Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гельман, С. Е. Жуковский, Накрывающие отображения пространств компактных подмножеств, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 4, 530–536

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9244>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:18:56

УДК 517.988

Накрывающие отображения пространств компактных подмножеств

Б. Д. Гельман, С. Е. Жуковский

В пространствах компактных подмножеств метрических пространств рассматриваются отображения, порожденные накрывающими отображениями метрических пространств. Получены достаточные условия накрываемости отображений пространств компактов и достаточные условия существования множеств совпадения отображений метрических пространств.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm9244

Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) – метрические пространства, $\Psi: X \rightarrow Y$ – некоторое отображение и задано некоторое $\alpha > 0$. Напомним, что отображение Ψ называется α -накрывающим, если

$$\forall x \in X \quad \forall R \geq 0 \quad B_Y(\Psi(x), R) \subset \Psi(B_X(x, R)).$$

Здесь и далее через $B_X(x, R)$ обозначен замкнутый шар с центром в точке x радиуса R .

Понятие α -накрывания широко используется при изучении нелинейных уравнений. В частности, для уравнения вида $\Psi(x) = \Phi(x)$, где $\Phi: X \rightarrow Y$ – произвольное отображение, которое удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta < \alpha$, достаточные условия существования решения дает теорема Арутюнова о точках совпадения (см. [1]). Условия устойчивости решений этого уравнения были получены в [2]. В [3] результаты из [1] были перенесены на случай локально α -накрывающих отображений. В работах [4]–[6] изучались условно α -накрывающие отображения, причем в [5], [6] развиваемая теория α -накрывающих отображений была применена к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональных уравнений Вольтерра. Связь между α -накрывающими отображениями и существованием обратных отображений была изучена в [7]. В предлагаемой работе понятие α -накрывания используется для изучения следующих вопросов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00382-а, 12-01-00427).

1. Постановка задачи. Пусть $\Psi: X \rightarrow Y$ – непрерывное α -накрывающее отображение. Обозначим через $\mathcal{K}(X)$ множество всех непустых компактных подмножеств X . Известно, что $(\mathcal{K}(X), h_X)$, где h_X – расстояние по Хаусдорфу, является метрическим пространством. Рассмотрим отображение

$$\Psi_{\mathcal{K}}: \mathcal{K}(X) \rightarrow 2^Y, \quad \Psi_{\mathcal{K}}(U) = \{\Psi(x) : x \in U\}.$$

Из непрерывности Ψ следует, что $\Psi_{\mathcal{K}}$ действует из $\mathcal{K}(X)$ в $\mathcal{K}(Y)$.

ВОПРОС 1. Существует ли такое $\gamma > 0$, что $\Psi_{\mathcal{K}}: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ является γ -накрывающим отображением? Если да, то с какой константой γ ?

Пусть дополнительно задано непрерывное отображение $\Phi: X \rightarrow \mathcal{K}(Y)$. Для произвольного $U \subset X$ будем обозначать

$$\Psi(U) = \{\Psi(x) : x \in U\}, \quad \Phi(U) = \{y : y \in \Phi(x), x \in U\}.$$

Будем говорить, что множество $U \subseteq X$ является множеством совпадения отображений Ψ и Φ , если $\Psi(U) = \Phi(U)$. Заметим, что если $X = Y$ и Ψ – тождественное отображение, то это понятие равносильно тому, что $U = \Phi(U)$, т.е. U является неподвижным множеством для отображения Φ .

ВОПРОС 2. При каких условиях существует множество $U \in \mathcal{K}(X)$, являющееся множеством совпадения отображений Ψ и Φ ?

2. Основные результаты. Ответы на предложенные выше вопросы 1, 2 дают следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть пространство X полно, $\Psi: X \rightarrow Y$ непрерывно и является α -накрывающим. Тогда для любого $\gamma < \alpha$ отображение $\Psi_{\mathcal{K}}$ является γ -накрывающим.

ТЕОРЕМА 2. Пусть пространство X полно, и заданы отображения Ψ и Φ , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\Psi: X \rightarrow Y$ непрерывно и является α -накрывающим;
- 2) $\Phi: X \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ является липшицевым с константой $\beta < \alpha$.

Тогда для любых $u_0 \in X$, $V \in \mathcal{K}(Y)$, $\varepsilon > 0$ существует $U \in \mathcal{K}(X)$ такое, что

$$\Psi(U) = \Phi(U), \quad h_X(\{u_0\}, U) \leq \frac{1}{\alpha - \beta - \varepsilon} h_Y(\{\Psi(u_0)\}, \Phi(u_0)).$$

Прежде чем доказывать теоремы 1, 2, приведем следующие вспомогательные утверждения.

