Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Людковский, Измеримость автоморфизмов топологических групп, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 105–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm924>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:46:26

УДК 512.546+517.987

ИЗМЕРИМОСТЬ АВТОМОРФИЗМОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

С. В. Лютковский

В статье исследована проблема о соотношениях между измеримостью и непрерывностью алгебраических автоморфизмов топологических групп в зависимости от типа групп. Разобраны случаи и доказаны соответствующие теоремы, когда измеримость автоморфизма влечет за собой его непрерывность, например, для сепарабельной локально компактной группы и для автоморфизма, измеримого относительно неотрицательной меры Хаара. С другой стороны, доказано существование и приводятся примеры неметризуемых несепарабельных компактных групп с мерами Хаара и не локально компактных сепарабельных метризуемых групп с квазиинвариантными мерами μ относительно плотных подгрупп, для которых существуют μ -измеримые разрывные автоморфизмы.

Библиография: 18 названий.

В работе [1] было исследовано существование разрывных представлений локально компактных групп. Данная работа посвящена исследованию проблемы о соотношениях между измеримостью и непрерывностью автоморфизмов топологических групп G в зависимости от типа групп. Очевидно, что семейство всех алгебраических автоморфизмов g группы G является группой, которая обозначается $\text{Aut}(G)$, а автоморфизмы характеризуются тем, что $g(ab) = g(a)g(b)$ для любых $a, b \in G$. Здесь рассматриваются T_0 -группы, которые также являются тихоновскими пространствами согласно теореме 8.4 из [2].

1. Определения. Автоморфизм g называется μ -измеримым, если $g^{-1}(A) \in Af(G, \mu)$ для любых $A \in Bf(G)$, где μ обозначает σ -аддитивную неотрицательную меру, определенную на σ -алгебре $Af(G, \mu)$, которая является пополнением борелевской σ -алгебры $Bf(G)$ топологической группы G с помощью подмножеств $E \subset F$, где $F \in Bf(G)$ и $\mu(F) = 0$. Мера μ называется *левоинвариантной мерой Хаара*, если $\mu(bA) = \mu(A)$ для любых $A \in Af(G, \mu)$ и $b \in G$. Если H является подгруппой в G и μ^h эквивалентна μ для любых $h \in H$, то мера μ на G называется *квазиинвариантной* относительно подгруппы H в G , где $\mu^h(A) := \mu(h^{-1}A)$ для любых μ -измеримых подмножеств $A \subset G$ и элементов $h \in H$, а $h^{-1}A := \{a : a = h^{-1}b, b \in A\}$ и $H \subset G$; h^{-1} обозначает обратный элемент для h . Как обычно, $AB := \{c : c = ab, a \in A, b \in B\}$ для подмножеств A и B в G .

Для удобства записи далее используется обозначение $\int_G f(x) \mu(dx)$ вместо $\int_G f(x) \times d\mu(x)$. Как обычно, $L^p(G, \mu, \mathbb{C})$ обозначает пространство классов эквивалентности измеримых комплекснозначных функций $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_p := \left(\int_G |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p},$$

где $1 \leq p < \infty$, а μ – неотрицательная мера.

В топологическом пространстве X подмножество $A \subset X$ называется *множеством первой категории*, если A является объединением $A = \bigcup_i A_i$ счетного семейства нигде не плотных множеств A_i . Пусть J обозначает семейство всех множеств первой категории в X . Множество A называется *нетощим*, если $A \notin J$. Множество A называется *открытым по модулю J* , если существует открытое множество Y такое, что $A \setminus Y$ и $Y \setminus A$ являются множествами первой категории. Свойство открытости множества A по $\text{mod } J$ называется *свойством Бэра*, семейство таких множеств обозначается через $\mathbf{B}$. Говорят, что отображение $f: X \rightarrow H$ в топологическое пространство H *обладает свойством Бэра*, если $f^{-1}(F) \in \mathbf{B}$ для любых замкнутых подмножеств F в H .

