Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Артамонов, Оценка показателя экспоненциального убывания операторной полугруппы, связанной с линейным дифференциальным уравнением второго порядка, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 780–783

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9247>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 04:21:08

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Оценка показателя экспоненциального убывания операторной полугруппы, связанной с линейным дифференциальным уравнением второго порядка

Н. В. Артамонов

1. В гильбертовом пространстве $H, (\cdot, \cdot)$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$u''(t) + Du'(t) + Au(t) = 0, \quad (1)$$

где $u(t)$ – определенная на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ оператор-функция со значениями в H . Многие эволюционные уравнения, описывающие малые колебания механических систем, могут быть сведены к (1) в подходящем пространстве (см., например, [1]–[3]), причем оператор A отвечает за потенциальную энергию, а D – оператор трения. Далее будем предполагать, что

УСЛОВИЕ 1. A – самосопряженный, положительно определенный оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(A)$. Обозначим

$$a_0 = \inf_{x \in \mathcal{D}(A), \|x\|=1} (Ax, x).$$

Через H_s обозначим шкалу гильбертовых пространств, построенную по оператору $A^{1/2}$: при $s \geq 0$ пространство $H_s = \mathcal{D}(A^{s/2})$ с нормой $\|x\|_s = \|A^{s/2}x\|$, при $s < 0$ пространство H_s есть пополнение H относительно нормы $\|\cdot\|_s$. По построению

$$H_0 = H, \quad H_1 = \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad H_2 = \mathcal{D}(A), \quad H_s \hookrightarrow H_r, \quad s > r.$$

Так как

$$|(x, y)| = |(A^{-s/2}x, A^{s/2}y)| \leq \|x\|_{-s} \cdot \|y\|_s$$

для всех $x \in H$ и $y \in H_s$ при $s > 0$, то полуторалинейная форма (x, y) может быть продолжена по непрерывности с $H \times H_s$ до полуторалинейной формы $(x, y)_{-s, s}$ на $H_{-s} \times H_s$. Следовательно, пространство H_{-s} можно рассматривать как двойственное к H_s ($H_{-s} = H_s^*$); двойственность определяется полуторалинейной формой $(x, y)_{-s, s}$ (двойственность относительно H). Через $\mathcal{L}(X, Y)$ будем обозначать множество линейных ограниченных операторов из пространства X в пространство Y . Оператор A можно рассматривать как ограниченный оператор, действующий в шкале гильбертовых пространств $A \in \mathcal{L}(H_s, H_{s-2})$ для всех $s \in \mathbb{R}$. Следуя [3], относительно оператора D будем предполагать

УСЛОВИЕ 2. $D \in \mathcal{L}(H_1, H_{-1})$ – аккретивный секториальный оператор, т.е.

$$\operatorname{Re}(Dx, x)_{-1,1} \geq 0, \quad |\operatorname{Im}(Dx, x)_{-1,1}| \leq \nu \operatorname{Re}(Dx, x)_{-1,1}$$

для всех $x \in H_1$ и некоторого $\nu > 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00790).

Обозначим (точная нижняя грань берется по $x \in H_1$, $x \neq 0$)

$$\alpha = \inf \frac{\operatorname{Re}(Dx, x)_{-1,1}}{\|x\|_{-1}^2}, \quad \beta = \inf \frac{\operatorname{Re}(Dx, x)_{-1,1}}{\|x\|^2}, \quad \delta = \inf \frac{\operatorname{Re}(Dx, x)_{-1,1}}{\|x\|_1^2}.$$

Так как $\|x\|_1^2 \geq a_0 \|x\|^2 \geq a_0^2 \|x\|_{-1}^2$ для всех $x \in H_1$, то $\alpha \geq a_0 \beta \geq a_0^2 \delta \geq 0$. Обозначим

$$\|D\| = \sup_{x \in H_1, \|x\|_1=1} \|Dx\|_{-1}$$

– норма оператора D . Отметим, что оператор $D \in \mathcal{L}(H_1, H_{-1})$ будет аккретивным (секториальным) в смысле условия 2 тогда и только тогда, когда аккретивным (секториальным) будет оператор $A^{-1/2}DA^{-1/2} \in \mathcal{L}(H)$.