3. Вспомогательные утверждения. Прежде всего заметим, что отображение $\Psi: X \rightarrow Y$ является α -накрывающим тогда и только тогда, когда

$$\forall x_0 \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists x \in X: \quad \Psi(x) = y \quad \text{и} \quad \rho_X(x, x_0) \leq \frac{1}{\alpha} \rho_Y(y, \Psi(x_0)).$$

Это утверждение очевидно следует из определения α -накрывающего отображения.

Обозначим через $\mathcal{F}(X)$ множество всех конечных подмножеств пространства X . Очевидно, что $(\mathcal{F}(X), h_X)$ является метрическим пространством и $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$. Сужение отображения $\Psi_{\mathcal{K}}$ на $\mathcal{F}(X)$ будем обозначать через $\Psi_{\mathcal{F}}$. Очевидно, отображение $\Psi_{\mathcal{F}}$ действует из $\mathcal{F}(X)$ в $\mathcal{F}(Y)$.

- УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть даны отображения $\Psi: X \rightarrow Y$, $\Phi: X \rightarrow \mathcal{K}(Y)$. Тогда
- (А) если Ψ является α -накрывающим, то $\Psi_{\mathcal{F}}: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ также является α -накрывающим;
 - (В) если X полно, Ψ непрерывно, то $\Psi_{\mathcal{K}}: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ непрерывно;
 - (С) если Φ удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta \geq 0$, то $\Phi_{\mathcal{K}}$ переводит $\mathcal{K}(X)$ в $\mathcal{K}(Y)$ и удовлетворяет условию Липшица с константой β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (А) Пусть заданы $U_0 \in \mathcal{F}(X)$, $V \in \mathcal{F}(Y)$. Положим

$$r = \alpha^{-1} h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(U_0), V).$$

Покажем, что существует такое $U \in \mathcal{F}(X)$, что

$$\Psi_{\mathcal{F}}(U) = V \quad \text{и} \quad h_X(U_0, U) \leq r.$$

Обозначим элементы множества U_0 через u_0^j , $j = 1, \dots, n$, и положим

$$V_j = \{v \in V : \rho_Y(\Psi(u_0^j), v) \leq \alpha r\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что для любого $j = 1, \dots, n$ множество V_j не пусто, конечно, и $V = \bigcup_{j=1}^n V_j$.

В силу α -накрываемости Ψ для каждого $j = 1, \dots, n$ имеем

$$\forall v \in V_j \quad \exists u(j, v) \in X: \quad \Psi(u(j, v)) = v \quad \text{и} \quad \rho_X(u_0^j, u(j, v)) \leq r.$$

Обозначим

$$U_j = \{u(j, v) : v \in V_j\}, \quad U = \bigcup_{j=1}^n U_j.$$

Из приведенных построений следует, что $\Psi_{\mathcal{F}}(U) = V$. Кроме того, $h_X(\{u_0^j\}, U_j) \leq r$ для любого $j = 1, \dots, n$. Следовательно, $h_X(U_0, U) \leq r$.

(В) Пусть Ψ непрерывно. Выберем произвольное множество $U \in \mathcal{K}(X)$ и последовательность $\{U_j\} \subset \mathcal{K}(X)$, сходящуюся к U при $j \rightarrow \infty$. Докажем, что

$$\Psi_{\mathcal{K}}(U_j) \rightarrow \Psi_{\mathcal{K}}(U) \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty.$$

Сначала покажем, что множество $W = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ вполне ограничено. Для произвольного $\delta > 0$ существует $(\delta 2^{-1})$ -сеть $\tilde{U} \in \mathcal{F}(X)$, $\tilde{U} \subseteq U$, множества U . Отметим, что поскольку $\{U_j\}$ сходится к U , существует число N такое, что

$$h_X(U_j, U) \leq \delta 2^{-1} \quad \text{при} \quad j \geq N.$$

Поэтому

$$h_X(U_j, \tilde{U}) \leq h_X(U_j, U) + h_X(U, \tilde{U}) \leq \delta \quad \text{при} \quad j \geq N.$$

Следовательно, $\tilde{U}$ является конечной δ -сетью множества $\bigcup_{j=N}^{\infty} U_j$. Выберем произвольную δ -сеть $\bar{U} \in \mathcal{F}(X)$ множества $\bigcup_{j=1}^{N-1} U_j$. Очевидно, что множество $\bar{U} \cup \tilde{U} \in \mathcal{F}(X)$ является δ -сетью множества W . Следовательно, W вполне ограничено.