2. ТЕОРЕМА 1. Пусть на локально компактной сепарабельной группе G заданы левоинвариантная мера Хаара μ и μ -измеримый автоморфизм $g \in \text{Aut}(G)$. Тогда g непрерывно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G_i – полные сепарабельные топологические группы с размерностями τ_i при $i = 1, 2, 3$, с левоквазиинвариантными вероятностными мерами μ_i (на G_i относительно G_{i+1} при $i = 1, 2$) и непрерывными факторами квазиинвариантности $d_{\mu_i}(h, g) := \mu_i^h(dg)/\mu_i(dg)$ на $G_{i+1} \times G_i$ при $i = 1, 2$, где $h \in G_{i+1} \subset G_i$, $g \in G_i$. Если $g \in \text{Aut}(G_1 \times G_2)$ и ограничения $g|_{G_i}$ μ_i -измеримы при $i = 1, 2$, то $g|_{(G_2, \tau_2)}$ непрерывно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – сепарабельная нетощая топологическая группа и автоморфизм g обладает свойством Бэра. Тогда g непрерывно на G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу теоремы 8.3 из [2] T_0 -группа метризуема тогда и только тогда, когда она имеет счетную открытую базу в e , причем метрика может быть выбрана левоинвариантной; следовательно, группа G метризуема (также в случае теоремы 2 для G_i). В силу следствия 3.3.11 из [3] хаусдорфово пространство локально компактно в том и только том случае, если оно гомеоморфно открытому подпространству некоторого компакта. Согласно теореме Кантора (см. [3, теорема 4.3.8]) метрическое пространство (G, ρ) полно тогда и только тогда, когда каждая убывающая последовательность $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ непустых замкнутых подмножеств пространства G таких, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta(F_i) = 0,$$

имеет непустое пересечение: $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$, где ρ – метрика на G ,

$$\delta(F) := \sup_{a, b \in F} \rho(a, b).$$

Отсюда вытекает, что G – полное метрическое пространство. В силу определения μ -измеримости из п. 1 $g^{-1}(A) \in Af(G, \mu)$ для любых $A \in Bf(G)$. В силу теоремы Лузина (см. [4, теорема 2.3.5]) для любого $b > 0$ существует компактное подмножество $C_b \subset G$ такое, что $\mu(G \setminus C_b) < b$ и $g|_{C_b}$ непрерывно. Пусть $b < \mu(G \cap V)$ для некоторой (открытой) окрестности $V \ni e$ в G . В силу следствия III.12.4 из [5] для любых двух μ -измеримых подмножеств A и B в G , каждое из которых не является локально μ -нулевым, AB имеет внутреннюю точку, причем e является внутренней точкой в AA^{-1} . Тогда $C_b C_b^{-1}$ – это окрестность единичного элемента e в G . Но $g|_{C_b C_b^{-1}}$ непрерывно, так как $g(ac) = g(a)g(c)$ и $(g(a))^{-1} = g(a^{-1})$ для любых $a, c \in G$. В силу предложения III.1.14 из [5] подгруппа H , открытая в G , является также замкнутой в G . С другой

стороны, подгруппа H в G открыта тогда и только тогда, когда внутренность H непуста (см. [5, упражнение III.10]). Напомним, что топологическая группа H называется *компактно порожденной*, если существует компактное подмножество C в H такое, что подгруппа H_C , порожденная C , совпадает с H . Группа H компактно порождена тогда и только тогда, когда существует открытое подмножество U в H , замыкание которого $\overline{U}$ компактно и U порождает H (см. [5, упражнение III.35]). Для локально компактной группы G следующие утверждения эквивалентны:

- а) G является σ -компактной;
- б) G является линделёфовым пространством;
- в) для любой замкнутой подгруппы H в G пространства H и G/H являются σ -компактными.

