Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Лыков, Новые условия единственности в классической проблеме моментов, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 6, 893–903

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:00:02

Новые условия единственности в классической проблеме моментов

К. В. Лыков

В работе предложены новые условия определенности степенных проблем моментов Гамбургера и Стилтеса. Предложенные условия по форме и простоте применения близки к условию Крамера, а по точности и области применимости близки к условиям Карлемана. Результаты получены с использованием идей теории экстраполяции пространств и операторов, построенной Б. Яверсом и М. Мильманом в 80-х годах прошлого века.

Библиография: 10 названий.

Введение. Основная цель работы – продемонстрировать связь между экстраполяционными свойствами шкалы пространств L_p и степенной проблемой моментов.

Опишем кратко некоторые идеи теории экстраполяции. В монографии Зигмунда [1] сформулировано следующее утверждение, двойственное к известной экстраполяционной теореме Яно [2].

ТЕОРЕМА [1; теорема 4.41]. Пусть линейный оператор T действует ограниченно в пространствах $L_p[0, 1]$ для всех $p \in (p_0, \infty)$, $p_0 \geq 1$, и удовлетворяет следующей оценке нормь:

$$\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq Cp^{1/\alpha},$$

с некоторыми положительными константами C и α . Тогда оператор T действует ограниченно из пространства L_∞ в экспоненциальное пространство Орлича $\text{Exp } L^\alpha$, состоящее из функций $x(t)$, для которых при некотором $\varepsilon > 0$ конечен интеграл

$$\int_0^1 \exp(\varepsilon |x(t)|^\alpha) dt.$$

В 80-х годах прошлого века Яверсом и Мильманом [3], [4] были заложены основы нового раздела функционального анализа – теории экстраполяции пространств и операторов. Основная идея – построение экстраполяционных функторов, позволяющих по поведению норм элемента в заданной шкале пространств определять

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00077-а).

принадлежность этого элемента конкретному предельному пространству. Не вдаваясь здесь в подробности теории, отметим лишь как специальный частный случай следующее соотношение:

$$\|x\|_{\text{Exp } L^\alpha} \asymp \sup_p \frac{\|x\|_p}{p^{1/\alpha}},$$

из которого приведенная выше теорема следует тривиальным образом. Из этого соотношения при $\alpha = 1$ получаем также известный факт эквивалентности условий (1.1) и (1.2) (см. далее), гарантирующих аналитичность характеристической функции случайной величины и, следовательно, единственность в проблеме моментов. Из приведенного примера видно, что теория экстраполяции позволяет по поведению L_p -норм (моментов) функции определять принадлежность этой функции определенному функциональному классу. Основным результатам теории экстраполяции в шкале пространств L_p и ее приложениям посвящен обзор [5]. Связи проблемы моментов и теории экстраполяции посвящена работа [6], но там затронут иной круг вопросов, нежели в настоящей статье.

В настоящей работе мы опираемся на условия Карлемана, позволяющие по поведению моментов говорить о единственности в проблемах моментов Гамбургера и Стилтеса. С помощью экстраполяционных соотношений сформулированы новые условия единственности в терминах принадлежности случайной величины пространствам Орлича. Эти условия являются следствиями условий Карлемана и поэтому не сильнее последних. Преимущество представленных условий в простоте их проверки: достаточно знать лишь функцию распределения, асимптотику моментов устанавливать не нужно. По форме новые условия аналогичны условию Крамера.

Структура работы следующая. В п. 1 собраны необходимые определения и предварительные сведения. В п. 2 исследована новая задача о наибольшем симметричном пространстве с единственностью в проблеме моментов. Обычно условия единственности формулируются индивидуально, для одной случайной величины. Здесь же рассмотрена задача о классе случайных величин с единственностью в проблеме моментов. В двух последних пунктах сформулированы анонсированные выше новые условия единственности в проблемах моментов Гамбургера и Стилтеса. Условия получены как следствия результатов п. 2, но для читателя, заинтересованного лишь в этих условиях, они собраны в отдельных пунктах и сформулированы в стандартных вероятностных обозначениях.