С уравнением (1) свяжем квадратичный операторный пучок [3], [4]

$$L(\lambda) = \lambda^2 \mathcal{J} + \lambda D + A,$$

где $\mathcal{J} : H_1 \hookrightarrow H_{-1}$ – оператор вложения, $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр. Пучок будем рассматривать как оператор-функцию $L(\lambda) \in \mathcal{L}(H_1, H_{-1})$. Определим резольвентное множество

$$\rho(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(H_{-1}, H_1)\}$$

и спектр $\sigma(L) = \mathbb{C} \setminus \rho(L)$ пучка $L(\lambda)$.

Уравнение второго порядка (1) линеаризуется как система дифференциальных уравнений первого порядка [2]–[4]

$$w'(t) = \mathcal{T}w(t), \quad w(t) = \begin{pmatrix} u' & u \end{pmatrix}^\top \quad (2)$$

в пространстве $\mathfrak{H} = H \times H_1$ с матричным оператором

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -D & -A \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in H_1 \times H_1 : Dw_1 + Aw_2 \in H \right\}.$$

Так как $\operatorname{Re}(\mathcal{T}w, w)_{\mathfrak{H}} = -\operatorname{Re}(Dw_1, w_1)_{-1,1} \leq 0$ и $0 \in \rho(\mathcal{T})$, то $(-\mathcal{T})$ – максимальный аккретивный оператор [5] и, следовательно, оператор $\mathcal{T}$ является генератором C_0 -полугруппы сжатий $\exp(t\mathcal{T})$ [6]. В работе [4] показано, что при выполнении условий 1 и 2, при $\beta > 0$ оператор $\mathcal{T}$ является генератором экспоненциально убывающей полугруппы. В работе [5], в частности, показано, что при $\delta > 0$ полугруппа $\exp(t\mathcal{T})$ будет аналитической.

В работах [2], [7] были получены оценки показателя экспоненциального убывания полугруппы $\exp(t\mathcal{T})$ и спектра $\sigma(\mathcal{T})$ в случае $\beta > 0$. В работе [3] была получена оценка спектра $\sigma(\mathcal{T})$ в случае $\delta > 0$. В настоящей работе используется другой подход к оценке показателя экспоненциального убывания полугруппы $\exp(t\mathcal{T})$ в случае $\delta > 0$. Основной результат работы – теорема 1, которая дает другую оценку показателя экспоненциального убывания полугруппы $\exp(t\mathcal{T})$ и оценку спектра оператора $\mathcal{T}$.

2. Относительно “стандартного” скалярного произведения в пространстве $\mathfrak{H}$ оператор $(-\mathcal{T})$ не будет равномерно аккретивным и секториальным. Для $\theta \geq 0$ рассмотрим в пространстве $\mathfrak{H}$ семейство полугоралинейных форм

$$\begin{aligned} [w, v]_\theta &= (w_1, v_1) + \theta(w_1, v_1)_{-1} + (w_2, v_2)_1 + \theta(w_2, v_2) \\ &\quad + \theta(Dw_2, Dv_2)_{-1} + \theta(Dw_2, v_1)_{-1} + \theta(w_1, Dv_2)_{-1}, \\ w &= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}, \end{aligned}$$

где $(\cdot, \cdot)_s = (A^{s/2} \cdot, A^{s/2} \cdot)$ – скалярное произведение в пространстве H_s . Так как

$$|w|_\theta^2 = [w, w]_\theta = \|w_1\|^2 + \|w_2\|_1^2 + \theta\|w_2\|^2 + \|w_1 + Dw_2\|_{-1}^2,$$

то $[\cdot, \cdot]_\theta$ – скалярное произведение на $\mathfrak{H}$, эквивалентное исходному, причем $[\cdot, \cdot]_0 = (\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть выполнены условия 1 и 2 и $\delta > 0$. Тогда для произвольных $\theta > 0$ и $0 \leq b \leq \sqrt{\theta}$ для всех $w = (w_1, w_2)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ выполнены оценки

$$\operatorname{Re}[\mathcal{T}w, w]_\theta \leq -\omega_\theta |w|_\theta^2, \quad |\operatorname{Im}[\mathcal{T}w, w]_\theta| \leq M_{\theta,b} |\operatorname{Re}[\mathcal{T}w, w]_\theta| + b |w|_\theta^2,$$

где

$$\frac{1}{\omega_\theta} = \frac{1}{\beta} + \frac{\|D\|^2}{2\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\alpha} + \frac{1}{\theta\delta} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\theta}{\alpha} + \frac{1}{\theta\delta} + \frac{\|D\|^2}{\delta} \right)^2 - \frac{4}{\alpha\delta}} > 0,$$

$$M_{\theta,b} = \nu + \frac{2}{\delta(b + \sqrt{b^2 + 4\theta})} + \frac{\sqrt{\theta} - b}{\beta}.$$