Поэтому компактно порожденная подмножеством C подгруппа G_C открыто-замкнута в G . Алгебраический гомоморфизм $f: G \rightarrow K$ топологических групп G и K непрерывен в $e \in G$ тогда и только тогда, когда f непрерывен на G (см. [5, § III.2.7]); следовательно, g непрерывен на G , так как он непрерывен на G_C . При этом $g(G_C)$ также компактно порождена, так как $g(C)$ компактно согласно теореме 3.1.10 из [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $f: G_2 \rightarrow \mathbb{C}$, $g: G_1 \rightarrow \mathbb{C}$ таковы, что $f(y)g(x) \times d_{\mu_1}(y, x) \in L^1(G_2 \times G_1, \mu_2 \times \mu_1, \mathbb{C})$. Напомним, что измеримое пространство (X, V) называется *радоновым*, если оно содержит компактный подкласс K , аппроксимирующий снизу каждую неотрицательную меру на (X, V) , где X – множество с σ -алгеброй V его подмножеств, $K \subset V$, а класс подмножеств K называется *компактным*, если для любой последовательности $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ в K из $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ следует, что существует $m \in \mathbb{N}$, для которого $\bigcap_{n=1}^m K_n = \emptyset$. В силу теоремы I.1.4 из [6] сепарабельное полное метрическое пространство X является топологическим радоновым пространством $(X, Bf(X))$. Отсюда следует, что меры μ_i на G_i радоновы. В силу теоремы Фубини (см. [5, теорема II.9.8] или [4, § 2.6.2])

$$\begin{aligned} \int_G \int_{G'} f(y)g(z)d_{\mu_1}(y^{-1}, z) \mu_2(dy) \mu_1(dz) &= \int_{G'} \int_G f(y)g(y^{-1}x) \mu_2(dy) \mu_1(dx) \\ &= \int_G (f * g)(x) \mu_1(dx); \end{aligned}$$

следовательно, μ_1 -почти всюду существует свертка $f * g$ на G , т.е. $f * g \in L^1(G, \mu_1, \mathbb{C})$. Беря характеристические функции χ_A μ_1 -измеримых подмножеств A в G_1 , мы получим, что для любого $b > 0$ существует компактное подмножество C_b в G_2 такое, что $\mu_2(G_2 \setminus C_b) < b$ и $\mu_1(A \cap xB)|_{C_b}$ непрерывно по $x \in C_b$, где $A, B \in Af(G, \mu_1)$. Это объясняется тем, что для $f(y) = \chi_A(y)$ и $g(x) = \chi_B(x)$ имеется неравенство

$$\int_G \int_{G'} \chi_A(y)\chi_B(y^{-1}x) \mu_2(dy) \mu_1(dx) \leq \int_G \int_{G'} \chi_A(y)\chi_G(z)d_{\mu_1}(y^{-1}, z) \mu_2(dy) \mu_1(dz).$$

Поэтому подгруппа G_{C_b} , компактно порожденная в G_1 подмножеством C_b , является G_δ -подмножеством в G_1 . Итак, оно удовлетворяет теореме Бэра о категории (см. [3, теорема 3.9.3]): в полном по Чеху пространстве X объединение $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ любой последовательности нигде не плотных множеств является коплотным множеством, т.е. его дополнение $X \setminus A$ всюду плотно в X , где тихоновское пространство X называется *полным по Чеху*, если существует компактификация cX пространства X такая, что нарост

$cX \setminus c(X)$ является F_σ -множеством в X , т.е. счетным объединением замкнутых множеств (его дополнение является G_δ -множеством). В самом деле, согласно теореме 3.9.6 из [3]: полнота по Чеху наследуется замкнутыми множествами и G_δ -множествами. Тогда $g|_{C_b C_b^{-1}}$ непрерывно и, следовательно, g непрерывно на G_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Поскольку g обладает свойством Бэра, это эквивалентно тому, что g является поточечным пределом последовательности непрерывных отображений g_n , $n \in \mathbb{N}$; следовательно, и g^{-1} обладает свойством Бэра (см. [7, § 32]). Тогда существует почти открытое подмножество A в G такое, что ограничение $g|_A$ непрерывно, так как G нетокая. Отображение $\text{inv}(b) := b^{-1}$ для любых $b \in G$ непрерывно; следовательно, $A^{-1} = \text{inv}(A)$ тоже почти открыто, так как inv является гомеоморфизмом группы G . С другой стороны, $g|_{A^{-1}}$ непрерывно, так как $g(a^{-1}) = (g(a))^{-1}$ для любых $a \in A$. Отображение $L_b: G \rightarrow G$ непрерывно, где $L_b a := ba$ для любых $a, b \in G$. Тогда можно выбрать A так, чтобы $e \in A$, где e обозначает единичный элемент группы G . Ограничение $g|_{AA^{-1}}$ непрерывно, так как $g(ab) = g(a)g(b)$ для любых $a \in A$, $b \in A^{-1}$, а отображение умножения $G \times G \ni (a, b) \mapsto ab \in G$ непрерывно. Согласно теореме Банаха–Куратовского–Петтиса, если множество E содержит нехудое почти открытое подмножество топологической группы G , то EE^{-1} является окрестностью единичного элемента (см. [8, гл. 6, § P(v)]); следовательно, AA^{-1} является окрестностью e в G . Непрерывность g на открытом подмножестве в G эквивалентна непрерывности g на всей группе G .

