Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Малышев, Аналитическая динамика одномерной системы частиц с сильным взаимодействием, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 2, 262–275

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9232>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 02:38:30

Аналитическая динамика одномерной системы частиц с сильным взаимодействием

В. А. Малышев

Рассматривается динамика системы N частиц на окружности с взаимодействием ближайших соседей, кулоновским потенциалом и аналитической внешней силой. Траектории являются вещественно аналитическими функциями времени. Однако, ряды для них сходятся лишь при достаточно малых временах. При нулевых начальных скоростях и равномерном начальном расположении частиц доказываются зависящие от N оценки на коэффициенты этого ряда.

Библиография: 12 названий.

1. Введение

1.1. Постановка задачи и основные результаты. Рассматривается система N точечных частиц $i = 1, 2, \dots, N$ на отрезке $[0, L) \subset \mathbb{R}$ с периодическими граничными условиями, т.е. на окружности S_L длины L . Первоначально они расположены в точках

$$0 = x_1(0) < \dots < x_N(0) < L.$$

Траектории $x_i(t)$ определяются системой N уравнений

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + F(x_i), \quad (1)$$

причем взаимодействие между частицами имеет вид

$$U(\{x_i\}) = \sum_{\langle i, i-1 \rangle} V(x_i - x_{i-1}),$$

где сумма берется по всем парам соседей на окружности. Мы предполагаем, что потенциал $V(x) = V(-x) = 1/r$, $r = |x|$, является кулоновским, и положим

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = r^{-2}.$$

Заметим, что из сильного отталкивания на близких расстояниях следует, что частицы при движении не меняют своего порядка. Через $F(x)$ обозначена внешняя сила.

В работах [1], [2] исследовались неподвижные точки таких систем. Вопросы динамики существенно сложнее. Конечно, решение системы (1) существует и единственно (при произвольных начальных условиях) на всем интервале времени, однако получить более детальную информацию о траекториях частиц (если N достаточно велико) довольно трудно и требует развития специальной техники. Если F аналитична, то, как хорошо известно [3], решение может быть представлено в виде степенного ряда по t в некоторой окрестности точки $t = 0$.

Мы рассматриваем естественные начальные условия: для всех i

$$\Delta = \Delta_i(0) = x_{i+1}(0) - x_i(0) = \frac{L}{N}, \quad v_i(0) = 0, \quad (2)$$

и удобно считать $x_1(0) = 0$. Заметим, что эта конфигурация является неподвижной точкой для случая нулевой внешней силы. В этой статье мы получаем оценки радиуса сходимости для таких начальных условий. Мы ищем решение в виде

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{i,j} t^j. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть F аналитична на окружности S_L .

1) Тогда для всех $j = 1, 2, \dots$, существуют числа $b_j < \infty$, не зависящие от N и такие, что для всех i, j и для всех N

$$|c_{ij}| < b_j N^{(j-1)/2};$$

2) Пусть, кроме того, для некоторой $C_F > 0$ и всех x и k

$$|F^{(k)}(x)| \leq C_F^{k+1}.$$

Тогда существует константа $0 < \chi < \infty$, не зависящая от N , такая, что для всех i, j выполнена оценка

$$|c_{ij}| < \chi^j N^{5j/6-3/2}.$$

Отсюда следует, что радиус сходимости $R = R(N)$ ряда (3) имеет оценку снизу $R > \chi^{-1} N^{-5/6}$. Из доказательства первого утверждения теоремы в п. 2.2 можно сделать вывод, что оценка сверху для радиуса сходимости может быть порядка $1/\sqrt{N}$, но это пока не доказано. В доказательстве второго утверждения теоремы мы даем явную оценку для χ . Также приводятся явные формулы для c_{ij} при $j = 1, 2, 3, 4$.

Цель и сущность работы проще понять, если сказать о ее физической мотивации.

1.2. О загадке электрического тока. Математические вопросы статистической физики глубоко разработаны для равновесных систем на решетке, а на непрерывном пространстве достаточно разработаны, пожалуй, только для газов с малыми обратной температурой или плотностью. Для многих остальных случаев даже проблемы не поставлены на математическом уровне. Одним из таких случаев является постоянный электрический ток. На макроуровне это закон Ома, а на микроуровне, во всех курсах физики твердого тела, он трактуется как система свободных (или слабо зависимых) электронов, каждый из которых ускоряется внешней силой и тормозится внешней средой: как физиками, так и математиками изучались одночастичные модели с постоянной ускоряющей внешней силой и разными вариантами

(не менее двадцати, первая из них – модель Drude, 1900 года) внешней среды, которой частица отдает энергию.

