Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Костин, Замкнутость справа мартингальных последовательностей в смысле A -интеграла, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 98–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm923>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:21:41

УДК 517.518.36+519.214.8

ЗАМКНУТОСТЬ СПРАВА МАРТИНГАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В СМЫСЛЕ A -ИНТЕГРАЛА

В. В. Костин

В этой работе даются новые достаточные (а для мартингалов особого вида необходимые и достаточные) условия замкнутости мартингалов справа в смысле A -интеграла. Эти результаты следуют из доказанной в работе теоремы о предельном переходе под знаком A -интеграла. Теорема установлена с помощью критерия перестановки двух пределов по базе. Показывается, что полученные таким образом достаточные условия сильнее известных ранее.

Библиография: 4 названий.

Предельные теоремы для мартингалов являются важным инструментом в теории рядов по некоторым классическим системам (Хаара, Уолша, мультипликативным системам Виленкина и др.). А именно, каждая теорема, дающая достаточные условия замкнутости справа для мартингалов, автоматически дает достаточные условия принадлежности рядов по таким системам к классу рядов Фурье, и при этом последние элементы мартингалов и служат образующими эти ряды функциями (см. теорему 1 из [1]). Эта теорема остается верной и тогда, когда используемые в ней термины понимаются в обобщенном смысле, т. е. когда в их определении вместо интеграла Лебега участвует какой-либо другой интеграл.

Здесь мы рассматриваем замкнутость мартингалов справа в смысле A -интеграла, который впервые был введен А. Н. Колмогоровым в [2].

Напомним некоторые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ – вероятностное пространство, на нем определена случайная величина X . Тогда X называется A -интегрируемой на множестве $B \in \mathcal{B}$, если выполняются следующие условия:

1. $P\{B \cap \{|X| > C\}\} = \bar{O}(1/C), C \rightarrow \infty$;
2. существует $\lim_{C \rightarrow \infty} \int_B [X]^C dP$.

Этот предел называется A -интегралом случайной величины X по множеству B и обозначается $(A) \int_B X dP$. Здесь через $[X]^C$ обозначена срежа функции X , определяемая так ($C \geq 0$):

$$[X]^C = \begin{cases} C, & X > C, \\ X, & -C \leq X \leq C, \\ -C, & X < -C. \end{cases}$$

Определим также срезки другого типа:

$$[X]_C = \begin{cases} X, & -C \leq X \leq C, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Понятно, что в силу 1-го условия значение A -интеграла не зависит от типа применяемой срезки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X – A -интегрируемая случайная величина, определенная на $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, σ -алгебра $\mathcal{F}$ – подалгебра алгебры $\mathcal{B}$. Обобщенным условным математическим ожиданием (в смысле A -интеграла) случайной величины X относительно σ -алгебры $\mathcal{F}$ называется случайная величина $AE(X, \mathcal{F})$ такая, что

1. $AE(X, \mathcal{F})$ измерима относительно $\mathcal{F}$;
2. $\forall B \in \mathcal{F}$ выполнено $(A) \int_B X dP = \int_B AE(X, \mathcal{F}) dP$.

A -интеграл шире интеграла Лебега, но если $\mathcal{G}$ -измеримая случайная величина Y A -интегрируема на любом множестве $B \in \mathcal{G}$, то она A -интегрируема и на множествах $\{Y > 0\}$, $\{Y \leq 0\}$, а тогда она, как нетрудно видеть, L -интегрируема, и поэтому в определении $AE(X, \mathcal{F})$ в условии 2 справа достаточно писать интеграл Лебега.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ с фильтрацией, т.е. семейством $\{\mathcal{F}_n\}$ σ -алгебр $\mathcal{F}_n$, $n \geq 1$, таких, что $\mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}$. Последовательность $\{X_n(\omega), \mathcal{F}_n\}_{n=1}^\infty$ случайных величин X_n , измеримых относительно соответствующих σ -алгебр $\mathcal{F}_n$, называется *мартингальной* (в смысле A -интеграла), если $\forall t, n, t \geq n$, выполнено $X_n = AE(X_t, \mathcal{F}_n)$, при этом она называется *замкнутой справа последним элементом* X_∞ , если $\forall n$ выполнено $X_n = AE(X_\infty, \mathcal{F}_n)$.