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – топологическая группа с вероятностной мерой μ и левоинвариантной метрикой ρ на G . Обозначим через $\text{Aut}_\mu(G)$ подгруппу в $\text{Aut}(G)$, состоящую из $g \in \text{Aut}(G)$ таких, что $g(Af(G, \mu)) \subset Af(G, \mu)$ и $g^{-1}(Af(G, \mu)) \subset Af(G, \mu)$.

Очевидно, что имеется левоинвариантная псевдометрика (или метрика на классах эквивалентности), задаваемая формулами

$$\bar{\rho}(g, h) := \bar{\rho}(h^{-1}g, \text{id}), \quad \bar{\rho}(f, \text{id}) := \int_G \rho(f(x), x) \mu(dx).$$

4. ТЕОРЕМА. *Существуют*

- 1) *неметризуемые компактные группы с мерами Хаара μ ,*
- 2) *не локально компактные сепарабельные метризуемые полной метрикой группы G с квазиинвариантными мерами μ относительно плотных подгрупп G'*

такие, что они имеют μ -измеримые разрывные автоморфизмы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим компактную группу $G = \mathbf{T}^c$ в тихоновской топологии декартова (прямого) произведения топологических групп (см. [3, § 8.5.4] и [2, § 6]), где $\mathbf{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – тор, $c := \text{card}(\mathbb{R})$. Тогда мера Хаара μ на группе G является произведением вероятностных мер Хаара ν_i на каждой группе $\mathbf{T}_i$, где $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}$ для любых $i \in \mathbb{R}$. Пусть C является компактным подмножеством в $\mathbf{T}_i$ с $\nu_i(C) = 0$. Тогда компактно порожденная подгруппа G_C является σ -компактной и $G_C \in Bf(\mathbf{T}_i)$. Поскольку $\nu_i(x) = 0$ для любой точки $x \in \mathbf{T}_i$, никакое счетное семейство таких G_{C_j} не может покрыть всей группы $\mathbf{T}_i$.

Например, в качестве C можно взять подмножество, гомеоморфное Канторовому множеству $D^{\aleph_0}$ (см. [3, § 2.3]), где $D = \{0, 1\}$ обозначает двухточечное дискретное пространство. Используя их сдвиги, можно по индукции построить бесконечные семейства

таких подгрупп G_C с попарными пересечениями, равными e . Множество S всех таких семейств частично упорядочено по включению. По лемме Куратовского–Порна [3] каждое линейно упорядоченное подмножество P имеет максимальный элемент $\bigcup_{p \in P} p$ в S . Поэтому для любого i имеются семейства $\{G_{C_j} := G_{i,j} : j \in \mathbb{R}\}$ с $\bigcup_j G_{i,j} = \mathbf{T}_i$.

С другой стороны, $\nu_i(G_C) = 0$, так как

$$\lambda(AB) = \int_H \chi_A(x) \lambda(xB) \lambda(dx) = \int_H \chi_A(x) \left(\int_H \chi_{xB}(y) \lambda(dy) \right) \lambda(dx),$$

где λ – мера, эквивалентная левоинвариантной (неотрицательной) мере Хаара на локально компактной группе H (в данном случае $H = \mathbf{T}$). Тогда равенство $\lambda(B) = 0$ эквивалентно $\lambda_x(B) = 0$ для любых $x \in H$ и $B \in Af(H, \lambda)$; следовательно, $\lambda(AB) = 0$ для любых подмножеств A и B в $Af(H, \lambda)$ с $|\lambda|(A) + |\lambda|(B) = 0$, где $|\lambda|$ обозначает вариацию меры λ . Напомним, что для топологического пространства X , его покрытия $\{A_s\}_{s \in S}$ и согласованного семейства отображений $f_s: A_s \rightarrow Y$ в топологическое пространство Y , т.е.

$$f_{s_1}|_{A_{s_1} \cap A_{s_2}} = f_{s_2}|_{A_{s_1} \cap A_{s_2}}$$

для любых $s_1, s_2 \in S$, можно определить отображение $f: X \rightarrow Y$, полагая $f(x) = f_s(x)$ для любых $x \in A_s$, которое называется *комбинацией отображений* $\{f_s\}_{s \in S}$ и обозначается $\nabla_{s \in S} f_s$ (см. [3, § 2.1]).