Тем не менее, остается важный вопрос – откуда берется ускоряющая сила. Дело в том, что из сотен километров ЛЭП сила действует только на протяжении нескольких метров около генератора, турбины и т.д. Вот что написано по этому поводу в Фейнмановских лекциях по физике (том 6, с. 34):

“... Сила толкает электроны вдоль проволоки. Но почему же приходит в движение стрелка гальванометра, который расположен далеко от этой силы? Да потому, что электроны, испытывающие магнитную силу, начинают двигаться и толкают (за счет электрического поля) другие электроны, находящиеся чуть дальше по проволоке, а те, в свою очередь, подталкивают все более удаленные электроны и так далее на большое расстояние. Любопытная штука. Это так удивило Гаусса и Вебера – что они протянули проволоку вдоль всего города, чтобы посмотреть ...”. Так пишет знаменитый физик. Надо сказать, что в других курсах, статьях эта проблема вообще игнорируется.

Отсюда уже видно, что толкающие друг друга электроны образуют сильно взаимодействующую систему частиц и таким взаимодействием может быть только кулоновское отталкивание. Для математика естественно понять, как такое возможно сначала для простейшей модели. Такая модель и рассматривается здесь.

В действительности проблема не одна, а их много. Например, надо объяснить почему скорость установившегося тока постоянна и очень медленная (0.1–10 мм в секунду), а установление тока происходит почти мгновенно. Основная идея, почему установившаяся скорость постоянна и мала, была предложена в несколько другой модели в [4], но там не было результатов для собственно кулоновских систем.

Статья делает попытку подойти ко второй проблеме. Если коэффициенты c_k в разложении $v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k$ скорости частицы по времени растут как N^{ak} , $a > 0$, где N – число частиц, то естественно ожидать что величина скорости порядка 1 установится уже к моменту времени порядка $t = N^{-a}$, что и есть по выражению физиков почти мгновенно. Сам факт малости времени для установления скорости строго доказать не удастся, однако оценки коэффициентов, приведенные в статье, делают это весьма правдоподобным.

Достаточная сложность подобных оценок даже для простейшей модели (см. также [1], [2]) объясняет, почему такие проблемы не рассматривались физиками.

Целый ряд работ по динамике многочастичных систем, начиная с работ Н. Н. Боголюбова, имели совершенно другую направленность. В основном доказывалось существование термодинамического предела динамики. Это означает, что какое-то время на данную произвольную частицу существенно влияет лишь ограниченное число (соседних) частиц, и это остается справедливым в бесконечном объеме. Одна из основных техник здесь – также разложение (например, скорости) в ряд по времени, коэффициенты которого, однако, ограничены равномерно по числу частиц, и скорость мала для малых времен при нулевых начальных условиях, см. [5]–[12]. В нашем случае термодинамический предельный переход не имеет смысла, это более тонкая задача.

2. Доказательство

2.1. Уравнения для коэффициентов. Фиксируем начальные данные $x_i(0)$, $v_i(0)$, как в (2), и рассмотрим траектории $x_i(t) \in S$ на интервале $0 \leq t < t_0$ для некоторого $t_0 = t_0(N) > 0$. Полагая

$$\Delta_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t), \quad \Delta = \Delta_i(0) = \frac{L}{N},$$

имеем уравнения

$$\frac{dv_i}{dt} = f(x_i(t) - x_{i-1}(t)) - f(x_{i+1}(t) - x_i(t)) + F(x_i(t))$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} = & f\left(\Delta + \int_0^t [v_i(t_1) - v_{i-1}(t_1)] dt_1\right) - f\left(\Delta + \int_0^t [v_{i+1}(t_1) - v_i(t_1)] dt_1\right) \\ & + F\left(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1) dt_1\right). \end{aligned}$$

Интегральные уравнения. Эквивалентная система интегральных уравнений

$$\begin{aligned} v_i(t) = & \int_0^t \left[f\left(\Delta + \int_0^{t_1} [v_i(t_1) - v_{i-1}(t_1)] dt_1\right) - \right. \\ & \left. - f\left(\Delta + \int_0^{t_1} [v_{i+1}(t_1) - v_i(t_1)] dt_1\right) + F\left(x_i(0) + \int_0^{t_1} v_i(t_1) dt_1\right) \right] dt_1 \end{aligned} \quad (4)$$

может быть переписана так:

$$v_i(t) = \int_0^t \left((\Delta + R_{i-1}(t))^{-2} - (\Delta + R_i(t))^{-2} + F\left(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1) dt_1\right) \right) dt, \quad (5)$$

где

$$R_{i-1}(t) = \int_0^t (v_i(t_1) - v_{i-1}(t_1)) dt_1.$$

Для дальнейшего нам понадобятся обозначения, связанные с дискретными производными. Пусть на отрезке $[0, N] \subset \mathbb{Z}$ с периодическими граничными условиями задана функция $g(i)$ (т.е. периодическая функция на $\mathbb{Z}$ с периодом N). Назовем

$$(\nabla^+ g)(i) = g(i+1) - g(i), \quad (\nabla^- g)(i) = g(i) - g(i-1) \quad (6)$$

ее *правой* и *левой производной* соответственно. Заметим, что они коммутируют и имеет место равенство

$$\nabla^+(gf)(i) = f(i+1)(\nabla^+ g)(i) + g(i)(\nabla^+ f)(i) = (Sf)(\nabla^+ g) + g(\nabla^+ f), \quad (7)$$

где S – оператор сдвига

$$(Sf)(i) = f(i+1).$$

Ниже операторы дискретного дифференцирования будут действовать на индексы i . Если функция $f(i)$ не зависит от i , то ее дифференцирование дает нуль.