В силу вышеприведенного замечания определения последовательностей, мартингальных в смысле A -интеграла и мартингальных в обычном смысле, т.е. когда при определении условного математического ожидания вместо A -интеграла берется интеграл Лебега, совпадают. Различие интегралов проявляется лишь в определении замкнутости справа.

Основным результатом статьи является следующая теорема, дающая при некоторых естественных предположениях необходимые и достаточные условия замкнутости справа мартингальной последовательности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{X_n(\omega), \mathcal{F}_n\}_{n=1}^\infty$ – мартингальная последовательность, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, такая, что X_n сходится по мере к случайной величине X_∞ и удовлетворяет следующему условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon \quad \forall C \geq C_\varepsilon \quad \exists N_C \quad \forall n \geq N_C \quad CP\{|X_n| > C\} < \varepsilon.$$

При этих условиях X_∞ на каждом $B \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$ A -интегрируема и является последним элементом мартингальной последовательности $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ тогда и только тогда, когда $\forall B \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$ выполнено

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon \quad \forall C \geq C_\varepsilon \quad \exists N_C \quad \forall n \geq N_C \quad \left| \int_{B \cap \{|X_n| > C\}} X_n dP \right| < \varepsilon.$$

Эта теорема будет получена из следующей теоремы для предельного перехода под знаком A -интеграла.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{X_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность A -интегрируемых случайных величин, определенных на $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, сходящаяся по мере к случайной величине X_{∞} и такая, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_{\varepsilon} \quad \forall C \geq C_{\varepsilon} \quad \exists N_C \quad \forall n \geq N_C \quad CP\{|X_n| > C\} < \varepsilon. \quad (1)$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

1. X_{∞} является A -интегрируемой и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A) \int X_n dP = (A) \int X_{\infty} dP;$$

- 2.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_{\varepsilon} \quad \forall C \geq C_{\varepsilon} \quad \exists N_C \quad \forall n \geq N_C \quad \left| (A) \int_{\{|X_n| > C\}} X_n dP \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Предварительно докажем следующее простое утверждение.

ЛЕММА. Если $X_n \rightarrow X_{\infty}$ по мере, то и $[X_n]^C \rightarrow [X_{\infty}]^C$ по мере $\forall C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $C = 0$ утверждение очевидно. Пусть $C > 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Разобьем Ω на 3 части в зависимости от значений X_{∞} : $\Omega = \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i := \{X_{\infty} < -C\} \cup \{-C \leq X_{\infty} \leq C\} \cup \{X_{\infty} > C\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $C' > C$ такое, что $P\{C < X_{\infty} \leq C'\} < \varepsilon/5$. Пусть $\delta := \min\{C - C', \varepsilon\}$. В силу сходимости $X_n \rightarrow X_{\infty}$ по мере

$$\exists N \quad \forall n \geq N \quad P\{|X_n - X_{\infty}| > \delta\} < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Тогда для Ω_3 (для Ω_1 аналогично) имеем

$$\begin{aligned} P\{|[X_n]^C - C| > \varepsilon, X_{\infty} > C\} &= P\{|X_n - C| > \varepsilon, X_n < C, X_{\infty} > C\} \\ &\leq P\{X_n < C, X_{\infty} > C\} \leq P\{X_n < C, X_{\infty} > C'\} + P\{C < X_{\infty} \leq C'\} \\ &\leq P\{X_{\infty} - X_n > C' - C\} + \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{2\varepsilon}{5}. \end{aligned}$$

Для Ω_2 имеем

$$P\{|[X_n]^C - [X_{\infty}]^C| > \varepsilon, -C \leq X_{\infty} \leq C\} \leq P\{|X_n - X_{\infty}| > \varepsilon, -C \leq X_{\infty} \leq C\} < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Суммируя, получаем

$$P\{|[X_n]^C - [X_{\infty}]^C| > \varepsilon\} = \sum_{i=1}^3 P\{|[X_n]^C - [X_{\infty}]^C| > \varepsilon, \Omega_i\} < \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} = \varepsilon,$$

что и доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем сначала, что из условия 1 теоремы следует 1-е условие A -интегрируемости X_∞ . Так как $X_n \rightarrow X_\infty$ по мере, выберем подпоследовательность $X_{k_n} \rightarrow X_\infty$ почти всюду. Введем множества $D_n(C) := \{|X_{k_n}| > C\}$, $D(C) := \{|X_\infty| > C\}$, $G_n(C) := \bigcap_{m=n}^\infty D_m(C)$. Из сходимости X_{k_n} к X_∞ п.в. следует, что $D(C) = \bigcup_{n=1}^\infty G_n(C)$, и так как $G_n(C) \subseteq G_{n+1}(C)$, по свойству монотонности вероятности получаем $P\{D(C)\} = P\left\{\bigcup_{n=1}^\infty G_n(C)\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{G_n(C)\}$. Из условия 1 теоремы $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \forall C \geq C_\varepsilon \exists N_C \forall n \geq N_C P\{|X_{k_n}| > C\} < \varepsilon/C$, а поэтому

$$P\{D(C)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{G_n(C)\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\{D_n(C)\} < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Так как из (1) и (2) следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \forall C \geq C_\varepsilon \exists N_C \forall n \geq N_C CP\{|X_n| > C\} < \varepsilon/2$ и $\left| (A) \int X_n dP - \int [X_n]_C dP \right| < \varepsilon/2$, то можно оценить

$$\begin{aligned} & \left| (A) \int X_n dP - \int [X_n]^C dP \right| \\ &= \left| (A) \int X_n dP - \int [X_n]_C dP - (CP\{X_n > C\} - CP\{X_n < -C\}) \right| \\ &\leq \left| (A) \int X_n dP - \int [X_n]_C dP \right| + CP\{|X_n| > C\} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, в нашем случае (2) эквивалентно (2'):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \forall C \geq C_\varepsilon \exists N_C \forall n \geq N_C \left| A \int X_n dP - \int [X_n]^C dP \right| < \varepsilon. \quad (2')$$

Теперь теорема 2 будет следовать из критерия перестановки 2-х пределов по базе, доказанного, например, в [3] (под базой здесь понимается непустая совокупность непустых множеств $\mathcal{W}$ такая, что $\forall W_1, W_2 \in \mathcal{W} \exists W \in \mathcal{W}, W \subseteq W_1 \cap W_2$).

ТЕОРЕМА А. Пусть даны два множества U и V , $\mathcal{U}$ – база в U , $\mathcal{V}$ – база в V , и функция $h: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$. И пусть существуют пределы по каждой из баз: $f(u) = \lim_{\mathcal{V}} h(u, v) \quad \forall u \in \mathcal{U}$ и $g(v) = \lim_{\mathcal{U}} h(u, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. пределы $\lim_{\mathcal{U}} f(u)$ и $\lim_{\mathcal{V}} g(v)$ существуют и равны;
- 2.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists S_\varepsilon \in \mathcal{U} \quad \forall u \in S_\varepsilon \exists T_u \in \mathcal{V} \quad \forall v \in T_u \quad |h(u, v) - g(v)| < \varepsilon. \quad (3)$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно взять $U = V = \Omega$, $\mathcal{U} := \{C \in \mathbb{R} : C \geq C_0\}_{C_0=1}^\infty$ – база предела $C \rightarrow \infty$, $C \in \mathbb{R}$, $\mathcal{V} := \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}_{N=1}^\infty$ – база предела $n \rightarrow \infty$, $N \in \mathbb{N}$, и $h(C, n) := \int [X_n]^C dP$. Используя лемму, видим, что

$$f(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int [X_n]^C dP = \int [X_\infty]^C dP$$

по теореме Лебега,

$$g(n) = \lim_{C \rightarrow \infty} \int [X_n]^C dP = (A) \int X_n dP$$

в силу A -интегрируемости X_n . Тогда критерий перестановки пределов по базе даст нам, что (3), эквивалентное в нашем случае (2'), равносильно существованию A -интеграла предельной функции

$$\lim_{C \rightarrow \infty} f(C) = \lim_{C \rightarrow \infty} \int [X_\infty]^C dP = (A) \int X_\infty dP,$$

и его равенство пределу интегралов $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A) \int X_n dP$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Возьмем произвольное $B \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$. Тогда последовательность случайных величин $\{\chi_B X_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условиям теоремы 2. В самом деле, так как $P\{B \cap \{|X_\infty| > C\}\} \leq P\{|X_\infty| > C\}$, то условие (1) теоремы 2 выполнено. Существует такое M , что $B \in \mathcal{F}_M$. Тогда для любого $m \geq M$ по определению мартингальной последовательности выполнено $\int_B X_m dP = \int_B X_M dP$, а тогда первое утверждение теоремы 2 в этом случае равносильно тому, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_B X_m dP = \int_B X_M dP = \int_B X_\infty dP.$$

Так как B произвольно, это означает, что X_∞ замыкает мартингальную последовательность $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ справа. Второе из эквивалентных утверждений теоремы 2 в нашем случае дает второе утверждение теоремы 1. Таким образом, теорема 1 доказана.