1. Предварительные сведения и вспомогательные результаты. Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ – вероятностное пространство. Случайной величиной будем называть измеримую функцию из $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ в $\mathbb{R}$. Под функцией распределения случайной величины X понимаем функцию

$$F_X(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}.$$

Для оператора математического ожидания используем стандартное обозначение E :

$$EX := \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dF_X(x).$$

Моментом порядка $n \in \mathbb{N}$ случайной величины X называется величина EX^n , если $E|X|^n < \infty$. Пусть все моменты случайной величины X определены. Будем говорить, что для X имеет место *единственность в проблеме моментов Гамбургера*,

если из условия

$$EX^n = EY^n < \infty \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}$$

следует совпадение функций распределения

$$F_X(x) = F_Y(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}.$$

В этом случае говорят также об *определенной проблеме моментов* Гамбургера. Например, для стандартной нормальной случайной величины $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ имеет место единственность в проблеме моментов, а для ее куба $Y = X^3$ единственности нет. Если на рассматриваемые случайные величины налагают дополнительное условие неотрицательности, то говорят о *проблеме моментов Стилтеса*. Примером неопределенной проблемы моментов Стилтеса является проблема моментов для логарифмически нормального распределения.

Напомним еще, что L_p -нормой случайной величины X называется норма ($p \geq 1$)

$$\|X\|_p := \left(\int_{\Omega} |X(\omega)|^p P(d\omega) \right)^{1/p} = (E|X|^p)^{1/p}.$$

Приведем некоторые известные условия определенности проблемы моментов Гамбургера. Если случайная величина X такова, что

$$E \exp\left(\frac{|X|}{\lambda}\right) < \infty \quad \text{для некоторого } \lambda > 0 \quad (\text{условие Крамера}), \quad (1.1)$$

то ее характеристическая функция аналитична в окрестности нуля и, следовательно, соответствующее распределение однозначно определяется моментами. Условие Крамера эквивалентно условию

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{\|X\|_p}{p} < \infty. \quad (1.2)$$

Если для случайной величины X выполнено

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{\|X\|_p} = \infty \quad (\text{условие Карлемана}), \quad (1.3)$$

то для X также имеет место единственность в проблеме моментов Гамбургера. Сравнивая условия (1.2) и (1.3), видим, что условие (1.2) более требовательное и, следовательно, обладает меньшей сферой применимости. Однако эквивалентное условию (1.2) условие (1.1) имеет то преимущество, что легко проверяемо по функции распределения и не требует определения асимптотического поведения моментов. Далее мы увидим, что эквивалентность условий (1.1) и (1.2) есть частный случай экстраполяционной формулы (1.6).

В случае, если случайная величина абсолютна непрерывна, существует достаточное условие неопределенности проблемы моментов Гамбургера. Именно, если плотность $p(x) > 0$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\log p(x)}{1+x^2} dx < \infty \quad (\text{условие Крейна}), \quad (1.4)$$

то существует такая функция распределения $F(x) \not\equiv \int_{-\infty}^x p(t) dt$, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) dx \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Интересные факты о проблеме моментов можно узнать из книги [7; § 11].

Запись $f(x) \stackrel{x}{\asymp} g(x)$ везде далее означает, что $f(x)$ и $g(x)$ определены на одном и том же множестве и справедливо двойное неравенство

$$C^{-1}f(x) \leq g(x) \leq Cf(x)$$

с положительной константой C , не зависящей от x .

В п. 2 роль вероятностного пространства будет играть полуинтервал $(0, 1]$ с мерой Лебега μ . Неатомичность меры позволит сформулировать основные результаты этого пункта в виде критериев. Через L_0 будем обозначать множество всех измеримых и конечных почти всюду вещественнозначных функций на $(0, 1]$. Для каждой функции $x \in L_0$ существует неотрицательная убывающая непрерывная слева функция x^* на $(0, 1]$, равноизмеримая с $|x|$ (см., например, [8]), т.е. такая, что

$$\mu\{t : |x(t)| > \tau\} = \mu\{t : x^*(t) > \tau\} \quad \text{для всех } \tau > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Симметричным пространством E на $(0, 1]$ называется банахово пространство $E \subset L_0$ (с обычным отождествлением функций, совпадающих почти всюду), в котором выполнены следующие условия:*