Тогда имеются автоморфизмы $f: G_0 \rightarrow G_0$, удовлетворяющие следующим условиям:

- i) $f_{i,j} := f|_{G_{i,j} \otimes \bigotimes_{k \neq i} e_k}$ – алгебраические изоморфизмы групп $G_{i,j} \otimes \bigotimes_{k \neq i} e_k$ с соответствующими группами $G_{(i',j')} \otimes \bigotimes_{k \neq i'} e_k$, где e_k обозначает единичный элемент в $\mathbf{T}_k$, σ – элемент симметрической группы $\Sigma(\alpha^2)$ всех биекций ординала α^2 мощности $\mathfrak{c} := \text{card}(\mathbb{R})$, $(i', j') := \sigma(i, j)$;
- ii) σ таков, что $\text{card}\{\sigma(i, j) = (i', j') : i \neq i' \text{ и } j \neq j', G_{i,j} \text{ содержит элементы бесконечных порядков}\} = \beta \geq \aleph_0$, σ не переставляет i с j ; $\text{card}\{j' : \sigma(i, j) = (i', j'), j' \neq j\} \leq \aleph_0$ для любого заданного $i \in \alpha$; комбинация семейства отображений $\{\pi_{i'} \circ f_{i,j} : j\}$ дает некоторый непрерывный автоморфизм для любого $\mathbf{T}_i$, где $\pi_i: G \rightarrow \mathbf{T}_i$ обозначают проекции;
- iii) G_0 – подгруппа в G такая, что $\pi_i(G_0)$ для любых i и j либо содержит в себе $G_{i,j}$, либо пересекается с ней по e_i ;
- iv) $G_{i,j}$ и $G_{\sigma(i,j)}$ – изоморфные топологические группы для любых i, j и σ из условия ii).

Семейство J всех таких автоморфизмов частично упорядочено по правилу: $A = (G_0^1, f^1) < B = (G_0^2, f^2)$ и равносильно двум условиям $G_0^1 \subset G_0^2$ и $f^2|_{G_0^1} = f^1$.

В силу леммы Куратовского–Порна имеются элементы в J , так что $\beta = \mathfrak{c}$ и $G_0 = G$, так как в противном случае каждое вполне упорядоченное подмножество J_0 в J имело бы $\max(J_0)$ или с $\beta < \mathfrak{c}$ или $G_0 \neq G$. В последнем случае по индукции можно построить элемент $X = (G_0^2, f^2) > \max(J_0)$. Пусть f является таким автоморфизмом группы $G_0 = G$. Тогда он разрывен в силу условий i), ii), так как подгруппы в $\mathbf{T}$, порожденные элементами бесконечного порядка, плотны в $\mathbf{T}$. Если $U = \prod_i U_i$ является открытым подмножеством в G и принадлежит базе Q тихоновской топологии в G , то в силу условий ii)–iv) $f^{-1}(U) \in Af(G, \mu)$, так как $U_i \neq \mathbf{T}_i$ только для конечного семейства индексов i .

Мера μ радонова и регулярна на G ; следовательно, $\mu(\overline{U} \setminus U) = 0$ для любого $U \in Q$, где $\overline{U}$ обозначает замыкание U . Для любого открытого V в G и любого $c > 0$ существует конечное покрытие подмножества $\overline{V}$ конечным семейством $U(s) \in Q$, $s = 1, \dots, n$, так что $\mu(\bigcup_{s=1}^n U(s) \setminus \overline{V}) < c$. Также существует последовательность $U'(s) \in Q$ такая, что $U'(s+1) \supset U'(s)$ и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mu(V \setminus U'(s)) = 0.$$

Очевидно, что $\mu(f^{-1}(\overline{U} \setminus U)) = 0$ для любого $U \in Q$; следовательно,

$$\mu\left(f^{-1}\left(V \setminus \bigcup_{s \in \mathbb{N}} U'_s\right)\right) = 0,$$