Вернемся к основным уравнениям и перепишем их так:

$$v_i(t) = \int_0^t dt \left[(-\nabla^-)((\Delta + R_i(t))^{-2}) + F\left(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1) dt_1\right) \right].$$

Полезно будет следующее представление подынтегрального выражения:

$$\begin{aligned} & (\Delta + R_{i-1}(t))^{-2} - (\Delta + R_i(t))^{-2} + F\left(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1) dt_1\right) \\ &= \Delta^{-2} \left(1 + \frac{R_{i-1}}{\Delta}\right)^{-2} - \Delta^{-2} \left(1 + \frac{R_i}{\Delta}\right)^{-2} + F\left(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1) dt_1\right) \\ &= F(x_i(0)) + \sum_{m=1}^{\infty} d_m [\Delta^{-2-m}(R_{i-1}^m - R_i^m)] \\ &\quad + \left[F\left(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1) dt_1\right) - F(x_i(0)) \right] \\ &= F(x_i(0)) + \sum_{m=1}^{\infty} d_m \Delta^{-2-m}(R_{i-1}^m - R_i^m) \\ &\quad + \left[F\left(x_i(0) + \int_0^t v_i(t_1) dt_1\right) - F(x_i(0)) \right], \end{aligned}$$

где

$$d_m = (-1)^m(m+1).$$

Если F аналитична на S_L , то существует достаточно малое $\epsilon > 0$ такое, что для любого $x_0 \in S_L$ и для всех $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ имеет место разложение в сходящийся ряд

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Получим окончательно

$$\begin{aligned} v_i(t) &= F(x_i(0))t + \int_0^t \sum_{m=1}^{\infty} d_m \Delta^{-2-m} [-\nabla^- R_i^m] dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{F^{(k)}(x_i(0)) \left(\int_0^t v_i(t_1) dt_1\right)^k}{k!} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Рекуррентные уравнения. Используя (3) и

$$R_{i-1}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (c_{i,j} - c_{i-1,j}) \frac{t^{j+1}}{j+1}, \quad (9)$$

$$R_i - R_{i-1} = \sum_{j=1}^{\infty} (c_{i+1,j} - 2c_{i,j} + c_{i-1,j}) \frac{t^{j+1}}{j+1}, \quad (10)$$

мы видим, подставив ряды (3) в (8), что правая часть (8) также представляет собой степенной ряд по t с хорошо определенными коэффициентами.

Будем искать $c_{i,j}$ приравниванием коэффициентов при t^j . Для $j = 1, 2$ уравнения дают сразу явный вид:

$$c_{i1} = F(x_i(0)), \quad c_{i,2} = 0, \quad (11)$$

так как остальные слагаемые в правой части (8) имеют больший порядок по t . Для $j \geq 3$ уравнения для коэффициентов при t^j имеют вид

$$c_{ij} = \frac{1}{j} \left[\sum_{m=1}^{\infty} d_m \Delta^{-2-m} (-\nabla^- R_i^m) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F^{(k)}(x_i(0)) (\int_0^t v_i(t_1) dt_1)^k}{k!} \right]_{j-1}, \quad (12)$$

где для степенного ряда $\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ мы полагаем $[\phi(t)]_j = a_j$. Для $j > 2$ коэффициенты $c_{i,j}$ находятся рекуррентно, причем c_{ij} зависят только от $c_{i,k}$ с $k \leq j-2$. Действительно, в правой части уравнения для $c_{i,j}$ не может быть $c_{i,k}$ с $k \geq j-1$, так как ввиду (9) каждый из c_{ik} входит вместе с t^{k+1} .

Тогда основные уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} c_{ij} = & \frac{1}{j} \sum_{m=1}^{\infty} d_m \Delta^{-2-m} \left(-\nabla^- \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} (c_{i+1,j} - c_{i,j}) \frac{t^{j+1}}{j+1} \right)^m \right]_{j-1} \right) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F^{(k)}(x_i(0))}{k!} \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_{i,j} \frac{t^{j+1}}{j+1} \right)^k \right]_{j-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Имеем

$$\left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_{i,j} \frac{t^{j+1}}{j+1} \right)^k \right]_{j-1} = \sum_{j_1 + \dots + j_m = j-m-1} \frac{c_{i,j_1}}{j_1+1} \dots \frac{c_{i,j_m}}{j_m+1}, \quad (14)$$

