$. Заметим, что любые две сети одного типа при таком упорядочивании сравнимы.

Пусть у сетей данного типа d дополнительных вершин и N ребер. Сети $s \in \mathcal{S}$ данного типа поставим в соответствие элемент $\gamma_s = (a_1, \dots, a_d) \in (X^{**})^d$, состоящий из ее дополнительных вершин. Множество $\mathcal{S}$ направлено, поэтому множество $\{\gamma_t\}_{t \in \mathcal{S}}$ является направленностью.

Пространство $(X^{**})^d$ с нормой

$$\|\gamma\| = \|(a_1, \dots, a_d)\| = \sum_{i=1}^d \|a_i\|_{X^{**}}$$

является хаусдорфовым в $*$ -слабой топологии, и замкнутый шар B^d в этом пространстве $*$ -слабо компактен по теореме Банаха–Алаоглу [9; гл. 6, § 7] как шар в пространстве, сопряженном к $(X^*)^d$. По теореме 1.9.10 из [9; гл. 1, § 9], всякая бесконечная направленность в $(X^{**})^d$ имеет поднаправленность, сходящуюся к некоторому элементу из $(X^{**})^d$. Поэтому существует сходящаяся к $\bar{\gamma} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_d) \in (X^{**})^d$ поднаправленность $\{g_s\}_{s \in S \subseteq \mathcal{S}} \subseteq \{\gamma_t\}_{t \in \mathcal{S}}$. Сеть данного типа с дополнительными вершинами $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_d$ и границей $x_1, \dots, x_n$ обозначим $\bar{\Gamma}$.

Рассмотрим любую дополнительную вершину a_i сети s данного типа. Пусть из нее выходит n_i ребер к вершинам $a_1^i, \dots, a_{k_i}^i, x_1^i, \dots, x_{l_i}^i$ сети s , $l_i + k_i = n_i$. Занумеруем ребра вершины a_i в некотором порядке. Рассмотрим $*$ -слабую окрестность

$$\begin{aligned} U &= U(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_d; f_1^1, \dots, f_{n_1}^1, f_1^2, \dots, f_1^d, \dots, f_{n_d}^d, \varepsilon) \\ &= \{(a_1, \dots, a_d) : |f_j^i(a_i - \bar{a}_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, n_i\} \end{aligned}$$

точки $\bar{\gamma}$. Здесь функционал $f_j^i \in X^*$, $\|f_j^i\| = 1$ при каждом $i \in \{1, \dots, d\}$ и $j \in \{1, \dots, n_i\}$ выбирается так, что если a_i соединена ребром с a_k (тогда и $\bar{a}_i$ соединена ребром с $\bar{a}_k$), то

$$|f_j^i(\bar{a}_i - \bar{a}_k)| > (1 - \varepsilon)\|\bar{a}_i - \bar{a}_k\|,$$

а если a_i соединена ребром с x_l , то

$$|f_m^i(\bar{a}_i - x_l)| > (1 - \varepsilon)\|\bar{a}_i - x_l\|,$$

где j и m это номера ребер, соединяющих a_i с a_k и x_l соответственно. Тогда для элементов набора $(a_1, \dots, a_d) \in U$ выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|a_i - a_k\| &\geq |f_j^i(a_i - a_k)| = |f_j^i((a_i - \bar{a}_i) + (\bar{a}_i - \bar{a}_k) + (\bar{a}_k - a_k))| \\ &\geq |f_j^i(\bar{a}_i - \bar{a}_k)| - 2\varepsilon \geq (1 - \varepsilon)\|\bar{a}_i - \bar{a}_k\| - 2\varepsilon \end{aligned}$$

при соединении ребром вершин a_i и a_k и

$$\begin{aligned} \|a_i - x_l\| &\geq |f_m^i(a_i - x_l)| = |f_m^i((a_i - \bar{a}_i) + (\bar{a}_i - x_l))| \\ &\geq |f_m^i(\bar{a}_i - x_l)| - \varepsilon \geq (1 - \varepsilon)\|\bar{a}_i - x_l\| - \varepsilon \end{aligned}$$

при соединении ребром вершин a_i и x_l .