Так как резольвентное множество оператора $\mathcal{T}$ непусто, то

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях предложения 1

$$\sigma(\mathcal{T}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq -\omega_\theta, |\operatorname{Im} \lambda| \leq M_{\theta,b} |\operatorname{Re} \lambda| + b\}.$$

Полагая $b = 0$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях предложения 1 для произвольного $\theta > 0$

$$\sigma(\mathcal{T}) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq -\omega_\theta, |\operatorname{Im} \lambda| \leq \left(\nu + \frac{1}{\delta\sqrt{\theta}} + \frac{\sqrt{\theta}}{\beta} \right) |\operatorname{Re} \lambda| \right\}.$$

Непосредственно проверяется равенство $\sigma(L) = \sigma(\mathcal{T})$ [3].

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1 и 2 и $\delta > 0$. Тогда оператор $\mathcal{T}$ в пространстве $\mathfrak{H}$ является генератором (аналитической) полугруппы $\exp(t\mathcal{T})$ с показателем экспоненциального убывания

$$\omega = \left(\frac{1}{\beta} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\delta}} + \frac{\|D\|^2}{2\delta} + \sqrt{\frac{4\|D\|^2}{\delta\sqrt{\alpha\delta}} + \frac{\|D\|^4}{\delta^4}} \right)^{-1} > 0,$$

т.е. для всех $t \geq 0$ выполнена оценка $\|\exp(t\mathcal{T})\|_{\mathfrak{H}} \leq \operatorname{const} \cdot \exp(-\omega t)$. Для произвольного $b \geq 0$

$$\sigma(L) = \sigma(\mathcal{T}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq -\omega, |\operatorname{Im} \lambda| \leq M_b |\operatorname{Re} \lambda| + b\},$$

где $M_b = \min_{\theta \geq b^2} M_{\theta,b}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. В условиях теоремы при $b = 0$ получаем

$$\sigma(L) = \sigma(\mathcal{T}) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq -\omega, |\operatorname{Im} \lambda| \leq \left(\nu + \frac{2}{\sqrt{\delta\beta}} \right) |\operatorname{Re} \lambda| \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [3] в случае $\delta > 0$ было показано, что

$$\sigma(L) = \sigma(\mathcal{T}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq 0, |\operatorname{Im} \lambda| \leq \nu |\operatorname{Re} \lambda| + \delta^{-1}\}.$$

3. Отметим, что с оператором $\mathcal{T}$ в пространстве $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]_\theta$ можно связать линеаризацию квадратичного пучка $L(\lambda)$ вида $\mathbf{L}(\lambda) = \lambda \mathbf{Q} - \mathbf{T}$ с матричными операторами

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} I + \theta A^{-1} & \theta A^{-1} D \\ \theta D^* A^{-1} & A + \theta I + \theta D^* A^{-1} D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -D & -A - \theta I \\ A + \theta I & -\theta D^* \end{pmatrix},$$

рассматриваемую как оператор-функцию $\mathbf{L}(\lambda) \in \mathcal{L}(H_1 \times H_1, H_{-1} \times H_{-1})$.

Автор благодарит проф. А. А. Шкаликова и проф. К. Трунка (С. Trunk) за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Cramer, Yu. Latushkin, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, **234** (2003), 105–119.
[2] S.-Z. Huang, *Tuebingen Ber. Funktionalanal.*, **6** (1997), 65–97. [3] B. Jacob, C. Trunk, *Semigroup Forum*, **79**:1 (2009), 79–100. [4] Р. О. Гринив, А. А. Шкаликов, “Экспоненциальное убывание энергии решений уравнений, отвечающих некоторым операторным моделям механики”, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:3 (2004), 3–14. [5] Р. О. Гринив, А. А. Шкаликов, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 5, 5–14. [6] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Grad. Texts in Math., **194**, Springer-Verlag, Berlin, 2000. [7] A. Bátkai, K.-J. Engel, *J. Comput. Anal. Appl.*, **6**:2 (2004), 153–163.

Н. В. Артамонов

Московский государственный институт
международных отношений (Университет) МИД РФ
E-mail: nikita.artamonov@gmail.com

Поступило

01.09.2011

Исправленный вариант

22.11.2011