Теорема 1 дает существенно более общие достаточные условия замкнутости мартингальной последовательности справа, чем нижеследующая теорема В (это теорема 2 из [4]), сформулированная в терминах равномерной A -интегрируемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Последовательность A -интегрируемых на множестве B случайных величин $\{X_n\}$ называется *равномерно A -интегрируемой* на множестве B , если

$$\sup_n \left| (A) \int_{B \cap \{|X_n| > C\}} X_n dP \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } C \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА В. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n; n=1, 2, \dots\}$ – мартингальная последовательность, сходящаяся почти всюду к случайной величине X_∞ . Пусть выполнены следующие условия:

1. $P\{|X_n| > C\} = \bar{o}(1/C)$ при $C \rightarrow \infty$ равномерно по n ;
 2. последовательность $\{X_n\}$ равномерно A -интегрируема на каждом $B \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$.
- Тогда X_∞ является A -интегрируемой на каждом таком B и служит последним элементом для мартингальной последовательности $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$.

В [1] был построен пример функции $f(x)$, являющейся последним элементом для мартингальной последовательности частных сумм ее ряда Фурье в смысле A -интеграла по

системе Хаара $\{X_n := S_{2^n}(f, x), \mathcal{F}_n\}_{n=1}^\infty$ (здесь $\mathcal{F}_n = \sigma(\Delta_i^n, i = 0, \dots, 2^n - 1)$ – двоичные σ -алгебры, $\Delta_i^n = [i/2^n, (i+1)/2^n)$, $i = 0, \dots, 2^n - 1$, – двоичные интервалы ранга n):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{0\} \cup \bigcup_{k=1}^\infty \left[\frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{2k-1}} \right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \\ \frac{2^{2k+i}}{2^{2k}} P_{n_k, i, m_k} (2^{2k+i} x - 1), & x \in \left[\frac{1}{2^{2k+i}}, \frac{1}{2^{2k+i-1}} \right), i = 1, \dots, 2^{2k}, \\ n_{k, i} = 2^{2k} + i, m_k = 2^{2k+4} - 2k - 1, \\ k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$P_{n, m}(x) := 2h_0^1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} 2^i h_0^{i+1}(x) - \sum_{j=0}^{2^{m-1}-1} \sum_{i=1}^{n-1} 2^i h_{(2^{m-1}+j)2^{i-1}}^{m+i}(x);$$

здесь

$$h_0(x) := h_0^0(x) \equiv 1, \quad h_n(x) := h_j^i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_{2^j}^i, \quad 0 \leq j \leq 2^{i-1} - 1, \\ -1, & x \in \Delta_{2^j+1}^i, \quad i = 1, 2, \dots, n = 2^{i-1} + j, \end{cases}$$

– ненормированные функции Хаара.

Но вместе с тем, как доказано в [1], любая подпоследовательность последовательности частных сумм $S_{n_k}(f, x)$ не является равномерно A -интегрируемой, и, таким образом, теорема В не может быть применена. Однако $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Покажем это.

Отрезок $[1/(2^{2^{k+1}}), 1/(2^{2^{2k}}))$ назовем k -м *отрезком*, $k = 1, 2, \dots$. Назовем частную сумму $S_n(f, x)$ *суммой типа k* , если $N_{k+1} < n \leq N_{k+2}$, $N_k := 2^{2^{k+1}} + 1$; только у таких частных сумм носитель имеет непустое пересечение с каждым из отрезков от 1-го до $(k+1)$ -го и сосредоточен на их объединении. Сужение частной суммы типа k на каждый ее интервал постоянства, где она принимает ненулевое значение, назовем *ступенькой типа k* .

Пусть дано произвольное ε , $0 < \varepsilon < 2$. Определим $C_k^i := 2^{2^{k+1}+2i-2k}$. Возьмем натуральное $K > (2 - \log_2 \varepsilon)/2$. Положим $C_\varepsilon := C_K^1$. Пусть $C \geq C_\varepsilon$. Тогда существуют натуральные числа

$$i' := \begin{cases} i-1, & 2 \leq i \leq 2^{2k}, \\ 2^{2(k-1)}, & i = 1, \end{cases} \quad k' := \begin{cases} k, & 2 \leq i \leq 2^{2k}, \\ k-1, & i = 1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots,$$

такие, что $C_{k'}^{i'} < C \leq C_k^i$. При этом $K \geq k$. Возьмем N так, чтобы S_{2^N} имела тип не менее $k+1$. Для произвольного $n \geq N$ наименьшее по модулю значение $X_n = S_{2^n}$, превосходящее C , будет C_k^i . Заметим, что X_n совпадает на k -м отрезке с $f(x)$. Принимая это во внимание, при оценке $\mathbb{CP}\{|X_n| > C\}$ учтем на k -м отрезке все ступеньки типа k частной суммы S_{2^n} , по модулю превосходящие C . Все же ступеньки на 1-м, 2-м, ..., $(k-1)$ -м отрезках по модулю не больше $C_{k'}^{i'}$. На $(k+1)$ -м, $(k+2)$ -м, ... отрезках меру ступенек грубо оценим через $2^{-2^{2k+2}}$, что больше чем сумма длин этих отрезков:

$$\begin{aligned} \mathbb{CP}\{|X_n| > C\} &\leq C_k^i \mathbb{P}\{|f(x)| \geq C_k^i\} \leq 2 \cdot \frac{2^{2^{k+1}+2i}}{2^{2k}} \left(\sum_{j=i}^{2^{2k}} \frac{1}{2^{2^{k+1}+2j}} + \frac{1}{2^{2^{2k+2}}} \right) \\ &\leq 2^{2^{2k+1}+2i-2k+1} \left(\frac{4/3}{2^{2^{k+1}+2i}} \left(1 - \frac{1}{2^{2^{k+1}-2i+2}} \right) + \frac{1}{2^{2^{2k+2}}} \right) \leq \frac{4}{2^{2k}} \leq \frac{4}{2^{2K}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. 1-е условие теоремы 1 выполнено.

Условие

$$\left\{ \forall B \in \bigcup_n \mathcal{F}_n \text{ выполнено } \forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \forall C \geq C_\varepsilon \exists N_C \forall n \geq N_C \right. \\ \left. \left| \int_{B \cap \{|X_n| > C\}} X_n dP \right| < \varepsilon \right\}$$

устанавливается следующим образом (конечно, то, что оно здесь выполняется, напрямую следует из теоремы 2, учитывая его необходимость, раз замкнутость справа была уже доказана в [1], однако для иллюстрации применения теоремы 2 в прямую сторону докажем его независимо, просто вычислением).

Ясно, что его достаточно проверить для отрезков, причем для B вида $[a, b]$, $a \neq 0$, оно очевидно. Если B вида $[0, b]$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon =: C_B$ такая, что $\{x : |f(x)| \geq C_\varepsilon\} \subset [0, b]$. Взяв произвольное $C \geq C_\varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим множества $H_n := \{x : 0 < |X_n(x)| \leq C\}$, $H := \{x : 0 < |f(x)| \leq C\}$. Выберем N_C настолько большим, что H_{N_C} (а, следовательно, и все H_n , $n \geq N_C$) совпадают с H . При этом, как нетрудно видеть, $\forall n \geq N_C f(x) = X_n(x)$, $x \in H$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{B \cap \{|X_n| > C\}} X_n dP &= \int_{\{|X_n| > C\}} X_n dP = \int_{[0, 1]} X_n dP - \int_{\{|X_n| \leq C\}} X_n dP \\ &= 0 - \int_{\{|f(x)| \leq C\}} f(x) dP = 0. \end{aligned}$$

Автор выражает благодарность профессору В. А. Скворцову за постановку задачи и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Костин В. В., Скворцов В. А. Мартингалы в теории ортогональных рядов // Вестн. МГУ. (в печати).
- [2] Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1936.
- [3] Gordon R. A. An iterated limits theorem applied to the Henstok integral // Real Analysis Exchange. 1995/96. V. 21(2). P. 774–781.
- [4] Skvortsov V. A. Martingale closure theorem for A -integrable martingal sequences // Real Analysis Exchange. (to appear).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vkostin@student.math.msu.su

Поступило
16.06.1998