где $\sum_{j_1 + \dots + j_m = j-m-1}$ — сумма по всем упорядоченным наборам $j_1, \dots, j_m$, среди которых могут быть одинаковые, таким, что

$$(j_1 + 1) + \dots + (j_m + 1) = k + j_1 + \dots + j_m = j - 1, \quad (15)$$

откуда

$$k \leq j_1 + \dots + j_m = j - 1 - k \leq j - 2, \quad k \leq \left[\frac{j-1}{2} \right]. \quad (16)$$

Аналогично

$$\left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} (c_{i+1,j} - c_{i,j}) \frac{t^{j+1}}{j+1} \right)^m \right]_{j-1} = \sum_{j_1, \dots, j_m}^{(j-1, m)} \frac{\nabla^+ c_{i,j_1}}{j_1+1} \dots \frac{\nabla^+ c_{i,j_m}}{j_m+1},$$

причем выполнены (15) и (16) с заменой k на m . Поэтому уравнение может быть записано в виде

$$c = Gc + c^{(0)}, \quad (17)$$

где c — вектор $c = \{c_{ij}\}$, свободный член $c^{(0)} = \{c_{ij}^{(0)}\}$ равен

$$c_{i1}^{(0)} = F(x_i(0)), \quad c_{ij}^{(0)} = 0, \quad j \geq 2, \quad (18)$$

а нелинейный оператор G имеет вид

$$\begin{aligned} c_{i1} &= c_{i1}^{(0)} = F(x_i(0)), & c_{i2} &= 0, \\ c_{ij} &= (Gc)_{ij} = - \sum_{m=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} A_{ij}(m; j_1, \dots, j_m) \\ &+ \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_k=j-k-1} B_{ij}(k; j_1, \dots, j_k) \end{aligned} \quad (19)$$

при $j \geq 3$, где

$$A_{ij}(m; j_1, \dots, j_m) = \frac{1}{j} d_m \Delta^{-2-m} \nabla^- \left(\frac{\nabla^+ c_{i,j_1}}{j_1+1} \dots \frac{\nabla^+ c_{i,j_m}}{j_m+1} \right), \quad (20)$$

$$B_{ij}(k; j_1, \dots, j_k) = \frac{1}{j} \frac{1}{k!} F^{(k)}(x_i(0)) \frac{c_{i,j_1}}{j_1+1} \dots \frac{c_{i,j_k}}{j_k+1}. \quad (21)$$

Далее через $F_{i,k,q}$ будем обозначать любую дискретную производную вида

$$\left(\prod_{p=1}^q \nabla^{s(p)} \right) F^{(k)}(x_i(0)),$$

где $s(p) = \pm$. Для оценок выбор $s(p)$ будет совершенно не важен. Обозначим $F_{i,k} = F_{i,k,0}$.

Явный вид c_{i3} , c_{i4} немедленно получается, если учитывать в уравнениях (19) лишь члены с $k = 1$ и $m = 1$, так как $k, m \leq [(j-1)/2] \leq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} c_{i3} &= -\frac{1}{3} d_1 \Delta^{-3} \nabla^- \nabla^+ \frac{c_{i1}}{2} + \frac{1}{3} F^{(1)}(x_i) \frac{c_{i1}}{2} = \frac{1}{6} (d_1 \Delta^{-3} F_{i,0,2} + F_{i,0,0} F_{i,1,0}), \\ c_{i4} &= -\frac{1}{4} d_1 \Delta^{-3} \nabla^- \left(\nabla^+ \frac{c_{i1}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} F^{(1)}(x_i) \frac{c_{i1}^2}{4} \\ &= \frac{1}{8} \left(-d_1 \Delta^{-3} F_{i,0,2} F_{i,0,1} + \frac{1}{2} F_{i,1,0} F_{i,0,0}^2 \right). \end{aligned}$$

Из формул

$$\begin{aligned} F_{i,0,1} &= F_{i+1,0,0} - F_{i,0,0} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} F^{(1)}(x) dx, & |F_{i,0,1}| &\leq C_F^2 \Delta, \\ F_{i,0,2} &= (F_{i+2,0,0} - F_{i+1,0,0}) - (F_{i+1,0,0} - F_{i,0,0}) \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_x^{x+\Delta} F^{(2)}(y) dy \right) dx, & |F_{i,0,2}| &\leq C_F^3 \Delta^2, \end{aligned} \quad (22)$$

следует, что

$$|c_{i3}| \leq \frac{1}{3} C_F^3 \left(\Delta^{-1} + \frac{1}{2} \right), \quad |c_{i4}| \leq \frac{1}{4} C_F^5 + \frac{1}{16} C_F^4.$$

2.2. Оценка главной экспоненты. Из рекуррентных формул (20) и (21) следует, что c_{ij} конечны и зависят от i, j, N . Мы рассмотрим их сначала как функции

от N при фиксированных i, j . Иначе говоря, мы докажем первую часть теоремы. Введем понятие главной экспоненты

$$I(\xi) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln |\xi|}{\ln N}$$

для величины ξ , зависящей от N . Попросту говоря, она показывает, что главный порядок асимптотики ξ есть $N^{I(\xi)}$.