- i) если $x \in E$, $y \in L_0$ и $|y| \leq |x|$, то $y \in E$ и $\|y\|_E \leq \|x\|_E$ (т.е. E образует идеальную структуру);
- ii) если $x \in E$, $y \in L_0$ и $y^* = x^*$, то $y \in E$ и $\|y\|_E = \|x\|_E$ (т.е. вместе с каждой функцией x пространство E содержит и все равноизмеримые с ней функции).

Примерами симметричных пространств являются пространства L_p , а также пространства Марцинкевича и Орлича.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем писать $\varphi \in \mathcal{M}$, если $\varphi(t)$ – положительная непрерывная возрастающая вогнутая функция на $(0, 1]$ и $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 0$. Для каждой функции $\varphi \in \mathcal{M}$ можно определить *пространство Марцинкевича $\mathbf{M}(\varphi)$* как множество всех функций $x \in L_0$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{\mathbf{M}(\varphi)} = \sup_{t \in (0, 1]} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t x^*(t) dt.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем писать $M \in \mathcal{O}$, если $M(u)$ – непрерывная возрастающая выпуклая функция на $[0, +\infty)$ и $M(0) = 0$. Для каждой функции $M \in \mathcal{O}$ можно определить *пространство Орлича $\mathbf{L}_M$* как множество всех функций $x \in L_0$, для которых при некотором $\lambda > 0$ конечен интеграл

$$\int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt.$$

Роль нормы в $\mathbf{L}_M$ может выполнять функционал

$$\|x\|_{\mathbf{L}_M} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt \leq 1 \right\}.$$

В случае, если функции $\varphi \in \mathcal{M}$ и $M \in \mathcal{O}$ связаны условием

$$\varphi(t) \stackrel{t}{\asymp} \frac{1}{M^{-1}(1/t)} \quad (1.5)$$

и $1/\varphi \in \mathbf{L}_M$, пространства $\mathbf{L}_M$ и $\mathbf{M}(\varphi)$ совпадают [9] и

$$\|x\|_{\mathbf{L}_M} \stackrel{x}{\asymp} \|x\|_{\mathbf{M}(\varphi)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для функции $\varphi \in \mathcal{M}$ запись $\varphi \in \Delta^2$ будет означать условие

$$\varphi(t) \stackrel{t}{\asymp} \varphi(t^2).$$

Для функции $M \in \mathcal{O}$ запись $M \in \Delta^2$ будет означать, что

$$(M(u))^2 \leq M(Cu)$$

для некоторого $C > 0$ и всех достаточно больших u . Из контекста всегда будет ясно, о функции из какого класса идет речь.

Для функций $\varphi \in \mathcal{M}$ и $M \in \mathcal{O}$, связанных соотношением (1.5), условия $\varphi \in \Delta^2$ и $M \in \Delta^2$ равносильны. Кроме того, для $\varphi \in \Delta^2$ легко проверяется, что $1/\varphi \in \mathbf{L}_M$ и, таким образом, $\mathbf{L}_M = \mathbf{M}(\varphi)$. В работе [10; теорема 2] доказано, что при $\varphi \in \Delta^2$

$$\|x\|_{\mathbf{M}(\varphi)} \stackrel{x}{\asymp} \sup_{t \in (0,1]} \varphi(t) x^*(t) \stackrel{x}{\asymp} \sup_{p \geq 1} \varphi(2^{-p}) \|x\|_p \stackrel{x}{\asymp} \sup_{p \in \mathbb{N}} \varphi(2^{-p}) \|x\|_p. \quad (1.6)$$

В случае $M(u) = e^u - 1$ получаем $\mathbf{L}_M = \mathbf{M}(\varphi)$ с $\varphi(t) = \log^{-1}(e/t)$ и

$$\|x\|_{\mathbf{L}_M} \stackrel{x}{\asymp} \sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{\|x\|_p}{p}.$$

Из последнего соотношения вытекает эквивалентность условий (1.1) и (1.2).