Из полноты X вытекает компактность замыкания W . Следовательно, отображение Ψ равномерно непрерывно на замыкании множества W и на самом W . Поэтому

для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\rho_X(x, u) \leq \delta$ для некоторых $x, u \in W \cup U$, то $\rho_X(\Psi(x), \Psi(u)) \leq \varepsilon$. Выберем номер N такой, что $h_X(U, U_j) \leq \delta$ при любом $j \geq N$. Тогда для любого $y \in \Psi(U_j)$ существуют $x \in U_j$, $u \in U$ такие, что $\Psi(x) = y$ и $\rho_X(x, u) \leq \delta$. Следовательно, $\rho_Y(\Psi(x), \Psi(u)) \leq \varepsilon$. Кроме того, для любого $v \in \Psi(U)$ существуют $u \in U$, $x \in U_j$ такие, что $\Psi(u) = v$ и $\rho_X(x, u) \leq \delta$. Следовательно, $\rho_Y(\Psi(x), \Psi(u)) \leq \varepsilon$. Таким образом,

$$h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(U), \Psi_{\mathcal{K}}(U_j)) \leq \varepsilon \quad \text{для любого } j \geq N.$$

Следовательно, $\Psi_{\mathcal{K}}(U_j) \rightarrow \Psi_{\mathcal{K}}(U)$ при $j \rightarrow \infty$, что доказывает непрерывность $\Psi_{\mathcal{K}}$.

(С) Согласно теореме 1.2.35 из [8] для любого $U \in \mathcal{K}(X)$ имеем $\Phi_{\mathcal{K}}(U) \in \mathcal{K}(Y)$. Покажем теперь, что $\Psi_{\mathcal{K}}$ удовлетворяет неравенству Липшица с константой β . Выберем произвольные $U_1, U_2 \in \mathcal{K}(X)$. Для любого $v_1 \in \Phi_{\mathcal{K}}(U_1)$ существуют $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ такие, что $v_1 \in \Phi(u_1)$, $\rho_X(u_1, u_2) \leq h_X(U_1, U_2)$. Следовательно,

$$h_Y(\Phi(u_1), \Phi(u_2)) \leq \beta h_X(U_1, U_2).$$

Следовательно, существует точка $v_2 = \Phi(u_2)$ такая, что $\rho_Y(v_1, v_2) \leq \beta h_X(U_1, U_2)$. Аналогично доказывается, что для любого $v_2 \in \Phi_{\mathcal{K}}(U_2)$ существует $v_1 \in \Phi_{\mathcal{K}}(U_1)$ такое, что $\rho_Y(v_1, v_2) \leq \beta h_X(U_1, U_2)$. Следовательно,

$$h_Y(\Phi_{\mathcal{K}}(U_1), \Phi_{\mathcal{K}}(U_2)) \leq \beta h_X(U_1, U_2).$$

Утверждение доказано.

Для произвольного $U \in \mathcal{K}(X)$ обозначим

$$B_X(U, r) = \bigcup_{u \in U} B_X(u, r).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть X полно, отображение $\Psi: X \rightarrow Y$ непрерывно и является α -накрывающим, $\tilde{U} \in \mathcal{F}(X)$, $V \in \mathcal{K}(Y)$. Если множество $\Psi_{\mathcal{K}}(\tilde{U})$ образует $\alpha\varepsilon$ -сеть в V , то существует такое $U \in \mathcal{K}(X)$, что

$$\Psi_{\mathcal{K}}(U) = V \quad \text{и} \quad h_X(\tilde{U}, U) \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V_j – последовательность конечных $\alpha\varepsilon 2^{1-j}$ -сетей множества V таких, что $V_1 = \Psi_{\mathcal{K}}(\tilde{U})$ и $V_j \subseteq V_{j+1} \subset V$ для любого $j \in \mathbb{N}$ (существование такой последовательности очевидно следует из компактности множества V). Отметим, что

$$h_Y(V_j, V_{j+1}) \leq \alpha\varepsilon 2^{-j}, \quad h_Y(V_j, V) \leq \alpha\varepsilon 2^{-j} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Построим последовательность множеств $\{U_j\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ такую, что $U_1 = \tilde{U}$,

$$U_j \subseteq U_{j+1}, \quad \Psi_{\mathcal{K}}(U_j) = V_j, \quad h_X(U_j, U_{j+1}) \leq \varepsilon 2^{-j} \quad (3.2)$$

для любого $j \in \mathbb{N}$.