Мы будем рассматривать алгебру $\mathbf{A}$ многочленов от счетного числа (коммутирующих) переменных $F_{i,k,q}$, $i = 1, \dots, N$, $k, q = 0, 1, 2, \dots$ с вещественными коэффициентами, не зависящими от F . Для любого монома M из этой алгебры обозначим

$$Q(M) = - \sum q$$

по всем q в этом мономе. Естественное отображение алгебры $\mathbf{A}$ на подалгебру $\mathbf{A}_0$, порожденную всеми $F_{i,k} = F_{i,k,0}$, определяется последовательными подстановками

$$F_{i,k,q} = F_{i+1,k,q-1} - F_{i,k,q-1}$$

или

$$(\nabla^+)^n = (S - 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k S^{n-k}.$$

ЛЕММА 1. Для любого монома $M \in \mathbf{A}$

$$I(M) \leq Q(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$I(F_{i,q}) \leq Q(F_{i,q}) = -q.$$

Это делается, как и в (22), индукцией по q .

Для любого многочлена $P = \sum a_r M_r$ с (различными) мономами M_r и коэффициентами a_r , не зависящими от F , но возможно зависящими от N , определим

$$Q(P) = \max_r (I(a_r) + Q(M_r)),$$

что согласуется с предыдущим определением. Тогда для любого полинома P

$$I(P) \leq \max_r (I(a_r) + I(M_r)) \leq \max_r (I(a_r) + Q(M_r)).$$

Заметим, что для любых двух многочленов P_1 и P_2 выполнено

$$Q(P_1 P_2) \leq Q(P_1) + Q(P_2).$$

Имеет место также

$$Q(\nabla^+ P) \leq Q(P) - 1, \quad Q(\nabla^- \nabla^+ P) \leq Q(P) - 2. \quad (23)$$

Назовем степенью $\deg P$ многочлена $P = \sum a_r M_r$ наибольшую степень его мономов.

ЛЕММА 2. При $j > 1$ c_{ij} есть многочлен в алгебре $\mathbf{A}_0$ степени не более $j - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже видели это для $j = 1, 2, 3, 4$. Заметим, что

$$\deg(\nabla^\pm P) = \deg P.$$

Далее можно использовать индукцию: в формуле (20) степень будет $j - 2$, а в (21) степень будет $j - 1$.

Заметим, что рекуррентные формулы определяют c_{ij} для всех функций $F(x)$, не обязательно аналитических. Поэтому имеет смысл следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть F бесконечно дифференцируема. Тогда для всех i, j

$$I(c_{ij}) \leq Q(c_{ij}) \leq \frac{j-1}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$Q(c_{ij}) = 0, \quad j = 1, 2, \quad Q(c_{i,3}) = 1, \quad Q(c_{i,4}) = 0,$$

то утверждение верно для $j = 1, 2, 3, 4$. Будем доказывать лемму индукцией по j . Предположим, что

$$Q(c_{ij}) \leq \frac{j-1}{2}$$

для всех $j = 1, 2, \dots, J-2$.

Тогда при данных $m, j_1, \dots, j_m$ ввиду (15) и (16) имеем

$$\begin{aligned} Q(A_{iJ}(m; j_1, \dots, j_m)) &\leq 2 + m - 1 + Q(c_{ij_1}) + \dots + Q(c_{ij_m}) - m \\ &\leq 1 + \frac{1}{2}(j_1 + \dots + j_m) - \frac{m}{2} = 1 + \frac{1}{2}(J - m - 1) - \frac{m}{2}, \end{aligned}$$

так как ввиду (23) (-1) и $(-m)$ добавляются из-за операторов дискретной производной, примененных к соответствующим мономам. Максимум последнего выражения достигается при $m = 1$. И значит,

$$Q(A_{iJ}(m; j_1, \dots, j_m)) \leq \frac{J-1}{2}.$$

Аналогично для $B_{iJ}(k; j_1, \dots, j_k)$ имеют место следующие неравенства:

$$Q(B_{iJ}(k; j_1, \dots, j_k)) \leq \frac{1}{2}(J - 1 - k) - \frac{k}{2} < \frac{J-1}{2}.$$

Отсюда получается $Q(c_{iJ}) \leq (J-1)/2$, а значит, и $I(c_{iJ}) \leq Q(c_{iJ}) \leq (J-1)/2$.

2.3. Радиус сходимости. Здесь мы докажем второе утверждение теоремы 1. В доказательстве удобно писать N вместо N/L и считать $C_F \geq 1$.