2. Проблема моментов в пространствах Марцинкевича и Орлича.

В этом пункте роль вероятностного пространства играет полуинтервал $(0, 1]$ с мерой Лебега μ . В качестве классов функций (случайных величин) с единственностью в проблеме моментов естественно рассматривать симметричные пространства, так как принадлежность функции таким пространствам зависит лишь от распределения. Кроме того, условия Крамера и Карлемана монотонны, что соответствует условию идеальности i) из определения симметричного пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что в симметричном пространстве E имеет место *единственность в проблеме моментов Гамбургера*, и писать $E \in \mathcal{H}$, если из условий $x \in E$ и

$$\int_0^1 x(t)^n dt = \int_0^1 y(t)^n dt \quad \text{для всех натуральных } n$$

следует

$$\mu\{t : x(t) > \tau\} = \mu\{t : y(t) > \tau\} \quad \text{для всех } \tau \in \mathbb{R}.$$

Интересна проблема описания симметричных пространств с единственностью в проблеме моментов, а также вопрос о существовании наибольшего такого пространства.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi \in \Delta^2$. Пространство Марцинкевича $\mathbf{M}(\varphi) \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \varphi(t) \frac{dt}{t} = \infty. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\int_0^1 \varphi(t) \frac{dt}{t} = -\log 2 \int_0^1 \varphi(t) d \log_2 \frac{1}{t} = \log 2 \int_0^\infty \varphi(2^{-p}) dp$$

и функция φ монотонна, то условие (2.1) равносильно условию

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \varphi(2^{-p}) = \infty.$$

Согласно (1.6) для $x \in \mathbf{M}(\varphi)$ и произвольного $p \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\frac{1}{\|x\|_p} \geq \frac{C\varphi(2^{-p})}{\|x\|_{\mathbf{M}(\varphi)}}$$

с константой C , зависящей лишь от φ . Поэтому из (2.1) следует, что для произвольного $x \in \mathbf{M}(\varphi)$ выполнено условие Карлемана

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{\|x\|_p} = \infty$$

и, следовательно, имеет место единственность в проблеме моментов.

Пусть теперь

$$\int_0^1 \varphi(t) \frac{dt}{t} < \infty. \quad (2.2)$$

Для каждой функции $\varphi \in \mathcal{M}$ существует гладкая функция $\varphi_1 \in C^1(0, 1] \cap \mathcal{M}$ такая, что $\varphi_1(2^{-n}) = \varphi(2^{-n})$, откуда $\varphi_1(t) \stackrel{t}{\asymp} \varphi(t)$ и, следовательно, $\mathbf{M}(\varphi_1) = \mathbf{M}(\varphi)$. Поэтому сразу можно считать, что $\varphi \in C^1(0, 1]$. Пусть теперь $\psi(t)$ – такая функция на $(0, 1)$, что

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{\varphi(t)} \quad \text{при} \quad t \in \left(0, \frac{1}{3}\right), \\ \psi(t) &\in C^1(0, 1), \quad \psi'(t) < 0, \quad \psi(t) = -\psi(1-t). \end{aligned}$$

Такая функция, очевидно, существует, и $\psi \in \mathbf{M}(\varphi)$ в силу первой эквивалентности из (1.6). Покажем теперь, что для плотности $p(x)$ случайной величины ψ выполнено условие Крейна (1.4). Имеем

$$p(x) = -(\mu\{t \in (0, 1) : \psi(t) > x\})'_x = -(\psi^{-1}(x))'_x = -\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(x))}.$$

Функция $p(x)$ отделена от нуля на любом интервале вида $(-a, a)$, $a > 0$, и четна в силу симметричности ψ . Поэтому условие Крейна для p равносильно условию

$$\int_{\psi(1/3)}^{+\infty} \frac{-\log p(x)}{x^2} dx = \int_{\psi(1/3)}^{+\infty} \frac{\log(-\psi'(\psi^{-1}(x)))}{x^2} dx < \infty$$

или, после замены $t := \psi^{-1}(x)$, условию

$$\int_0^{1/3} \frac{-\log(-\psi'(t))}{\psi(t)^2} d\psi(t) < \infty.$$

Так как $\psi(t) = 1/\varphi(t)$ при $t \in (0, 1/3)$, то достаточно установить конечность интеграла

$$\int_0^{1/3} \log\left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2}\right) \varphi'(t) dt.$$

Для любой $\varphi \in \mathcal{M}$ справедливо неравенство $\varphi'(t) \leq \varphi(t)/t$, поэтому

$$\log\left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2}\right) \leq \log\left(\frac{1}{t\varphi(t)}\right)$$

и

$$\int_0^{1/3} \log\left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2}\right) \varphi'(t) dt \leq \int_0^{1/3} \log\left(\frac{1}{t}\right) \varphi'(t) dt + \int_0^{1/3} \log\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right) \varphi'(t) dt.$$

Второй интеграл справа конечен для любой $\varphi \in \mathcal{M}$. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\int_0^{1/3} \log\left(\frac{1}{t}\right) \varphi'(t) dt < \infty.$$

Обозначим через $\chi_{(s,1)}(t)$ индикатор множества $(s, 1)$. Так как $\varphi(s)\chi_{(s,1)}(t) \leq \varphi(t)$ и в силу (2.2) функция $\varphi(t)$ суммируема по мере dt/t , с помощью теоремы Лебега о мажорируемой сходимости получим

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0+} \varphi(s) \log \frac{1}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0+} \varphi(s) \int_s^1 \frac{dt}{t} = \lim_{s \rightarrow 0+} \int_0^1 \varphi(s) \chi_{(s,1)}(t) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 \lim_{s \rightarrow 0+} \varphi(s) \chi_{(s,1)}(t) \frac{dt}{t} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_0^{1/3} \log \frac{1}{t} \varphi'(t) dt = \int_0^{1/3} \log \frac{1}{t} d\varphi(t) = \varphi(t) \log \frac{1}{t} \Big|_0^{1/3} + \int_0^{1/3} \varphi(t) \frac{dt}{t} < \infty.$$

Итак, в случае (2.2) для плотности случайной величины $\psi \in \mathbf{M}(\varphi)$ выполнено условие Крейна и, следовательно, нет единственности в проблеме моментов.

Дадим теперь эквивалентную формулировку теоремы 1 в терминах пространств Орлича.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M \in \Delta^2$. Пространство $\mathbf{L}_M \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_1^\infty \frac{M'(u)}{M(u)} \frac{du}{u} = \infty. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой функции $M \in \mathcal{O}$ существует функция $\varphi \in \mathcal{M}$ такая, что выполнено (1.5). При этом, как отмечено в конце предыдущего пункта, условия $M \in \Delta^2$ и $\varphi \in \Delta^2$ эквивалентны. Остается подставить в (2.1) вместо φ выражение $1/M^{-1}(1/t)$. Получим условие

$$\int_0^1 \frac{1}{M^{-1}(1/t)} \frac{dt}{t} = \infty$$

или, после замены $M^{-1}(1/t) = u$, условие (2.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что в симметричном пространстве E имеет место *единственность в проблеме моментов Стилтеса*, и писать $E \in \mathcal{S}$, если из условий $x \in E$ и

$$\int_0^1 |x(t)|^n dt = \int_0^1 |y(t)|^n dt \quad \text{для всех натуральных } n$$

следует

$$\mu\{t : |x(t)| > \tau\} = \mu\{t : |y(t)| > \tau\} \quad \text{для всех } \tau > 0.$$

Для проблемы моментов Стилтеса существуют условия, аналогичные (1.3) и (1.4). Именно (см., например, [7; § 11]), условие Карлемана определенности