Построение проведем по индукции. Положим $U_1 = \tilde{U}$. Из утверждения 1 (А) следует, что

$$\exists U_2 \in \mathcal{F}(X): \quad \Psi_{\mathcal{K}}(U_2) = V_2, \quad h_X(U_1, U_2) \leq \frac{1}{\alpha} h_Y(V_1, V_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Предположим теперь, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ построены множества $U_j \in \mathcal{F}(X)$, $j = 1, \dots, n$, удовлетворяющие условию (3.2) при любом $j = 1, \dots, n$. Из утверждения 1 (А) следует, что

$$\exists U_{n+1} \in \mathcal{F}(X): \quad \Psi_{\mathcal{F}}(U_{n+1}) = V_{n+1}, \quad h_X(U_n, U_{n+1}) \leq \frac{1}{\alpha} h_Y(V_n, V_{n+1}) \leq \varepsilon 2^{-n}.$$

Этот шаг завершает индуктивное построение искомой последовательности $\{U_j\}$.

Заметим, что последовательность $\{U_j\}$ фундаментальна, поскольку

$$h_X(U_j, U_{j+k}) \leq \sum_{s=0}^{k-1} h_X(U_{j+s}, U_{j+s+1}) \leq \varepsilon 2^{-j} \sum_{s=0}^{k-1} 2^{-s} \leq \varepsilon 2^{1-j}$$

для любых $j, k \in \mathbb{N}$. Кроме того, из полноты (X, ρ_X) вытекает (см. [9; гл. IV, п. 7.5]) полнота $(\mathcal{K}(X), h_X)$. Следовательно, существует множество $U \in \mathcal{K}(X)$ такое, что $U_j \rightarrow U$ при $j \rightarrow \infty$. Кроме того, $V_j \rightarrow V$ при $j \rightarrow \infty$ в силу (3.1). Поэтому из непрерывности Ψ и полноты X согласно пункту (В) утверждения 1 следует, что $\Psi_{\mathcal{K}}(U) = V$. Наконец, из (3.2) получаем

$$h_X(\tilde{U}, U_j) = h_X(U_1, U_j) \leq \sum_{s=1}^{j-1} h_X(U_s, U_{s+1}) \leq \varepsilon \sum_{s=1}^{j-1} 2^{-s} \leq \varepsilon.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $j \rightarrow \infty$, получаем $h(\tilde{U}, U) \leq \varepsilon$. Утверждение доказано.

4. Доказательство теоремы 1. Покажем, что для произвольных $\gamma < \alpha$, $U_0 \in \mathcal{K}(X)$, $V \in \mathcal{K}(Y)$

$$\exists U \in \mathcal{K}(X): \quad \Psi_{\mathcal{K}}(U) = V \quad \text{и} \quad h_X(U_0, U) \leq \frac{1}{\gamma} h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(U_0), V). \quad (4.1)$$

Будем предполагать, что $\Psi_{\mathcal{K}}(U_0) \neq V$ (в противном случае (4.1), очевидно, выполняется).

Положим

$$\varepsilon = \frac{\alpha - \gamma}{4\alpha\gamma} h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(U_0), V).$$

Множество U_0 компактно, отображение Ψ непрерывно на U_0 , следовательно, Ψ равномерно непрерывно на U_0 . Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что для произвольной конечной δ -сети $\tilde{U}_0 \subseteq U_0$ множества U_0 множество $\Psi_{\mathcal{K}}(\tilde{U}_0)$ образует $\alpha\varepsilon$ -сеть множества $\Psi_{\mathcal{K}}(U_0)$. Кроме того, из включения $\Psi_{\mathcal{K}}(\tilde{U}_0) \subseteq \Psi_{\mathcal{K}}(U_0)$ следует неравенство

$$h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(U_0), \Psi_{\mathcal{K}}(\tilde{U}_0)) \leq \alpha\varepsilon.$$

Выберем произвольную $\alpha\varepsilon$ -сеть $\tilde{V} \in \mathcal{F}(Y)$ множества V такую, что $\tilde{V} \subseteq V$. Из утверждения 1 (А) следует, что существует $\tilde{U} \in \mathcal{F}(X)$ такое, что

$$\Psi_{\mathcal{K}}(\tilde{U}) = \tilde{V} \quad \text{и} \quad h_X(\tilde{U}_0, \tilde{U}) \leq \frac{1}{\alpha} h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(\tilde{U}_0), \tilde{V}).$$