поэтому $f^{-1}(V) \in Af(G, \mu)$. Для локально компактной группы H любая лево(право)-инвариантная неотрицательная мера λ на H является регулярной, т.е. для любого открытого подмножества $V \subset H$ выполнено $\lambda(V) = \sup\{\lambda(F) : F \text{ компактно и } F \subset V\}$ и для любого $A \in Af(H, \lambda)$ с $\lambda(A) < \infty$ выполнено $\lambda(A) = \inf\{\lambda(V) : V \text{ открыто и } V \supset A\}$ (см. [4, теорема 2.7.14] и [2, § 11.22, § 11.23, § 15]). Отсюда следует, что автоморфизм f μ -измерим.

2) Пусть G' – плотная подгруппа в G , причем G' имеет семейство K однопараметрических подгрупп мощности $\text{card}(K) = c$ (μ и G' можно так выбрать). Говорят, что для топологической группы H ее подпространство X *топологически порождает* H , если в H не существует замкнутой подгруппы, содержащей X . Пусть группа F порождена множеством X . Тогда F называется *свободной группой со свободным базисом* X , если каждое соотношение

$$\prod_{i=1}^m x_i^{\varepsilon_i} = 1_F$$

может быть приведено к 1_F последовательным сокращением пар вида $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$, где $x_i \in X$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $m \in \mathbb{N}$, а 1_F – единичный элемент в F . Единственная топологическая группа F со свойствами (F1)–(F3) называется *свободной топологической группой, порожденной топологическим пространством* X , где

(F1) X – подпространство в F ;

(F2) X топологически порождает F ;

(F3) для любого непрерывного отображения $\varphi: X \rightarrow G$ в топологическую группу G существует непрерывный гомоморфизм $\Phi: F \rightarrow G$ такой, что $\varphi(x) = \Phi(x)$ для любых $x \in X$ [9].

Каждая топологическая группа является также равномерным пространством, и существует его пополнение (см. [3, § 8.1.17, теорема 8.3.12]), являющееся полной топологической группой, которая называется *свободной полной топологической группой*. Пусть B – наименьшая замкнутая подгруппа в F , содержащая все элементы вида $aba^{-1}b^{-1}$ для любых $a, b \in F$. Тогда факторгруппа F/B называется *свободной (полной) абелевой группой*.

Предположим также, что существует окрестность $W \ni e$ в G такая, что $K \cap W$ плотно в W . Например, для группы Банаха–Ли над $\mathbf{L} = \mathbb{R}$ или неархимедовым локальным полем $\mathbf{L}$ можно взять K и задать прямое (декартово) произведение (см. [2, § 2.3])

$$\left(\prod_{j=1}^{\infty} g_j^{\mathbf{L}}\right) \times \prod_{Y \in K} Y,$$

где $g^{\mathbf{L}}$ – абстрактная свободная однопараметрическая топологическая абелева группа, порожденная элементом g . Таким образом, $g^{\mathbf{L}}$ равна F/B_1 с порождающим топологическим пространством $X = \{g^a := (g, a) : a \in \mathbf{L}\} \subset \{g\} \times \mathbf{L}$, причем $B_1 \supset B$ и B_1 также содержит все элементы вида $g^{a+b}g^{-a}g^{-b}$, т.е. в F/B_1 выполняется тождество $g^{a+b} = g^a g^b$ для любых $a, b \in \mathbf{L}$ (в общем случае она может не иметь никакого отношения к однопараметрическим подгруппам в исходной группе G).

В случае группы диффеоморфизмов $G := \text{Diff}^t(M)$ класса гладкости C^t с $1 \leq t \leq \infty$ соответствующего локально компактного многообразия M над $\mathbf{L} := \mathbb{R}$ или неархимедовым локальным полем $\mathbf{L}$ снабдим $\text{Diff}^t(M)$ компактно открытой топологией [10]–[12]. Можно аналогично рассмотреть не локально компактные сепарабельные банаховы многообразия M и снабдить сепарабельные подгруппы полных групп диффеоморфизмов соответствующими топологиями (см. те же работы). Выберем

$$W := \left\{ g \in G : \rho_U^l(g, \text{id}) := \sum_{i,j \in E} \|(g_{i,j} - \text{id}_{i,j})\|_{C^l(U_{i,j}, Y)} < \varepsilon \right\},$$

где $Y = \mathbf{L}^m = T_x M$, $g_{i,j} := \varphi_i \circ g \circ \varphi_j^{-1}$ под знаком суммы заданы на $U_{i,j} \subset Y$ пересечении областей определения $g_{i,j} \subset \varphi_j[U \cap (\bigcup_{s \in E} \varphi_s(U_s))]$, (U_j, φ_j) – карты атласа многообразия M , U_j открыты в M , а $\varphi_j : U_j \rightarrow \varphi_j(U_j) \subset Y$ – диффеоморфизмы, $U \subset \bigcup_{j \in E} U_j$, $\text{card}(E) < \aleph_0$, $0 < \varepsilon < 1$, $l = t$ при $t < \infty$, $l \in \mathbb{N}$ при $t = \infty$. Используя формулу Тейлора, теорему Стоуна–Вейерштрасса и локально конечное C^∞ -разбиение единицы в многообразии $C^\infty(M, M)$, состоящем из C^∞ -отображений $f : M \rightarrow M$, для любого $\delta > 0$ и $h \in W$ найдем в силу результатов работ [13], [14], [10] однопараметрическую подгруппу $\{f^b : b\}$ либо с $b \in \mathbf{T}$, либо с $b \in \mathbf{L}$ ($\mathbf{L} = \mathbb{R}$ или $\mathbf{L}$ – локальное поле), либо с $b \in B(\mathbf{L}, 0, 1)$ в шаре единичного радиуса, содержащем 0 локального поля, причем $f \in W \cap G' \cap \text{Diff}^\infty(M)$, так что $\rho_U^l(f, g) < \delta$, так как $\text{Diff}^t(M)$ является окрестностью тождественного отображения $\text{id}(x) = x$ в $C^t(M, M)$, где $f = f^{b_0}$ для соответствующего значения $b = b_0$. Это означает, что семейство K плотно в W в случае таких групп диффеоморфизмов. Для сепарабельной не локально компактной группы Банаха–Ли G существование K и W с $K \cap W = W$ хорошо известно [15].

Поскольку G сепарабельна и паракомпактна, существует локально конечное покрытие $\{g_j W_j : j \in \mathbb{N}, g_j \in G'\}$ группы G , где W_j открыты и $e \in W_j \subset W$ [15], [3]. Построим алгебраическую группу S всех отображений f из $\mathbb{N}$ в H с поточечным умножением $(f_1 f_2)(n) = f_1(n) f_2(n)$ для любых $n \in \mathbb{N}$, где H – факторгруппа F/E свободной полной топологической группы F , порожденной топологическим пространством

$$X = \left(\prod_{j=1}^{\infty} g_j^{\mathbf{L}} \right) \times \prod_{Y \in K} Y,$$

а E – наименьшая замкнутая подгруппа в F , содержащая все элементы вида $g_j^{a+b} g_j^{-a} g_j^{-b}$, $g_j^a g_j^b g_j^{-a} g_j^{-b}$, $Y^{a+b} Y^{-a} Y^{-b}$ и $Y^a Y^b Y^{-a} Y^{-b}$ для любых $j \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbf{L}$ и $Y \in K$. Это означает, что имеется вложение всех $g_j^{\mathbf{L}}$ и каждой однопараметрической подгруппы из K в H . Тогда для любого $g \in \text{Diff}^t(M)$ существует последовательность $\{h_k := g_{j_k} f_k : k \in \mathbb{N}, f_k^b \in K\}$ с $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = g$ (это же верно для групп Банаха–Ли G). Существование μ и G' доказано в [16], [10], [11], [17]. Тогда в случае групп Банаха–Ли и групп диффеоморфизмов существует факторное отображение q соответствующей группы S на группу G [9]. Снабдим S слабейшей топологией и соответствующей равномерностью, при которой q непрерывно и S является $T_1 \cap T_{3,5}$ -пространством [3].