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{\|X\|_p}} = \infty$$

и условие Крейна неопределенности проблемы моментов Стилтеса

$$\int_0^{+\infty} \frac{-\log p(x^2)}{1+x^2} dx < \infty.$$

Используя эти условия, совершенно аналогично двум предыдущим теоремам получаем следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi \in \Delta^2$. Пространство Марцинкевича $\mathbf{M}(\varphi) \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \sqrt{\varphi(t)} \frac{dt}{t} = \infty.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $M \in \Delta^2$. Пространство $\mathbf{L}_M \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_1^\infty \frac{M'(u)}{M(u)} \frac{du}{\sqrt{u}} = \infty. \quad (2.4)$$

Из теорем 2 и 4 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\alpha > 0$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ и при достаточно больших u

$$M(u) = \exp(u^\alpha (\log u)^{\gamma_1} (\log \log u)^{\gamma_2} \cdots (\log \cdots \log u)^{\gamma_n}).$$

Пространство $\mathbf{L}_M \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \{\alpha > 1\} \vee \{\alpha = 1, \gamma_1 > -1\} \vee \{\alpha = 1, \gamma_1 = -1, \gamma_2 > -1\} \vee \cdots \\ & \vee \{\alpha = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_{k-1} = -1, \gamma_k > -1\} \vee \cdots \\ & \vee \{\alpha = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_{n-1} = -1, \gamma_n \geq -1\}. \end{aligned}$$

Пространство $\mathbf{L}_M \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \{\alpha > 1/2\} \vee \{\alpha = 1/2, \gamma_1 > -1\} \vee \{\alpha = 1/2, \gamma_1 = -1, \gamma_2 > -1\} \vee \cdots \\ & \vee \{\alpha = 1/2, \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_{k-1} = -1, \gamma_k > -1\} \vee \cdots \\ & \vee \{\alpha = 1/2, \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_{n-1} = -1, \gamma_n \geq -1\}. \end{aligned}$$

3. Новые условия единственности в проблеме моментов Гамбургера.

В этом пункте мы переформулируем теорему 2 на вероятностном языке и рассмотрим иллюстрирующий пример.

ТЕОРЕМА 5. i) Пусть F и G – функции распределения, $M \in \Delta^2$, выполнено (2.3) и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(\varepsilon|x|) dF(x) < \infty. \quad (3.1)$$

Тогда из равенств

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dG(x) \quad \text{для всех натуральных } n \quad (3.2)$$

следует

$$F(x) = G(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Пусть $M \in \Delta^2$, но условие (2.3) не выполнено. Тогда существуют функции распределения F и G , для которых выполнены условия (3.1) и (3.2), но $F \not\equiv G$.

Следующее утверждение является частным случаем следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X – случайная величина на произвольном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, F – ее функция распределения. Если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{E} \exp\{\varepsilon|X| \log^{-1}(|X| + e)\} < \infty \quad (3.3)$$

или, равносильно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{\varepsilon|x| \log^{-1}(|x| + e)\} dF(x) < \infty, \quad (3.4)$$

то для случайной величины X имеет место единственность в проблеме моментов Гамбургера.

Условие (3.3) аналогично условию Крамера, но, очевидно, имеет большую область применимости. Следствие 1 показывает, что можно добавить и кратные логарифмы.

ПРИМЕР 1. Пусть $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, а

$$Y = \text{sign } X \cdot |X|^a \log^b(|X| + e),$$

где $a > 0$, b – произвольное вещественное число. Если $a \in (0, 2)$ или $a = 2$, $b \leq 1$, то для Y имеет место единственность в проблеме моментов Гамбургера. Если $a > 2$ или $a = 2$, $b > 1$, то единственности нет. Действительно, условие (3.4) будет выполнено, если

$$\int_0^{+\infty} \exp\left\{\frac{x^a \log^b(x + e)}{2 \log(x^a \log^b(x + e) + e)}\right\} e^{-x^2/2} dx < \infty.$$

Последнее, очевидно, выполняется при $a \in (0, 2)$ и $a = 2$, $b \leq 1$. В случае $a > 2$ или $a = 2$, $b > 1$, можно проверить условие Крейна (1.4). Чтобы продемонстрировать полезность подхода и идей предыдущего пункта, поступим следующим образом. Для перестановки X^* случайной величины $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ несложно проверяется соотношение

$$X^*(t) \stackrel{0 < t \leq 1/2}{\asymp} \log^{1/2} \frac{e}{t},$$

откуда

$$Y^*(t) \stackrel{0 < t \leq 1/2}{\asymp} \log^{a/2} \left(\frac{e}{t}\right) \log^b \left(\log^{1/2} \frac{e}{t} + e\right).$$

Используя рассуждение из второй части доказательства теоремы 1, убеждаемся, что условие Крейна для Y равносильно условию (2.2) для функции

$$\varphi(t) = \log^{-a/2} \left(\frac{e}{t}\right) \log^{-b} \left(\log^{1/2} \frac{e}{t} + e\right).$$

Условие (2.2) для функции φ выполняется при $a > 2$ и при $a = 2$, $b > 1$. Аналогичные результаты можно получить для функций от нормальной случайной величины, содержащих кратные логарифмы.

4. Новые условия единственности в проблеме моментов Стилтеса. Аналогично предыдущему пункту из теоремы 4 вытекают следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 6. i) Пусть F и G – функции распределения на $[0, +\infty)$, $M \in \Delta^2$, выполнено (2.4) и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{+\infty} M(\varepsilon x) dF(x) < \infty. \quad (4.1)$$

Тогда из равенств

$$\int_0^{+\infty} x^n dF(x) = \int_0^{+\infty} x^n dG(x) \quad \text{для всех натуральных } n \quad (4.2)$$

следует

$$F(x) = G(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Пусть $M \in \Delta^2$, но условие (2.4) не выполнено. Тогда существуют функции распределения F и G на $[0, +\infty)$, для которых выполнены условия (4.1) и (4.2), но $F \neq G$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть X – неотрицательная случайная величина на произвольном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, F – ее функция распределения. Если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$E \exp\{\varepsilon \sqrt{X} \log^{-1}(X + e)\} < \infty$$

или, равносильно,

$$\int_0^{+\infty} \exp\{\varepsilon \sqrt{x} \log^{-1}(x + e)\} dF(x) < \infty,$$

то для случайной величины X имеет место единственность в проблеме моментов Стильбеса.

ПРИМЕР 2. Пусть

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad Y = |X|^a \log^b(|X| + e),$$

где $a > 0$, b – произвольное вещественное число. Если $a \in (0, 4)$ или $a = 4$, $b \leq 2$, то для Y имеет место единственность в проблеме моментов Стильбеса. Если $a > 4$ или $a = 4$, $b > 2$, то единственности нет.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.
- [2] S. Yano, “Notes on Fourier Analysis. (XXIX): An Extrapolation Theorem”, *J. Math. Soc. Japan*, **3:2** (1951), 296–305.
- [3] B. Jawerth, M. Milman, “Extrapolation spaces with applications”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **89**, no. 440, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [4] B. Jawerth, M. Milman, “New results and applications of extrapolation theory”, *Interpolation Spaces and Related Topics*, Israel Math. Conf. Proc. **5**, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1992, 81–105.
- [5] S. V. Astashkin, K. V. Lykov, “Extrapolation description of rearrangement invariant spaces and related problems”, *Banach and Function Spaces III*, Proceedings of the Third International Symposium on Banach and Function Spaces (Kitakyushu, Japan, 2009), eds. M. Kato, L. Maligranda, T. Suzuki, Yokohama Publ., 2011, 1–52.
- [6] К. В. Лыков, “Некоторые замечания к проблеме моментов и ее связи с теорией экстраполяции пространств”, *Матем. заметки*, **91:1** (2012), 79–92.
- [7] Й. Стоянов, *Контрпримеры в теории вероятностей*, Факториал, М., 1999.
- [8] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [9] Я. Б. Рутцкий, “О некоторых классах измеримых функций”, *УМН*, **20:4** (1965), 205–208.
- [10] С. В. Асташкин, К. В. Лыков, “Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, “близких” к L_∞ ”, *Сиб. матем. журн.*, **47:5** (2006), 974–992.

К. В. Лыков

Самарский государственный университет

E-mail: alkv@list.ru

Поступило

26.03.2004

Исправленный вариант

08.06.2006