Из утверждения 2 вытекает существование $U \in \mathcal{K}(X)$ такого, что $\Psi_{\mathcal{K}}(U) = V$ и $h_X(U, \tilde{U}) \leq \varepsilon$. Следовательно,

$$\begin{aligned} h_X(U_0, U) &\leq h_X(U_0, \tilde{U}_0) + h_X(\tilde{U}_0, \tilde{U}) + h_X(\tilde{U}, U) \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{\alpha} h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(\tilde{U}_0), \tilde{V}) + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon + \frac{1}{\alpha} (h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(\tilde{U}_0), V) + h_Y(V, \tilde{V})) \\ &\leq 2\varepsilon + \frac{1}{\alpha} (h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(\tilde{U}_0), \Psi_{\mathcal{K}}(U_0)) + h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(U_0), V) + \alpha\varepsilon) \\ &\leq 3\varepsilon + \frac{1}{\alpha} (\alpha\varepsilon + h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(U_0), V)) \leq 4\varepsilon + \frac{1}{\alpha} h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(U_0), V) \\ &= \frac{1}{\gamma} h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(U_0), V). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Существование искомого множества U очевидно следует из пунктов (В), (С) утверждения 1, теоремы 1, теоремы о полноте пространства компактных подмножеств полного пространства (см. [9; гл. IV, п. 7.5]) и теоремы 1 из [1].

6. Пример. Приведем пример α -накрывающего отображения Ψ такого, что $\Psi_{\mathcal{K}}$ является γ -накрывающим для любого $\gamma \in [0, \alpha)$ и не является α -накрывающим.

Пусть задана ортогональная нормированная система $e_k \in \ell_2$, $k \in \mathbb{N}$ (здесь ℓ_2 – гильбертово пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x_1^2 + x_2^2 + \dots < \infty$). Положим

$$X = \{\lambda e_k : k \in \mathbb{N}, \lambda \geq 0\}, \quad \rho_X(x, \bar{x}) = \rho_{\ell_2}(x, \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in X.$$

Очевидно, (X, ρ_X) является полным метрическим пространством.

Рассмотрим отображение

$$\Psi: X \rightarrow [0, \infty), \quad \Psi: \lambda e_k \mapsto \lambda.$$

Несложно убедиться в том, что Ψ является 1-накрывающим. Согласно теореме 1 отображение $\Psi_{\mathcal{K}}: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}([0, \infty))$ является γ -накрывающим для любого $\gamma > 0$.

Положим

$$U_0 = \{2^{-k} e_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, \quad V = \{1\}.$$

Несложно проверить, что $U_0 \in \mathcal{K}(X)$ и $V \in \mathcal{K}(Y)$. Выберем произвольное $U \in \mathcal{K}(X)$ такое, что $\Psi_{\mathcal{K}}(U) = V$. Очевидно, что $U \neq \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, поэтому существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $e_N \notin U$. Следовательно,

$$h_X(U_0, U) \geq \rho_X(2^{-N} e_N, U) = \inf_{e_k \in U} \rho_X(2^{-N} e_N, e_k) = \sqrt{1 + 2^{-2N}} > 1.$$

Кроме того, $h(\Psi_{\mathcal{K}}(U_0), V) = 1$. Таким образом, для любого U такого, что $\Psi_{\mathcal{K}}(U) = V$, выполнено

$$h_X(U_0, U) > h_Y(\Psi_{\mathcal{K}}(U_0), V).$$

Следовательно, $\Psi_{\mathcal{K}}$ не является 1-накрывающим.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *ДАН*, **416**:2 (2007), 151–155.
- [2] А. В. Арутюнов, “Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений”, *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 163–169.
- [3] A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk, V. Obukhovskii, “Locally covering maps in metric spaces and coincidence points”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **5**:1 (2009), 105–127.
- [4] B. S. Mordukhovich, B. Wang, “Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **50** (2004), 2653–2680.
- [5] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференц. уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634.
- [6] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations”, *Nonlinear Anal.*, **75**:3 (2012), 1026–1044.
- [7] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “Существование обратных отображений и их свойства”, *Дифференциальные уравнения и топология. II*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **271**, МАИК, М., 2010, 18–28.
- [8] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, УРСС, М., 2005.
- [9] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Физматлит, М., 2006.

Б. Д. Гельман

Воронежский государственный университет

E-mail: gelman@math.vsu.ru

Поступило

02.09.2011

С. Е. Жуковский

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru