Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О конечности группы Брауэра арифметической схемы, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 1, 136–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:56:48

О конечности группы Брауэра арифметической схемы

С. Г. Танкеев

Доказана гипотеза М. Артина о конечности группы Брауэра арифметической модели КЗ поверхности над числовым полем k . Показано, что группа Брауэра арифметической модели поверхности Энриквеса над достаточно большим числовым полем является 2-группой. Почти для всех простых чисел l доказана тривиальность l -примарной компоненты группы Брауэра арифметической модели гладкого проективного односвязного многообразия Калаби–Яо V над числовым полем k при условии, что $V(k) \neq \emptyset$.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm9240

Введение. Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Обозначим через A кольцо целых поля k . Предположим, что существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi : X \rightarrow \operatorname{Spec} A$, где X – регулярная схема, общий схемный слой π изоморфен V (мы называем $\pi : X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ *арифметической моделью* V).

М. Артин высказал гипотезу о том, что группа Брауэра $\operatorname{Br}(X)$ конечна [1; гл. IV, § 2, вопрос 2.19]. Хорошо известно, например, что группа $\operatorname{Br}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Br}(\operatorname{Spec} A)$ конечна.

Связь гипотезы Тэйта для дивизоров [2] с вопросами конечности группы Брауэра обсуждается в работах [3], [4].

Если V – КЗ поверхность, то по теореме Скоробогатова–Зархина группа $\operatorname{Br}'(V)/\operatorname{Im}[\operatorname{Br}(k) \rightarrow \operatorname{Br}'(V)]$ конечна [5; теорема 1.2]. Мы используем этот результат и технику, развитую в [3], [6], для доказательства конечности коhomологической группы Брауэра $\operatorname{Br}'(X)$ (теорема 1.1).

Напомним, что поверхность Энриквеса характеризуется как гладкая проективная поверхность с $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$, $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$, $(\Omega_V^2)^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_V$.

Если V – поверхность Энриквеса, $V(k) \neq \emptyset$ и $\operatorname{NS}(V) = \operatorname{NS}(V \otimes \bar{k})$, то доказано, что группа

$$\operatorname{Br}'(X)(\operatorname{non} - 2) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{l \neq 2} \operatorname{Br}'(X)(l)$$

тривиальна (теорема 2.1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00132).

По определению, *многообразие Калаби–Яо размерности d над числовым полем k* – это гладкое проективное k -многообразие с тривиальным каноническим классом и нулевыми числами Ходжа $h^{i,0}$ для $0 < i < d$. Например, многообразие Калаби–Яо размерности 1 является эллиптической кривой, а поверхность Калаби–Яо – это КЗ поверхность. Если V односвязно и $V(k) \neq \emptyset$, то группа $\mathrm{Br}'(X)(l)$ тривиальна почти для всех простых чисел l (следствие 2.4).

Напомним, что $\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(X)$, где $\mathrm{Br}(X)$ классифицирует пучки алгебр Адзумаи на X по модулю подобия.

Если $\mathcal{F}$ – пучок на $X_{\text{ét}}$, то мы обозначаем $H^q(X_{\text{ét}}, \mathcal{F})$ просто через $H^q(X, \mathcal{F})$.

Автор благодарит рецензента, предложившего очень интересные и полезные идеи исключения условия $V(k) \neq \emptyset$ и условия приведенности схемных слоев арифметической модели в первоначальной версии теоремы 1.1.

1. О группе Брауэра арифметической модели КЗ поверхности.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть V – гладкая проективная КЗ поверхность над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Предположим, что существует собственный плоский морфизм регулярных схем $\pi : X \rightarrow \mathrm{Spec} A$, где A – кольцо целых поля k , общий схемный слой π изоморфен V . Тогда когомологическая группа Брауэра $\mathrm{Br}'(X)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\kappa(y)$ – поле вычетов точки $y \in X$, $i_y : \mathrm{Spec} \kappa(y) \rightarrow X$ – каноническое вложение,

$$\mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}} = \bigoplus_{\substack{y \in X \setminus V \\ \mathrm{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z}$$

– пучок вертикальных дивизоров Картье.

Существует точная последовательность этальных пучков

$$0 \rightarrow G_{m,X} \rightarrow h_* G_{m,V} \rightarrow \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}} \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

где $h : V \rightarrow X$ – вложение общего схемного слоя π [7; последняя формула на с. 637]. Имеем

$$\mathrm{Div}_X = \bigoplus_{\substack{y \in X \\ \mathrm{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z} = \left(\bigoplus_{\substack{y \in V \\ \mathrm{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z} \right) \oplus \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}.$$

С другой стороны, $H^1(X, \mathrm{Div}_X) = 0$ [1; гл. III, § 2, пример 2.22]. Следовательно, $H^1(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}) = 0$. Таким образом, (1.1) дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(X, G_m) &\rightarrow H^2(X, h_* G_{m,V}) \rightarrow H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}) \\ &\rightarrow H^3(X, G_m) \rightarrow H^3(X, h_* G_{m,V}) \rightarrow H^3(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q h_* G_{m,V}) \implies H^{p+q}(V, G_{m,V})$$

дает точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0},$$

где $E_1^2 = \text{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ [1; приложение В]. Следовательно, имеется точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, h_* G_{m,V}) \rightarrow H^1(V, G_m) \rightarrow H^0(X, R^1 h_* G_{m,V}) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(X, h_* G_{m,V}) \\ \rightarrow \text{Ker}[H^2(V, G_m) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})] \rightarrow H^1(X, R^1 h_* G_{m,V}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

С другой стороны, $R^1 h_* G_{m,V} = 0$ в силу аргументов п. (b) доказательства леммы 4.4.1 в [7]. Поэтому (1.3) дает изоморфизм

$$H^2(X, h_* G_{m,V}) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})],$$

и (1.2) дает точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Br}'(X) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})] \rightarrow H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}). \quad (1.4)$$

Обозначим через $\overline{\kappa(v)}$ алгебраическое замыкание поля вычетов $\kappa(v)$ неархимедовой точки v поля k . Структурный морфизм $V \rightarrow \text{Spec } k$ индуцирует каноническое отображение $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)$. С другой стороны, существует каноническая точная последовательность [1; гл. III, § 3, пример 2.22, (a)]:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(A) \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \bigoplus_{v \text{ неархимедова}} \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \rightarrow H^3(\text{Spec } A, G_m) \rightarrow H^3(\text{Spec } k, G_m). \end{aligned}$$

В силу глобальной теории полей классов имеется точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \left[\bigoplus_{v \text{ неархимедова}} \text{Br}(k_v) \right] \oplus \left[\bigoplus_{v \text{ архимедова}} \text{Br}(k_v) \right] \\ \xrightarrow{\sum_v x_v \mapsto \sum_v \text{inv}_v(x_v)} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где k_v – пополнение поля k относительно точки v и $\text{inv}_v: \text{Br}(k_v) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ – локальный инвариант [8; гл. VI, § 1; гл. VII, § 10].

Рассмотрим каноническую проекцию

$$\text{pr}_{\text{Arch}}: \left[\bigoplus_{v \text{ неархимедова}} \text{Br}(k_v) \right] \oplus \left[\bigoplus_{v \text{ архимедова}} \text{Br}(k_v) \right] \rightarrow \left[\bigoplus_{v \text{ архимедова}} \text{Br}(k_v) \right],$$

и пусть

$$\text{Br}(k)^{\text{non-Arch}} = \text{Br}(k) \cap \text{Ker}(\text{pr}_{\text{Arch}}).$$

Поскольку $\left[\bigoplus_{v \text{ архимедова}} \text{Br}(k_v) \right]$ – конечная группа, мы видим, что $\text{Br}(k)^{\text{non-Arch}} \hookrightarrow \text{Br}(k)$ – подгруппа конечного индекса и существует каноническое вложение

$$\text{Br}(k)^{\text{non-Arch}} \hookrightarrow \left[\bigoplus_{v \text{ неархимедова}} \text{Br}(k_v) \right]. \quad (1.5)$$

Используя существование коммутативных диаграмм [1; гл. III, § 3, пример 2.22, (f)] для всех неархимедовых точек v :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k_v) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^2(\mathrm{Spec} k, G_m) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \end{array}$$

перепишем (1.5) в виде

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}} \rightarrow \bigoplus_{\substack{v \in \mathrm{Spec} A \\ \mathrm{codim}_{\mathrm{Spec} A}(v)=1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \quad (1.6)$$

Рассмотрим каноническое вложение $i_v: \mathrm{Spec} \kappa(v) \hookrightarrow \mathrm{Spec} A$. Спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Spec} A, R^q i_{v*} \mathbb{Z}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z})$ дает точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1},$$

где $E_1^2 = \mathrm{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ [1; приложение B]; следовательно, мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^1(\mathrm{Spec} A, i_{v*} \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \\ &\rightarrow H^0(\mathrm{Spec} A, R^1 i_{v*} \mathbb{Z}) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(\mathrm{Spec} A, i_{v*} \mathbb{Z}) \\ &\rightarrow \mathrm{Ker}[H^2(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(\mathrm{Spec} A, R^2 i_{v*} \mathbb{Z})] \rightarrow H^1(\mathrm{Spec} A, R^1 i_{v*} \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Хорошо известно, что $R^q i_{v*} \mathbb{Z} = 0$ для всех $q > 0$ [1; гл. III, § 2, пример 2.22, (a)], поэтому (1.7) дает изоморфизм

$$H^2(\mathrm{Spec} A, i_{v*} \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z});$$

с другой стороны, $H^2(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ [1; гл. III, § 2, пример 2.22]. Следовательно,

$$H^2(\mathrm{Spec} A, \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\substack{v \in \mathrm{Spec} A \\ \mathrm{codim}_{\mathrm{Spec} A}(v)=1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Поэтому (1.6) принимает вид

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}} \rightarrow H^2(\mathrm{Spec} A, \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}). \quad (1.8)$$

С другой стороны, можно определить канонический морфизм

$$\pi^*: H^*(\mathrm{Spec} A, \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}) \rightarrow H^*(X, \pi^*(\mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A})),$$

используя резольвенту Годемана [1; гл. III, § 1, замечание 1.20, (c)]

$$0 \rightarrow \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathrm{Spec} A, \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathrm{Spec} A, \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}) \rightarrow \cdots,$$

точность функтора π^* на категории пучков для этальной топологии [1; гл. II, § 2, предложение 2.6; начало § 3] и общую конструкцию отображения

$$\pi^*: H^*(\mathrm{Spec} A, \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}) \rightarrow H^*(X, \pi^*(\mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}))$$

по Годеману [9; гл. II, § 4.16] (для построения этого морфизма, как заметил рецензент, не обязательно прибегать к резольвенте Годемана; для любого пучка $\mathcal{F}$ имеется канонический морфизм $\mathcal{F} \rightarrow R\pi_*\pi^*(\mathcal{F})$ в производной категории этальных пучков на $\mathrm{Spec} A$, который дает отображение $H^*(\mathrm{Spec} A, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathrm{Spec} A, R\pi_*\pi^*(\mathcal{F})) = H^*(X, \pi^*(\mathcal{F}))$).

Каноническое вложение $\pi^*(\mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}) \hookrightarrow \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}$ дает каноническое отображение

$$H^2(X, \pi^*(\mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A})) \rightarrow H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}).$$

Следовательно, имеются канонические морфизмы

$$\varphi: \mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Br}'(V), \quad (1.9)$$

$$H^2(\mathrm{Spec} A, \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}) \rightarrow H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}). \quad (1.10)$$

Пусть $B = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2h_*G_{m,V})]$. Очевидно, что (1.4), (1.8)–(1.10) дают коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}'(X) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}) \\ & & \uparrow & & \uparrow \varphi & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}} \cap \varphi^{-1}(B) & \longrightarrow & H^2(\mathrm{Spec} A, \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}) & & \end{array} \quad (1.11)$$

С другой стороны, существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \varphi(\mathrm{Br}(k))/\varphi(\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}) \rightarrow \mathrm{Br}'(V)/\varphi(\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}) \rightarrow \mathrm{Br}'(V)/\varphi(\mathrm{Br}(k)) \rightarrow 0$$

с конечной группой $\varphi(\mathrm{Br}(k))/\varphi(\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}})$ (так как группа $\mathrm{Br}(k)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}$ конечная). Поскольку группа $\mathrm{Br}'(V)/\varphi(\mathrm{Br}(k))$ конечная по теореме Скоробогатов–Зархина [5; теорема 1.2], мы видим, что группа $\mathrm{Br}'(V)/\varphi(\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}})$ конечная. Следовательно, группа

$$B/[\varphi(\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}) \cap B] = \mathrm{Coker}[\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}} \cap \varphi^{-1}(B) \xrightarrow{\varphi} B]$$

конечная. Поэтому достаточно показать, что пересечение группы $\mathrm{Br}'(X)$ с образом морфизма групп $\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}} \cap \varphi^{-1}(B) \xrightarrow{\varphi} B$ конечно. В силу коммутативности диаграммы (1.11) достаточно доказать конечность ядра канонического отображения $H^2(\mathrm{Spec} A, \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}) \rightarrow H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})$.

Очевидно, что ядро отображения $H^2(\mathrm{Spec} A, \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}) \rightarrow H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})$ является прямой суммой по всем простым идеалам v кольца A ядер отображений

$$\pi^*: H^2(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_D H^2(\mathrm{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z}), \quad (1.12)$$

которые также можно записать в виде

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_D \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(D)^s/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Здесь D пробегает неприводимые компоненты слоя морфизма $X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ над точкой v , поле $\kappa(D)^s$ является сепарабельным замыканием поля $\kappa(D)$ рациональных функций на D .

Доказательство конечности ядра отображения $H^2(\operatorname{Spec} A, \operatorname{Div}_{\operatorname{Spec} A}) \rightarrow H^2(X, \operatorname{Div}_X^{\operatorname{vert}})$ следует по предложенному рецензентом пути.

Пусть κ_D – целое замыкание $\kappa(v)$ в поле $\kappa(D)$. Тогда $\kappa(v) \subset \kappa_D$ – такое расширение конечных полей, что D является геометрически целым над κ_D . Мы имеем композицию канонических морфизмов полей

$$\kappa(D) = \kappa_D(D) \leftarrow \kappa_D \leftarrow \kappa(v),$$

индуцирующую композицию отображений

$$H^2(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\operatorname{Spec} \kappa_D, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\operatorname{Spec} \kappa_D(D), \mathbb{Z}) = H^2(\operatorname{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z}).$$

Очевидно, что композиция

$$H^2(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} \bigoplus_D H^2(\operatorname{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\operatorname{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z}) \quad (1.13)$$

отображения π^* в (1.12) и канонической проекции

$$\bigoplus_D H^2(\operatorname{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\operatorname{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z})$$

является композицией канонических отображений

$$\begin{aligned} H^2(\operatorname{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) &\rightarrow H^2(\operatorname{Spec} \kappa_D, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\operatorname{Spec} \kappa_D(D), \mathbb{Z}) = H^2(\operatorname{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{x \mapsto \operatorname{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D) \cdot x} H^2(\operatorname{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z}), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $\operatorname{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D)$ – кратность подмногообразия D в слое $X_v = \pi^{-1}(v)$.

Пусть $\mathbb{F}_q$ – конечное поле порядка q и пусть $W \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$ – геометрически неприводимое проективное подмногообразие размерности r и степени d . Хорошо известный результат Ленга и Вейля [10; теорема 1] показывает, что

$$|\operatorname{Card}(W(\mathbb{F}_q)) - q^r| \leq (d-1)(d-2)q^{r-1/2} + c(n, d, r)q^{r-1}$$

для константы $c(n, d, r) > 0$, зависящей только от n , d и r .

В силу оценки Ленга–Вейля и леммы Гензеля многообразие V имеет точки почти во всех пополнениях числового поля k . Другими словами, имеется такое конечное множество S простых идеалов, что для всех $v \notin S$ морфизм $X \rightarrow \operatorname{Spec} A$, ограниченный на спектр локального кольца $\mathcal{O}_v$, имеет сечение $\theta: \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v \rightarrow X \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$. В силу следствия 2.2 в [3], точка $\theta(v)$ является регулярной точкой схемного слоя $\pi^{-1}(v)$. Поэтому $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(v), \theta(v)}$ – регулярное локальное кольцо и слой $\pi^{-1}(v)$ аналитически неприводим в точке $\theta(v)$ [11; гл. 11, замечание 1 к предложению 11.24]; в частности, $\theta(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_v)$ пересекает *одну* неприводимую компоненту схемного слоя $\pi^{-1}(v)$ (то, что сечение на регулярной модели пересекает в точности одну неприводимую компоненту кратности 1 слоя, доказано также в [12; лемма 1.1, b]). Поэтому

любой вертикальный дивизор Картье D с носителем в слое $\pi^{-1}(v)$ может быть единственным образом записан в виде

$$D = n_0 \cdot \pi^{-1}(v) + \sum_i n_i \cdot D_i,$$

где $n_j \in \mathbb{Z}$ и D_i – такие неприводимые компоненты слоя $\pi^{-1}(v)$, что выполнено $D_i \cap \theta(\text{Spec } \mathcal{O}_v) = \emptyset$. Следовательно, получаем разложение пучков

$$\begin{aligned} \text{Div}_{X \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } \mathcal{O}_v}^{\text{vert}} \\ = \pi^*(\text{Div}_{\text{Spec } \mathcal{O}_v}) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{y \in X \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } \mathcal{O}_v \setminus V, \\ \overline{\{y\}} \cap \theta(\text{Spec } \mathcal{O}_v) = \emptyset}} \bigoplus_{\text{codim}_{X \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } \mathcal{O}_v}(y)=1} i_{y*} \mathbb{Z} \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Соотношение $\pi \circ \theta = \text{id}_{\text{Spec } \mathcal{O}_v}$ показывает, что композиция

$$\begin{aligned} H^*(\text{Spec } \mathcal{O}_v, \text{Div}_{\text{Spec } \mathcal{O}_v}) &\xrightarrow{\pi^*} H^*(X \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } \mathcal{O}_v, \pi^*(\text{Div}_{\text{Spec } \mathcal{O}_v})) \\ &\xrightarrow{\theta^*} H^*(\text{Spec } \mathcal{O}_v, \text{Div}_{\text{Spec } \mathcal{O}_v}) \end{aligned}$$

является тождественным отображением. Поэтому мы получаем вложение

$$H^2(\text{Spec } \mathcal{O}_v, \text{Div}_{\text{Spec } \mathcal{O}_v}) \xhookrightarrow{\pi^*} H^2(X \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } \mathcal{O}_v, \pi^*(\text{Div}_{\text{Spec } \mathcal{O}_v})).$$

С другой стороны, разложение (1.15) дает вложение

$$H^2(X \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } \mathcal{O}_v, \pi^*(\text{Div}_{\text{Spec } \mathcal{O}_v})) \hookrightarrow H^2(X \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } \mathcal{O}_v, \text{Div}_{X \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } \mathcal{O}_v}^{\text{vert}}).$$

Следовательно, для $v \notin S$ ядро отображения (1.12) тривиально.

Остается доказать, что для $v \in S$ ядро композиции (1.13) конечно.

Для начала заметим, что отображение $H^2(\text{Spec } \kappa_D, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\text{Spec } \kappa(D), \mathbb{Z})$ в композиции (1.14) инъективно. Действительно, это отображение совпадает с отображением

$$H^1(\text{Gal}(\overline{\kappa_D}/\kappa_D), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\text{Gal}(\kappa(D)^s/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Оно инъективно, потому что $\kappa(D)$ и любое алгебраическое замыкание поля κ_D линейно разделены, так что имеется канонический изоморфизм [13; гл. V, § 10, п. 4, теорема 1]

$$\text{Gal}(\overline{\kappa_D}/\kappa_D) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(\overline{\kappa_D}(D)/\kappa(D));$$

остается использовать каноническую последовательность инфляции – ограничения [8; гл. IV, § 5, предложение 5.1]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(\overline{\kappa_D}(D)/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\xrightarrow{\text{inf}} H^1(\text{Gal}(\kappa(D)^s/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{\text{res}} H^1(\text{Gal}(\kappa(D)^s/\overline{\kappa_D}(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно доказать конечность ядра композиции отображений

$$H^2(\text{Spec } \kappa(v), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\text{Spec } \kappa_D, \mathbb{Z}) \xrightarrow{x \mapsto \text{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D) \cdot x} H^2(\text{Spec } \kappa_D, \mathbb{Z}). \quad (1.16)$$

Пусть $d = [\kappa_D : \kappa(v)]$. Поскольку композиция ограничения и коограничения является умножением на d , то мы видим, что ядро композиции (1.16) содержится в ядре умножения на $\text{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D) \cdot d: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, которое, очевидно, конечно. Теорема доказана.

2. О группе Брауэра арифметической модели поверхности Энриквеса или односвязного многообразия Калаби–Яо размерности больше 2.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть V – гладкая проективная поверхность Энриквеса над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, $V(k) \neq \emptyset$ и $\text{NS}(V) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$. Предположим, что существует собственный плоский морфизм регулярных схем $\pi: X \rightarrow \text{Spec } A$, где A – кольцо целых поля k , общий схемный слой π изоморфен V . Тогда группа

$$\text{Br}'(X)(\text{non} - 2) = \bigoplus_{l \neq 2} \text{Br}'(X)(l)$$

тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что топологическая эйлерова характеристика поверхности Энриквеса $V \otimes_k \mathbb{C}$ равна

$$c_2(V \otimes_k \mathbb{C}) = 12(1 - q + p_g) - K_{V \otimes_k \mathbb{C}}^2 = 12 = 2 + \dim_{\mathbb{Q}} H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}).$$

Следовательно,

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) = 10. \quad (2.1)$$

Точная экспоненциальная последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_{V \otimes_k \mathbb{C}} \xrightarrow{f \mapsto e^{2\pi i f}} \mathcal{O}_{V \otimes_k \mathbb{C}}^\times \rightarrow 1$$

дает канонический изоморфизм

$$\text{Pic}(V \otimes_k \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C}) = H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}). \quad (2.2)$$

С другой стороны, существует точная последовательность

$$0 \rightarrow (\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}})^\vee \rightarrow \pi_1(V \otimes \bar{k})^{\text{ab}} \rightarrow \prod_l T_l(\text{Alb}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow 0,$$

где $(\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}})^\vee$ – это группа, двойственная по Понтрягину конечной группе $\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}}$ [1; гл. III, § 4, следствие 4.19]. Равенство $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ показывает, что $\text{Alb}(V \otimes \bar{k}) = 0$. С другой стороны, поверхность Энриквеса $V \otimes \bar{k}$ является фактором односвязной КЗ поверхности по инволюции без неподвижных точек [14; гл. 4, § 5]. В частности, $\pi_1(V \otimes \bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\text{Pic}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}} = \text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

В силу (2.1), (2.2) и принципа Лефшеца выбор k -вложения $\bar{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$ дает коммутативную диаграмму расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_k \mathbb{C} & \longrightarrow & V \otimes \bar{k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \mathbb{C} & \longrightarrow & \text{Spec } \bar{k} \end{array}$$

и изоморфизм

$$\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \xrightarrow{\sim} \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C}) = H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z});$$

следовательно, в силу (2.3) имеется неканонический изоморфизм

$$\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^{10} \oplus [\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}].$$

В частности, для всех простых чисел $l \neq 2$ имеются неканонические изоморфизмы

$$\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})/l \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})/l \mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{10}. \quad (2.4)$$

С другой стороны, по теореме сравнения для этальных и классических когомологий гладкого алгебраического комплексного многообразия с коэффициентами в конечной коммутативной группе [1; гл. III, § 3, теорема 3.12] имеется изоморфизм

$$H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mu_l) \xrightarrow{\sim} H^2([V \otimes_k \mathbb{C}]_{\text{ét}}, \mu_l).$$

Мы будем отождествлять эти группы когомологий. В силу принципа Лефшеца имеется изоморфизм

$$H^2(V \otimes \bar{k}, \mu_l) \xrightarrow{\sim} H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mu_l), \quad (2.5)$$

зависящий от выбора k -вложения $\bar{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Хорошо известно [15; гл. 2, § 14, п. 3, теорема 3], что

$$H_1(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(V \otimes_k \mathbb{C})/[\pi_1(V \otimes_k \mathbb{C}), \pi_1(V \otimes_k \mathbb{C})]$$

– фактор фундаментальной группы по коммутанту. Поскольку $\pi_1(V \otimes_k \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, то $H_1(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, и двойственность Пуанкаре [15; гл. 2, § 17, п. 3, теорема 4] дает

$$H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_1(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

В силу формулы универсальных коэффициентов для когомологий [15; гл. 2, § 15, п. 5] имеем

$$H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = [H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}] \oplus [(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})_{\text{tors}} \otimes_{\mathbb{Z}} H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\text{tors}}].$$

Поэтому для простого числа $l \neq 2$ имеются неканонические изоморфизмы

$$H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mu_l) \xrightarrow{\sim} H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{10}. \quad (2.6)$$

Точная последовательность Куммера пучков в этальной топологии

$$1 \rightarrow \mu_l \rightarrow G_m \xrightarrow{x \mapsto x^l} G_m \rightarrow 1$$

приводит к точной последовательности модулей Галуа

$$0 \rightarrow \mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k})/l \mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k}) \rightarrow H^2(V \otimes \bar{k}, \mu_l) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})_l \rightarrow 1.$$

Поскольку $\mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k}) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$ в рассматриваемом случае, то мы получаем точную последовательность модулей Галуа

$$0 \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})/l \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) \rightarrow H^2(V \otimes \bar{k}, \mu_l) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})_l \rightarrow 1. \quad (2.7)$$

Из (2.4)–(2.7) следует, что

$$\mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})_l = 0 \quad \text{для всех } l \neq 2. \quad (2.8)$$

Рассмотрим спектральную последовательность Хохшильда–Серра

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), H^q(V \otimes \bar{k}, G_m)) \implies H^{p+q}(V, G_m)$$

для бесконечного накрытия Галуа $V \otimes \bar{k} \rightarrow V$ [1; гл. 3, §2, замечание 2.21, (b)]. Поскольку $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ и $\mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}} \oplus \mathbb{Z}^\rho$, она дает точную последовательность [1; приложение В]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}}) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

потому что сечение структурного морфизма $V \rightarrow \mathrm{Spec} k$ дает инъекции $\mathrm{Br}(k) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(V)$,

$$E_2^{3,0} = H^3(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \bar{k}^\times) = H^3(\mathrm{Spec} k, G_m) \hookrightarrow E^3 = H^3(V, G_m)$$

и $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}) = 0$.

Все группы в (2.9) являются группами кручения, поэтому мы получаем точную последовательность l -примарных компонент

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)(l) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}})(l) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}}) &= H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V)_{\mathrm{tors}}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V)_{\mathrm{tors}}) \end{aligned}$$

аннулируется числом $\mathrm{Card} \mathrm{NS}(V)_{\mathrm{tors}} = 2$. Поэтому $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}})(l) = 0$ для $l \neq 2$ и в этом случае из (2.8) следует, что $\mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})(l) = 0$. В итоге (2.10) дает

$$[\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)](l) = 0 \quad \text{для всех } l \neq 2. \quad (2.11)$$

Используя существование k -рациональной точки на V и алгоритм п. 1, получаем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}'(X) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}} \cap B & \longrightarrow & H^2(\mathrm{Spec} A, \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec} A}) & & \end{array}$$

аналогичную диаграмме (1.11). Таким образом, $\mathrm{Br}'(X) \cap \mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}} = 0$ внутри $\mathrm{Br}'(V)$. Следовательно, существует вложение

$$\mathrm{Br}'(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}. \quad (2.12)$$

С другой стороны, существует точная последовательность

$$0 \rightarrow [\mathrm{Br}(k)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}](l) \rightarrow [\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}](l) \rightarrow [\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)](l) \rightarrow 0$$

с конечной группой $\mathrm{Br}(k)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}$. Поэтому из (2.11), (2.12) следует, что имеется каноническое вложение

$$\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non} - 2) \hookrightarrow [\mathrm{Br}(k)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}](\mathrm{non} - 2). \quad (2.13)$$

Очевидно, что $\mathrm{Br}(k)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}$ изоморфна образу канонического отображения

$$\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\mathrm{cl}_k(D) \mapsto \sum_{v \text{ архимедова}} \mathrm{cl}_{k_v}(D \otimes_k k_v)} \bigoplus_{v \text{ архимедова}} \mathrm{Br}(k_v),$$

где $\mathrm{cl}_k(D)$ – класс в $\mathrm{Br}(k)$ центральной простой алгебры D над k и $\mathrm{cl}_{k_v}(D \otimes_k k_v)$ – класс в $\mathrm{Br}(k_v)$ центральной простой алгебры $D \otimes_k k_v$ над k_v [16; гл. IX, § 3]. С другой стороны, $\bigoplus_{v \text{ архимедова}} \mathrm{Br}(k_v)$ является 2-группой, потому что

$$\mathrm{Br}(k_v) \simeq \begin{cases} (1/2)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, & \text{если } k_v = \mathbb{R}; \\ 0, & \text{если } k_v = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Поэтому из (2.13) следует, что $\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non} - 2) = 0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть V – гладкое проективное односвязное многообразие над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, $V(k) \neq \emptyset$ и $\mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$. Предположим, что существует собственный плоский морфизм регулярных схем $\pi : X \rightarrow \mathrm{Spec} A$, где A – кольцо целых поля k , общий схемный слой π изоморфен V .

Если $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$, то l -примарная компонента $\mathrm{Br}'(X)(l)$ тривиальна для любого простого числа $l \neq 2$, не делящего порядок топологической группы Брауэра $H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$.

Если, кроме того, $H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}} = 0$, то

$$\mathrm{Br}'(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(\mathrm{Spec} A) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\max(0, r-1)}$$

(где r – число вещественных точек поля k) или

$\mathrm{Br}'(X)$ содержит $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec} A)$ в качестве подгруппы индекса 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что $H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ совпадает с топологической группой Брауэра $H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathcal{O}_{[V \otimes_k \mathbb{C}]_{\mathrm{cont}}}^\times)$, где $\mathcal{O}_{[V \otimes_k \mathbb{C}]_{\mathrm{cont}}}$ – пучок ростков непрерывных комплекснозначных функций на $V \otimes_k \mathbb{C}$ [17; гл. I, следствие (1.7)].

Поскольку $H^1(V, \mathcal{O}_V) = H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$, то можно использовать модификацию доказательства теоремы 2.1.

Из односвязности V и точности последовательности

$$0 \rightarrow (\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}})^\vee \rightarrow \pi_1(V \otimes \bar{k})^{\mathrm{ab}} \rightarrow \prod_l T_l(\mathrm{Alb}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow 0$$

следует, что

$$\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}} = \mathrm{NS}(V \otimes \mathbb{C})_{\mathrm{tors}} = 0. \quad (2.14)$$

Если простое число l не делит порядок конечной группы $H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$, то в силу формулы универсальных коэффициентов имеем

$$\begin{aligned} H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) &= [H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}] \oplus [(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}} \otimes_{\mathbb{Z}} H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}] \\ &= H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} = \mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \\ &= \mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})/l\mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

В этом случае из (2.14), (2.15), (2.5) и (2.7) следует, что

$$\mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})_l = 0.$$

Значит,

$$\mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})(l) = 0. \quad (2.16)$$

Из (2.10), (2.14) и (2.16) следует, что

$$[\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)](l) = 0. \quad (2.17)$$

Поскольку $\mathrm{Br}(k)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}$ является 2-группой в силу аргументов п. 2.1, для $l \neq 2$ точная последовательность

$$0 \rightarrow [\mathrm{Br}(k)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}](l) \rightarrow [\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}](l) \rightarrow [\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)](l) \rightarrow 0 \quad (2.18)$$

и (2.17) дают

$$[\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}](l) \xrightarrow{\sim} [\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)](l) = 0.$$

Поэтому из (2.12) следует, что $\mathrm{Br}'(X)(l) = 0$.

В итоге

$$\mathrm{Br}'(X) = \bigoplus_{l \mid \mathrm{Card} H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}} \text{ или } l=2} \mathrm{Br}'(X)(l). \quad (2.19)$$

Наконец, если $H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}} = 0$, то в силу (2.12), (2.17)–(2.19) для $l = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Br}'(X) &= \mathrm{Br}'(X)(2) \\ &\hookrightarrow [\mathrm{Br}(k)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{non-Arch}}](2) \\ &= \mathrm{Im} \left[\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\mathrm{cl}_k(D) \mapsto \sum_v \text{архимедова} \mathrm{cl}_{k_v}(D \otimes_k k_v)} \bigoplus_{v \text{ архимедова}} \mathrm{Br}(k_v) \right] \\ &\hookrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Хорошо известно, что $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec} A) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\max(0, r-1)}$ [17; гл. III, предложение (2.4)]. С другой стороны, $\pi: X \rightarrow \mathrm{Spec} A$ индуцирует вложение $\pi^*: \mathrm{Br}(\mathrm{Spec} A) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(X)$. Поэтому из (2.20) следует, что либо $\mathrm{Br}'(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(\mathrm{Spec} A)$, либо $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec} A)$ – подгруппа индекса 2 в $\mathrm{Br}'(X)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\pi: X \rightarrow \mathrm{Spec} A$ – арифметическая модель гладкого проективного односвязного многообразия V над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k: \mathbb{Q}] < \infty$, $V(k) \neq \emptyset$.

Если $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$, то

$$\mathrm{Br}'(X) = \bigoplus_{l \mid \mathrm{Card} H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}} \text{ или } l \mid \mathrm{Card} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})) \text{ или } l=2} \mathrm{Br}'(X)(l).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа Нерона–Севери $\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$ имеет конечное множество образующих, и любая образующая “определена” над конечным расширением, поэтому можно выбрать такое конечное расширение Галуа K/k , что

$$\mathrm{NS}(V \otimes K) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}). \quad (2.21)$$

Группа $\text{Gal}(\bar{k}/K)$ действует тривиально на $\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^\rho \oplus \text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}}$ (неканонический изоморфизм, где $\rho = \text{rank NS}(V \otimes \bar{k})$). Следовательно,

$$\begin{aligned} H^1(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) \\ &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), \mathbb{Z}^\rho) \oplus \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}}) \\ &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}}), \end{aligned} \quad (2.22)$$

потому что $\mathbb{Z}^\rho$ не содержит нетривиальных компактных подгрупп, и в результате мы имеем $\text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), \mathbb{Z}^\rho) = 0$.

Рассмотрим каноническую точную последовательность инфляции – ограничения [8; гл. IV, § 5, предложение 5.1]

$$0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/K)}) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) \xrightarrow{\text{res}} H^1(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k})). \quad (2.23)$$

Из (2.14), (2.21)–(2.23) следует, что

$$H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes K)) = H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k})).$$

Поскольку $H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes K))$ – конечная группа [8; гл. IV, § 6, следствие 2], мы видим, что $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))$ – конечная группа.

С другой стороны, спектральная последовательность Хохшильда–Серра

$$E_2^{p,q} = H^p(\text{Gal}(\bar{k}/k), H^q(V \otimes \bar{k}, G_m)) \implies H^{p+q}(V, G_m)$$

дает точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0},$$

$E_1^2 = \text{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ [1; приложение B]. Поэтому условия $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ дают точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}] \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) \quad (2.24)$$

с конечной группой $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))$. Следовательно, для всех простых чисел l , не делящих порядки конечных групп $H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$ и $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))$, имеем в силу (2.15), (2.5), (2.7) и (2.24)

$$\text{Br}'(V \otimes \bar{k})_l = 0, \quad \text{Br}'(V \otimes \bar{k})(l) = 0, \quad [\text{Br}'(V)/\text{Br}(k)](l) = 0.$$

Поэтому стандартные аргументы дают следующий аналог формулы (2.19):

$$\text{Br}'(X) = \bigoplus_{l \mid \text{Card } H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\text{tors}} \text{ или } l \mid \text{Card } H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) \text{ или } l=2} \text{Br}'(X)(l).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть $\pi: X \rightarrow \text{Спец } A$ – арифметическая модель гладкого проективного односвязного многообразия Калаби–Яо V над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, $V(k) \neq \emptyset$. Тогда группа $\text{Br}'(X)(l)$ тривиальна почти для всех простых чисел l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\dim V > 2$ доказательство следует из теоремы 2.3; если же $\dim V = 2$, то V является КЗ поверхностью, и остается воспользоваться теоремой 1.1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дж. Милн, *Эталные когомологии*, Мир, М., 1983.
- [2] J. Tate, “Algebraic cycles and poles of zeta functions”, *Arithmetical Algebraic Geometry*, Harper & Row, New York, 1965, 93–110.
- [3] С. Г. Танкеев, “О группе Брауэра арифметической схемы. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:5 (2003), 155–176.
- [4] J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov, “Good reduction of the Brauer–Manin obstruction”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365**:2 (2013), 579–590.
- [5] A. N. Skorobogatov, Yu. G. Zarhin, “A finiteness theorem for the Brauer group of Abelian varieties and K3 surfaces”, *J. Algebraic Geometry*, **17**:3 (2008), 481–502.
- [6] С. Г. Танкеев, “О группе Брауэра арифметической схемы”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:2 (2001), 155–186.
- [7] J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov, P. Swinnerton-Dyer, “Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points”, *Invent. Math.*, **134**:3 (1998), 579–650.
- [8] *Алгебраическая теория чисел*, ред. Дж. Касселс, А. Фрелих, Мир, М., 1969.
- [9] Р. Годеман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, М., 1961.
- [10] S. Lang, A. Weil, “Number of points of varieties in finite fields”, *Amer. J. Math.*, **76**:4 (1954), 819–827.
- [11] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, М., 1972.
- [12] A. N. Skorobogatov, “Descent on fibrations over the projective line”, *Amer. J. Math.*, **118**:5 (1996), 905–923.
- [13] Н. Бурбаки, *Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы*, Элементы математики, Наука, М., 1965.
- [14] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Т. 1, 2, Мир, М., 1982.
- [15] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.
- [16] А. Вейль, *Основы теории чисел*, Мир, М., 1972.
- [17] A. Grothendieck, “Le groupe de Brauer. I. Algèbres d’Azumaya et interprétations diverses”, *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, 46–66; “Le groupe de Brauer. II. Théorie cohomologique”, *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, 67–87; “Le groupe de Brauer. III. Exemples et compléments”, *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, 88–188.

С. Г. Танкеев

Владимирский государственный университет

им. А. Г. и Н. Г. Столетовых

E-mail: tankeev@vlsu.ru

Поступило

12.08.2011

Исправленный вариант

28.02.2013