Для сети $\hat{\Gamma}$ данного типа, имеющей дополнительные вершины в точках $\{a_1, \dots, a_d\}$, из этих неравенств следует, что

$$\begin{aligned} \ell(\hat{\Gamma}) &= \sum_{i=1}^d \left(\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k_i} \|a_i - a_p^i\| + \sum_{r=1}^{l_i} \|a_i - x_r^i\| \right) \\ &\geq (1 - \varepsilon) \left(\sum_{i=1}^d \left(\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k_i} \|\bar{a}_i - \bar{a}_p^i\| + \sum_{r=1}^{l_i} \|\bar{a}_i - x_r^i\| \right) \right) - 2N\varepsilon = (1 - \varepsilon)\ell(\bar{\Gamma}) - 2N\varepsilon. \end{aligned}$$

То есть для любого элемента $(a_1, \dots, a_d) \in U$ и соответствующей сети $\hat{\Gamma}$ верно $\ell(\hat{\Gamma}) \geq (1 - \varepsilon)\ell(\bar{\Gamma}) - 2N\varepsilon$, откуда следует, что длина сети $\bar{\Gamma}$ не больше, чем длина сети $\hat{\Gamma}$. Поэтому $\bar{\Gamma} \geq \Gamma$ при любом $\Gamma \in \mathcal{S}$. Таким образом, в X^{**} существует кратчайшая сеть $\bar{\Gamma}$ данного типа.

Поддействовав на $\bar{\Gamma}$ проектором P из условия, получим сеть Γ_0 в пространстве X с длиной, не превосходящей $\ell(\bar{\Gamma})$. Таким образом, в пространстве X для каждого типа есть кратчайшая сеть. По лемме 2 различных типов конечное число, поэтому существует кратчайшая сеть.

Теорема доказана.

Интересен вопрос о существовании кратчайших сетей в пространстве $C[\mathcal{K}]$ действительнзначных функций, непрерывных на хаусдорфовом компакте $\mathcal{K}$.

4. Пример несуществования кратчайшей сети. Как уже отмечалось выше, пример несуществования кратчайшей сети для трех точек был приведен в [4]. Мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях из несуществования кратчайшей сети для данного конечного множества D следует несуществование кратчайшей сети для конечных множеств, достаточно близких к D в метрике Хаусдорфа. Выбирая n -точечное множество, близкое в метрике Хаусдорфа к трехточечному множеству из примера работы [4], мы получим n -точечное множество, не имеющее кратчайшей сети.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – нормированное пространство, $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, и для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено следующее условие: если набор точек $y_1, \dots, y_n$ обладает свойством $\|x_j - y_j\| < \varepsilon$ для всех $j = 1, \dots, n$, то для $\{y_1, \dots, y_n\}$ не существует кратчайшей сети и; более того, кратчайшей сети не существует для любого не менее чем трехточечного подмножества множества $\{y_1, \dots, y_n\}$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что если множество $\{y_1, \dots, y_n\}$ находится на расстоянии Хаусдорфа меньше δ от $\{x_1, \dots, x_n\}$ (т.е. каждый элемент y_j лежит в δ -окрестности некоторого элемента x_k , и каждый x_k лежит в δ -окрестности некоторого y_j), то для набора $\{y_1, \dots, y_n\}$ не существует кратчайшей сети.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если существует последовательность сетей данного типа, длины которых стремятся к $\text{smt}(x_1, \dots, x_n)$, то будем говорить, что на сетях этого типа реализуется $\text{smt}(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть на сетях данного типа не реализуется $\text{smt}(x_1, \dots, x_n)$. Это означает, что существует $C > 0$ такое, что $\ell(\Gamma) > \text{smt}(x_1, \dots, x_n) + C$ для любой сети Γ этого типа. Поскольку возможных типов сетей конечное число (лемма 2), константу C можно выбрать общей для всех типов, не реализующих $\text{smt}(x_1, \dots, x_n)$. Будем считать, что C именно так и выбрано для нашей системы точек $x_1, \dots, x_n$.

Пусть $\delta > 0$ таково, что $8N\delta < \min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|$, $8Nn\delta < C$ и $4N\delta < \varepsilon$.

Предположим, что для некоторого множества $\{y_1, \dots, y_n\}$, δ -близкого в метрике Хаусдорфа к $\{x_1, \dots, x_n\}$, существует кратчайшая сеть. Обозначим ее через $\Gamma_{\min}$.

ЛЕММА 3. Рассмотрим в сети $\Gamma_{\min}$ несамопересекающийся путь с концами y_i и y_j , и пусть e – ребро сети, входящее в этот путь. Тогда $\|e\| \leq \|y_i - y_j\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\|e\| > \|y_i - y_j\|$, то при удалении ребра e из сети и добавлении ребра с концами y_i и y_j получается более короткая, чем $\Gamma_{\min}$, сеть с той же границей, что противоречит выбору сети $\Gamma_{\min}$.

Лемма доказана.

Для фиксированного k обозначим через $\Gamma_{\min}^{(k)}$ минимальную по включению подсеть сети $\Gamma_{\min}$, содержащую все граничные точки y_j , попавшие в δ -окрестность точки x_k .

Пусть $r = (2(2N - 3)\delta + \delta)$. Через $B_s(x_k)$ будем обозначать открытый шар радиуса s с центром в точке x_k .

ЛЕММА 4. Сеть $\Gamma_{\min}^{(k)}$ содержится в $B_r(x_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для $y_i, y_j \in B_\delta(x_k)$ верно неравенство $\|y_i - y_j\| < 2\delta$, то по лемме 3 длины всех ребер $\Gamma_{\min}^{(k)}$ не больше 2δ . С другой стороны, в дереве $\Gamma_{\min}^{(k)}$ не более $2N - 3$ ребер, так как во всем дереве $\Gamma_{\min}$ не более $2N - 3$ ребер (лемма 2). Следовательно, сеть $\Gamma_{\min}^{(k)}$ заведомо содержится в $(2(2N - 3)\delta + \delta)$ -окрестности точки x_k .

Лемма доказана.

В силу выбора δ шары $B_r(x_j)$ не пересекаются; следовательно, не пересекаются и подсети $\Gamma_{\min}^{(k)}$. Подсеть сети $\Gamma_{\min}$, образованную ребрами, не попавшими в подсети $\Gamma_{\min}^{(k)}$, обозначим через L . Ее границей ∂L будем считать множество вершин сети L , лежащих в $\Gamma_{\min}^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$. Обозначим через L_i компоненты связности сети L . Их границы $\partial L_i = \partial L \cap L_i$.

ЛЕММА 5. Для каждого i выполнено $\ell(L_i) = \text{smt}(\partial L_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В противном случае сеть $\Gamma_{\min}$ можно было бы укоротить, заменив подсеть L_i на сеть меньшей, чем $\ell(L_i)$, длины.

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Для каждой пары i и k пересечение $\partial L_i \cap B_r(x_k)$ либо пусто, либо одноточечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения ∂L_i и того факта, что шары $B_r(x_k)$ не пересекаются, имеем

$$\partial L_i \cap B_r(x_k) = \partial L_i \cap \Gamma_{\min}^{(k)}.$$

Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. для некоторых i и k множество $\partial L_i \cap \Gamma_{\min}^{(k)}$ содержит две различные точки u и v . Тогда, в силу связности L_i и $\Gamma_{\min}^{(k)}$, в сети $\Gamma_{\min}$ существует путь с концами u и v , лежащий в L_i , и второй путь с теми же концами, лежащий в $\Gamma_{\min}^{(k)}$. Но $\Gamma_{\min}$ не содержит циклов – противоречие.

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Каждая граница ∂L_i состоит ровно из двух точек, т.е. каждая сеть L_i – это отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем i . По лемме 4 граничные точки сети L_i лежат в шарах $B_r(x_k)$, и $r = (2(2N - 3)\delta + \delta) < \varepsilon$. Причем по лемме 6 в каждом шаре лежит не более одной граничной точки сети L_i . Таким образом, если граница сети L_i состоит хотя бы из трех точек, то по условию теоремы для этой границы не существует кратчайшей сети. Но мы доказали, что уже сама сеть L_i – кратчайшая для своей границы (лемма 5) – противоречие.

Лемма доказана.

Итак, каждая компонента связности сети L представляет собой отрезок с концами в шарах $B_r(x_k)$. Построим сеть Γ с n вершинами $x_1, \dots, x_n$, в которой точки x_s и x_t соединены ребром (отрезком), если и только если в сети L существует компонента L_i с граничными вершинами в $B_r(x_s)$ и $B_r(x_t)$.

ЛЕММА 8. Сеть Γ – дерево, затягивающее точки $x_1, \dots, x_n$, причем

$$\ell(\Gamma) < \text{smt}(x_1, \dots, x_n) + C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что сеть Γ – дерево, так как любой цикл в этой сети соответствовал бы циклу в сети $\Gamma_{\min}$, а несвязность привела бы к несвязности сети $\Gamma_{\min}$. В дереве Γ ровно n вершин; следовательно, ровно $n - 1$ ребро.

Для ребра сети Γ с концами x_s и x_t рассмотрим ребро сети L с концами $u \in B_r(x_s)$ и $v \in B_r(x_t)$; получаем

$$\|x_s - x_t\| \leq \|u - v\| + 2r.$$

Суммируя по всем ребрам сети Γ , получаем

$$\ell(\Gamma) \leq \ell(L) + 2(n - 1)r.$$

Но

$$\ell(L) \leq \ell(\Gamma_{\min}) = \text{smt}(y_1, \dots, y_N) < \text{smt}(x_1, \dots, x_n) + N\delta,$$

так как каждый $y_j, j = 1, \dots, N$, лежит на расстоянии не больше δ от некоторого x_k .
Далее, учитывая наш выбор δ , получаем

$$\ell(\Gamma) \leq \text{smt}(x_1, \dots, x_n) + N\delta + 2(n-1)r < \text{smt}(x_1, \dots, x_n) + C.$$

Лемма доказана.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы. Так как длина сети Γ с границей $\{x_1, \dots, x_n\}$ меньше, чем $\text{smt}(x_1, \dots, x_n) + C$, то в силу выбора C на сетях того же типа, что и Γ , реализуется $\text{smt}(x_1, \dots, x_n)$, т.е. существует последовательность сетей этого типа, длины которых стремятся к $\text{smt}(x_1, \dots, x_n)$. Но в сети Γ нет дополнительных вершин, поэтому сеть Γ – единственная сеть своего типа. Это означает, что $\ell(\Gamma) = \text{smt}(x_1, \dots, x_n)$, т.е. для $x_1, \dots, x_n$ существует затягивающая их кратчайшая сеть. Противоречие.

Теорема доказана.

Из рассуждений, приведенных в [4], нетрудно вывести следующее утверждение.

ЛЕММА 9. Пусть $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (1, t)$, $a_3 = (2t, t^2)$ в пространстве

$$X = \left\{ (f, g) : f \in C[0, 2], g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}$$

с нормой $\|(f, g)\| = \max\{\|f\|_{C[0,2]}, 10\|g\|_{L_1[0,2]}\}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $y_1, y_2, y_3 \in X$ со свойством $\|a_j - y_j\| < \varepsilon$ не существует точки Штейнера.

ТЕОРЕМА 3. Существует банахово пространство X , в котором для любого $n \geq 3$ найдутся точки $x_1, \dots, x_n$, для которых не существует затягивающей их кратчайшей сети.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве X рассмотрим пространство из леммы 9. Поскольку для трех граничных точек наша задача 2 (поиск точки Штейнера) совпадает с задачей 1 (поиск кратчайшей сети), три точки a_1, a_2, a_3 из леммы 9 удовлетворяют условию теоремы 2. Следовательно, достаточно рассмотреть δ , существующее по этой теореме, и взять набор различных точек $\{x_1, \dots, x_n\}$, δ -близкий к $\{a_1, a_2, a_3\}$ в метрике Хаусдорфа.

Теорема доказана.

Авторы благодарят В. Ю. Протасова за постановку задачи, П. А. Бородину, А. О. Иванова и А. А. Тужилина за ценные замечания, В. М. Кадеца за полезное обсуждение, и рецензента за указание на окончательную форму теоремы 1 и за обнаружение ошибки.

Теорема 1 доказана Б. Б. Бедновым, теоремы 2, 3 доказаны Н. П. Стрелковой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Л. Гаркави, В. А. Шматков, “О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве”, *Матем. сб.*, **95(137)**:2(10) (1974), 272–293.
- [2] L. Veselý, “A characterization of reflexivity in the terms of the existence of generalized centers”, *Extracta Math.*, **8**:2-3 (1993), 125–131.

- [3] С. В. Конягин, “Замечание о перенормировке нерефлексивных пространств и существовании чебышевского центра”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1988, № 2, 81–82.
- [4] П. А. Бородин, “Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 514–518.
- [5] V. Kadets, “Under a suitable renorming every nonreflexive Banach space has a finite subset without a Steiner point”, *Mat. Stud.*, **36**:2 (2011), 197–200.
- [6] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Minimal Networks. The Steiner Problem and its Generalizations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
- [7] В. Ю. Протасов, *Максимумы и минимумы в геометрии*, Изд-во МЦНМО, М., 2005.
- [8] L. Ambrosio, P. Tilli, *Topics on Analysis in Metric Spaces*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **25**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2004.
- [9] В. И. Богачев, О. Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ*, Университетский курс, НИЦ РХД, М.–Ижевск, 2009.
- [10] J. Dixmier, “Sur un théorème de Banach”, *Duke Math. J.*, **15**:4 (1948), 1057–1071.

Б. Б. Беднов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: [noriiii@inbox.ru](mailto:noriiiii@inbox.ru)

Поступило

09.06.2011

Исправленный вариант

19.11.2012

Н. П. Стрелкова

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Лаборатория дискретной и вычислительной
геометрии им. Б. Н. Делоне,
ЯрГУ им. П. Г. Демидова
E-mail: n.strelk@gmail.com