Каждая однопараметрическая подгруппа $\langle g^b : b \rangle$ замкнута в G' и G . Поэтому существует (непрерывная) ретракция $\eta: G \rightarrow \langle g^b : b \rangle$ [3], т.е. $\eta \circ \eta = \eta$ и $\eta|_{\langle g^b : b \rangle} = \text{id}$; конечно, в общем случае η необязательно является групповым гомоморфизмом. Это порождает меру $\nu_{\langle g^b \rangle}(A) := \mu(\eta^{-1}(A))$, где $A \in Bf(\langle g^b : b \rangle)$. Благодаря квазиинвариантности μ на G относительно G' существует функция $h: G \rightarrow [0, \infty)$ такая, что $\nu_{\langle g^b : b \rangle}(dx) = h(x) \lambda(dx)$, где λ – мера Хаара на локально компактной группе $\langle g^b : b \rangle$ и $h \in L^1(\langle g^b : b \rangle; \lambda, \mathbb{C})$ [5]. Аналогично части 1) для каждой однопараметрической подгруппы $\langle g^b : b \rangle$ можно построить семейства $G_{i,j}$ компактно порожденных подгрупп G_C , где $g = g_i \in K, i \in \mathbb{R}, \nu_{\langle g^b : b \rangle}(G_C) = 0$ и $G_{C_1} \cap G_{C_2} = \{e_i\}$ для любых $G_{C_1} \neq G_{C_2} \in G_{i,j}$. После этого построим автоморфизмы подгрупп $G_0 \subset G$, удовлетворяющих условиям i)–iv) с $X \in K$ и g_j^L вместо T_i . Повторяя рассуждения с леммой Куратовского–Порна, получим автоморфизм $f \in \text{Aut}(G)$ с $\beta = \text{id}$ и $G_0 = G$ (см. также [18]). Для любых i и любых U , открытых в $\langle g_i^b : b \rangle$, выполняется условие $f^{-1}(\eta^{-1}(U)) \in Af(G, \mu)$. Пространство G имеет счетную базу топологии, а мера μ радонова и регулярна, G' плотно в G . Следовательно, автоморфизм f μ -измерим, но разрывен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bichteler K. On the existence of noncontinuous irreducible representations of a locally compact group // *Invent. Math.* 1968. V. 6. P. 159–162.
- [2] Хьюитт Э., Росс К. А. Абстрактный гармонический анализ. М.: Наука, 1975.
- [3] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [4] Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
- [5] Fell J. M. G., Doran R. S. Representations of $\ast$ -Algebras, Locally Compact Groups, and Banach $\ast$ -Algebraic Bundles. Boston: Acad. Press, 1988.
- [6] Dalecky Yu. L., Fomin S. V. Measures and Differential Equations in Infinite-Dimensional Space. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991.
- [7] Куратовский К. Топология. М.: Мир, 1966, 1969.
- [8] Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1980.
- [9] Марков А. А. О свободных топологических группах // *Изв. АН СССР*. 1945. Т. 9. № 1. С. 3–64.
- [10] Людковский С. В. Меры на группах диффеоморфизмов неархимедовых банаховых многообразий // *УМН*. 1996. Т. 51. № 2. С. 169–170.
- [11] Людковский С. В. Меры на группах диффеоморфизмов неархимедовых многообразий, представление групп и их применения // *ТМФ*. 1999. Т. 119. № 3. С. 381–396.
- [12] Прессли Э., Сигал Г. Группы петель. М.: Мир, 1990.
- [13] Araujo J., Schikhof W. H. The Weierstrass–Stone approximation theorem for p -adic C^n -functions // *Ann. Math. Blaise Pascal*. 1994. V. 1. № 1. P. 61–74.
- [14] Ebin D. G., Marsden J. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid // *Ann. Math. (2)*. 1970. V. 92. P. 102–163.
- [15] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1976.
- [16] Далецкий Ю. Л., Шнирельман Я. И. Диффузия и квазиинвариантные меры на бесконечномерных группах // *Функцион. анализ и его прилож.* 1969. Т. 3. С. 156–158.
- [17] Шавгулидзе Е. Т. Об одной мере, квазиинвариантной относительно действия группы диффеоморфизмов конечномерного многообразия // *Докл. АН СССР*. 1988. Т. 303. С. 811–814.
- [18] Людковский С. В. Измеримость представлений локально компактных групп // *Матем. сб.* 1995. Т. 186. № 2. С. 83–92.