Мы будем использовать принцип мажорирования для бесконечных систем рекуррентных уравнений и неравенств: например, если даны две системы уравнений

$$c_{ij}^{(q)} = P^{(q)}(c_{i1}^{(q)}, \dots, c_{i,j-2}^{(q)}), \quad q = 1, 2,$$

где $P^{(q)}$ – многочлены с коэффициентами $p_\alpha^{(q)}$, причем $p_\alpha^{(q)} \geq 0$, $|p_\alpha^{(1)}| \leq p_\alpha^{(2)}$ для всех α , а также $|c_{ij}^{(1)}| \leq c_{ij}^{(2)}$ для $j = 1, 2, 3, 4$, то $|c_{ij}^{(1)}| \leq c_{ij}^{(2)}$ для всех j . Одна из таких систем, которая получается из одночастичной задачи (т.е. задачи с $N = 1$) со специально подобранной внешней силой, будет сейчас введена. Другая вспомогательная система $\beta(c_{ij})$ с положительными коэффициентами будет введена ниже.

Одночастичная задача. Положим для $j = 1, 2, \dots$ и фиксированного a

$$g_j = g_j\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^j \frac{1 \cdot 3 \cdots (2j-1)}{j!} = \left(\frac{a}{2}\right)^j \frac{(2j)!}{2^j j! j!} \sim \left(\frac{a}{2}\right)^j \frac{1}{\sqrt{4\pi j}}.$$

Тогда имеет место

ЛЕММА 4. Для $j = 5, 6, \dots$ выполнены неравенства

$$g_j \geq \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} \left(\frac{a}{2}\right)^{k+1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} \frac{g_{j_1}}{j_1+1} \cdots \frac{g_{j_k}}{j_k+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть частица, находившаяся в момент $t = 0$ в точке $x(0) = 0$, движется со скоростью ($a > 0$ произвольно)

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{1-at}} = \sum_{j=0}^{\infty} g_j t^j$$

в поле некоторой внешней силы $F(x)$, которую мы найдем. Тогда

$$x(t) = \int_0^t v(s) ds = \left(-\frac{2}{a}\right) \sqrt{1-at} + \frac{2}{a}$$

откуда получаем

$$1-at = \left(1 - \frac{ax}{2}\right)^2,$$

$$F = \frac{dv}{dt} = \frac{a}{2} \frac{1}{(1-at)^{3/2}} = \frac{a}{2} \frac{1}{(1-ax/2)^3},$$

$$\frac{F^{(k)}}{k!} = \left(\frac{a}{2}\right)^{k+1} \frac{3 \cdot 4 \cdots (k+2)}{k!} = \left(\frac{a}{2}\right)^{k+1} \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Как при выводе рекуррентных уравнений выше (разница состоит только в том, что здесь $v(0) = 1$ и отсутствуют A -члены), получаем

$$g_j = \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} \frac{1}{j} \frac{1}{k!} F^{(k)}(x_i(0)) C_k^p v^p(0) \frac{g_{j_1}}{j_1+1} \cdots \frac{g_{j_{k-p}}}{j_{k-p}+1}$$

для определенных выше g_j . Здесь, как и выше, $\sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1}$ означает суммирование по всем $j_1, \dots, j_{k-p}$ таким, что

$$j_1 + \dots + j_{k-p} = j - k - 1.$$

Так как все коэффициенты положительны, то, откидывая члены с $p > 0$, имеем для всех $a > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} \left(\frac{a}{2}\right)^{k+1} \frac{g_{j_1}}{j_1+1} \cdots \frac{g_{j_k}}{j_k+1} \\ & \leq \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} \left(\frac{a}{2}\right)^{k+1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} \frac{g_{j_1}}{j_1+1} \cdots \frac{g_{j_k}}{j_k+1} \leq g_j. \end{aligned}$$

Мажорирование. Из рекуррентной формулы для c_{ij} видно, что они могут быть представлены в виде

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{d_{ij}} b_{i,j,r} N^{I_{i,j,r}} M_{i,j,r},$$

где $b_{i,j,r}$ и d_{ij} — числа, не зависящие ни от N , ни от F , и $M_{i,j,r} \in \mathbf{A}$. При этом по лемме 2

$$\deg M_{i,j,r} \leq j - 1.$$

Нам нужны будут также другие предварительные понятия. Для любого многочлена

$$P = \sum b_r N^{I_r} M_r,$$

где b_r — числа, не зависящие ни от N , ни от F , $M_r \in \mathbf{A}$, положим

$$\beta(P) = \sum_r |b_r| N^{I_r + Q(M_r)} C_F^{Q_0(M_r) - Q(M_r) + \deg M_r},$$

где для любого монома M_r натуральное число $Q_0(M_r)$ равно сумме $\sum k$ по всем его множителям $F_{i,k,q}$. В частности

$$\beta(c_{ij}) = \sum_r |b_{i,j,r}| N^{I_{i,j,r} + Q(M_{i,j,r})} C_F^{Q_0(M_{i,j,r}) - Q(M_{i,j,r}) + \deg M_{i,j,r}}.$$

Для всех i, k по определению

$$\beta(F_{i,k,0}) = C_F^{k+1}, \quad \beta(\nabla^\pm F_{i,k,0}) = \beta(F_{i,k,1}) = C_F^{k+2} N^{-1} = C_F N^{-1} \beta(F_{i,k}).$$

Кроме того, имеет место: для любых двух многочленов P_1, P_2

$$\beta(P_1 + P_2) \leq \beta(P_1) + \beta(P_2), \quad \beta(P_1 P_2) \leq \beta(P_1) \beta(P_2) \quad (24)$$

и для любого монома M

$$\beta(\nabla^\pm M) \leq (\deg M) N^{Q(M)-1} C_F^{Q_0(M) - Q(M) + \deg M + 1} = (\deg M) C_F N^{-1} \beta(M), \quad (25)$$

а значит, и для любого полинома P

$$\beta(\nabla^\pm P) \leq (\deg P) C_F N^{-1} \beta(P). \quad (26)$$

Назовем $\beta(P)$ *мажорантой* полинома P , так как ввиду

$$|F_{i,k,1}| = |\nabla^+ F_{i,k}| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |F_{i,k+1}(x)| dx \leq C_F^{k+2} N^{-1} = \beta(F_{i,k,1})$$

имеет место свойство

$$|P| \leq \beta(P).$$

Из (24) и (17) следует, что

$$\begin{aligned} \beta(c_{ij}) &\leq \sum_{m=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1 + \dots + j_m = j-m-1} \beta(A_{ij}(m; j_1, \dots, j_m)) \\ &+ \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1 + \dots + j_k = j-k-1} \beta(B_{ij}(k; j_1, \dots, j_k)). \end{aligned}$$

Наше индуктивное предположение будет (с $g_j = g_j(1)$) состоять в том, что

$$\beta(c_{ij}) \leq \chi^j N^{5j/6 - 3/2} g_j, \quad j = 1, 2, \dots, J-2. \quad (27)$$

Начальные данные. Можно выбрать $\chi_0 > 0$ так, чтобы для $j = 1, 2, 3, 4$

$$\chi_0^j N^{5j/6-3/2} g_j \geq \beta(c_{ij}).$$

Действительно, только для $j = 3$ есть зависимость от N , но $(5/6)3 - 3/2$ как раз равно 1.

Индуктивный шаг для A-членов с $m > 1$. Для оценки A-членов мы будем различать два случая: $m = 1$ и $m > 1$. Для $m > 1$ мы используем очевидные оценки

$$\beta(\nabla^\pm c_{ij}) \leq 2\beta(c_{ij}), \quad \beta(\nabla^-(\nabla^+ c_{i,j_1} \cdots \nabla^+ c_{i,j_m})) \leq 2^{m+1} \prod_p \beta(c_{i,j_p}).$$

Тогда из (24) и (20) получим

$$\begin{aligned} \beta(A_{iJ}(m; j_1, \dots, j_m)) &\leq \frac{m+1}{J} N^{2+m} 2^{m+1} \frac{\beta(c_{i,j_1})}{j_1+1} \cdots \frac{\beta(c_{i,j_m})}{j_m+1} \\ &\leq \frac{m+1}{J} N^{2+m} 2^{m+1} \chi^{J-m-1} N^{(5/6)(J-m-1)-m(3/2)} \prod_{p=1}^m \frac{g_{j_p}}{j_p+1} \\ &\leq 2^{m+1} \chi^{J-m-1} N^{(5/6)J-3/2} \frac{m+1}{J} \left(\prod_{p=1}^m \frac{g_{j_p}}{j_p+1} \right), \end{aligned}$$

так как экспонента над N при $m \geq 2$ допускает оценку

$$2+m+\frac{5}{6}(J-m-1)-m\frac{3}{2}=\frac{5}{6}J-m\frac{8}{6}+\frac{7}{6}\leq\frac{5}{6}J-\frac{3}{2}.$$

Далее, по лемме 4 с $a = 2$ (если $\chi \geq 2$) имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{m=2}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} \beta(A_{iJ}(m; j_1, \dots, j_m)) \\ &\leq N^{(5/6)J-3/2} \chi^J \sum_{m=2}^{(j-1)/2} 2^{m+1} \chi^{-m-1} \sum_{j_1+\dots+j_m=j-m-1} \frac{m+1}{J} \left(\prod_{p=1}^m \frac{g_{j_p}}{j_p+1} \right) \\ &\leq \left(\frac{2}{\chi} \right)^3 N^{(5/6)J-3/2} \chi^J g_j. \end{aligned} \tag{28}$$

Индуктивный шаг для A-членов с $m = 1$. В случае $m = 1$ будем использовать следующие оценки для $j = J - 2 \geq 3$. Ввиду (26), (27) и леммы 2

$$\beta(\nabla^+ c_{ij}) \leq (j-1) N^{-1} C_F \beta(c_{ij}) \leq (j-1) N^{-1} C_F \chi^j N^{(5/6)j-3/2} g_j$$

и аналогично

$$|\beta(\nabla^- \nabla^+ c_{i,j})| \leq ((j-1) C_F)^2 N^{-2} \chi^j N^{(5/6)j-3/2} g_j.$$

Это дает дополнительное слагаемое (-2) в экспоненте над N , которая равна

$$3-2+\frac{5}{6}(J-2)-\frac{3}{2}\leq\frac{5}{6}J-\frac{3}{2},$$

т.е.

$$\begin{aligned} A_{ij}(1; j_1) &= A_{ij}(1; J-2) = \frac{1}{j} |d_1| N^3 \frac{\nabla^- \nabla^+ c_{i,J-2}}{J-1} \\ &\leq 2C_F^2 \chi^{j-2} N^{(5/6)J-3/2} g_{j-2} \leq \frac{2C_F^2 g_{j-2}}{\chi^2 g_j} \chi^j N^{(5/6)J-3/2} g_j. \end{aligned} \tag{29}$$

Индуктивный шаг для B -членов. Для B -членов индуктивная оценка проще, но здесь растет степень мономов

$$\begin{aligned}\beta(B_{ij}(k; j_1, \dots, j_k)) &= \frac{1}{j} \frac{1}{k!} \beta\left(F^{(k)}(x_i(0)) \frac{c_{i,j_1}}{j_1+1} \dots \frac{c_{i,j_k}}{j_k+1}\right) \\ &\leq \frac{1}{j} \frac{C_F^{k+1}}{k!} \frac{1}{j_1+1} \dots \frac{1}{j_k+1} \beta(c_{i,j_1}) \dots \beta(c_{i,j_k}) \\ &\leq \frac{1}{j} \frac{C_F^{k+1}}{k!} \frac{g_{j_1}}{j_1+1} \dots \frac{g_{j_k}}{j_k+1} \chi^{j_1+\dots+j_k} N^{j_1+\dots+j_k},\end{aligned}$$

откуда по лемме 4

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_k=j-k-1} \beta(B_{ij}(k; j_1, \dots, j_k)) \\ &\leq \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \frac{C_F^{k+1}}{k!} \sum_{j_1+\dots+j_k=j-k-1} \frac{g_{j_1}}{j_1+1} \dots \frac{g_{j_k}}{j_k+1} \chi^{J-k-1} N^{(5/7)j} \\ &\leq C_F e^{C_F} \chi^{J-2} N^{J/2} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{[(j-1)/2]} \sum_{j_1+\dots+j_k=j-k-1} \frac{g_{j_1}}{j_1+1} \dots \frac{g_{j_k}}{j_k+1} \\ &\leq C_F e^{C_F} \chi^{J-2} N^{J/2} g_j.\end{aligned}\tag{30}$$

Суммируем три полученных слагаемых (28), (29), (30) и выберем $\chi = \chi_1 > 0$ так, чтобы

$$\left(8\chi^{-1} + \frac{2C_F^2 g_{j-2}}{g_j} + C_F e^{C_F}\right) \chi^{-2} \leq 1.$$

Тогда для любого $\chi \geq \max(\chi_0, \chi_1)$ будет

$$|c_{ij}| \leq \chi^J N^{J/2} g_j \leq \chi^J N^{J/2}.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. A. Malyshev, “Fixed points for one-dimensional particle system with strong interaction”, *Mosc. Math. J.*, **12**:1 (2012), 139–147.
- [2] В. А. Малышев, “Критические состояния многочастичных систем с сильным взаимодействием на окружности”, *Пробл. передачи информ.*, **47**:2 (2011), 117–127.
- [3] В. В. Голубев, *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [4] В. А. Малышев, “Почему течет ток: многочастичная одномерная модель”, *ТМФ*, **155**:2 (2008), 301–311.
- [5] E. Caglioti, C. Marchioro, M. Pulvirenti, “Non-equilibrium dynamics of three-dimensional infinite particle systems”, *Comm. Math. Phys.*, **215**:1 (2000), 25–43.
- [6] S. Caprino, M. Pulvirenti, “A cluster expansion approach to a one-dimensional Boltzman equation: a validity result”, *Comm. Math. Phys.*, **166**:3 (1995), 603–631.
- [7] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, Appl. Math. Sci., **106**, Springer-Verlag, New York, 1994.

- [8] R. L. Dobrushin, J. Fritz, “Non-equilibrium dynamics of one-dimensional infinite particle systems with a hard-core interaction”, *Comm. Math. Phys.*, **55**:3 (1977), 275–292.
- [9] O. E. Lanford, III, “Time evolution of large classical systems”, *Dynamical systems, theory and applications*, Lecture Notes in Phys., **38**, Springer-Verlag, Berlin, 1975, 1–111.
- [10] Я. Г. Синай, “Построение динамики в одномерных системах статистической механики”, *ТМФ*, **11**:2 (1972), 248–258.
- [11] H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [12] V. A. Malyshev, “Dynamical clusters of infinite particle dynamics”, *J. Math. Phys.*, **46**:7 (2005), 073302.

В. А. Малышев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

E-mail: malyshev2@yahoo.com

Поступило

15.07.2011

Исправленный вариант

08.12.2011