Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Р. Каюмов, Необходимое условие сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 149–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9248>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:23:21

Необходимое условие сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$

И. Р. Каюмов

1. Введение и основной результат. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n$ – комплексные числа. *Наипростейшей дробью* называется функция

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k}.$$

В данной работе мы предполагаем, что $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$.

В статье [1] Протасовым исследована сходимость наипростейших дробей. В частности, в этой работе доказано, что если функциональный ряд

$$g_\infty(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_k} \quad (1)$$

сходится в $L_p(\mathbb{R})$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q+\varepsilon}} < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (2)$$

Обратно, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|y_k|^{1/q}} < +\infty, \quad (3)$$

то ряд (1) сходится в $L_p(\mathbb{R})$.

Если предположить, что точки z_k лежат в угле $\{|z| \leq C|y|\}$ с фиксированным C , то легко видеть, что достаточное условие (3) весьма близко к необходимому условию (2).

Тем не менее, условия (2) и (3) не являются точными.

В работе автора [2] получено достаточное условие, которое является также необходимым в предположении, что все полюса z_n лежат в некотором угле $\{|z| \leq C|y|\}$ с фиксированным C . Таковым условием оказалось неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p-1}}{|y_k|^{p-1}} < +\infty. \quad (4)$$

Нами [2] доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p > 1$. Если выполнено условие (4), то ряд

$$g_\infty(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_k}$$

сходится в $L_p(\mathbb{R})$. Обратно, если этот ряд сходится в $L_p(\mathbb{R})$, последовательность $|y_n|$ упорядочена по возрастанию и $|z_k| \leq C|y_k|$, то выполнено условие (4).

Условие сходимости (4) хотя и близко к (3), но не следует из него. В самом деле, рассмотрим последовательность $y_k = k^q \ln^q(k+1)$. Для нее ряд (4) сходится, а ряд (3) нет.

Целью настоящей работы является получение необходимого условия сходимости ряда $g_\infty(t)$ в $L_p(\mathbb{R})$. Справедлива

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00762 а, 12-01-97013-р-поволжье а).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p > 1$. Если ряд

$$g_\infty(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_k}$$

сходится в $L_p(\mathbb{R})$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p-1}}{|z_k^*|^{p-1}} < +\infty, \quad (5)$$

где z_k^* – последовательность, полученная из z_k путем упорядочивания $|z_k|$ в порядке возрастания.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Протасовым [1] при помощи преобразования Гильберта показано, что сходимости рядов

$$g_\infty(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{1}{t - z_n} \right) \right|$$

в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ равносильны. Следовательно, сходимость ряда g_∞ в $L_p(\mathbb{R})$ эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|}{(t - x_n)^2 + y_n^2}$$

в этом же пространстве.

Это значит, что при исследовании сходимости ряда g_∞ можно считать, что все $y_k > 0$. Далее, наш ряд можно разбить на два ряда, в один из которых войдут члены, содержащие положительные x_k , а в другой – отрицательные. В силу симметрии нашу теорему достаточно доказать в случае, когда все $x_k \geq 0$.

Итак, предполагаем, что $x_k \geq 0$, $y_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$

Докажем нашу теорему для двух частных случаев:

- 1) $x_k \leq y_k$ для всех натуральных k .
- 2) $x_k > y_k$ для всех натуральных k .

Разберем первый случай. Расположим последовательность y_k в порядке возрастания. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{(t - x_k)^2 + y_k^2} \right)^p dt &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{(t - x_j)^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{y_k}{(t - x_k)^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-y_j+x_j}^{y_j+x_j} \frac{y_j}{(t - x_j)^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{y_k}{(t - x_k)^2 + y_k^2} \right)^{p-1} dt \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} 2y_j \frac{y_j}{y_j^2 + y_j^2} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{y_k}{(y_k + x_j + x_k)^2 + y_k^2} \right)^{p-1} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{y_k}{(y_k + y_k + y_k)^2 + y_k^2} \right)^{p-1} \\ &= \frac{1}{10^{p-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{y_k} \right)^{p-1} \geq \frac{1}{10^{p-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j+1}^{2j} \frac{1}{y_{2j}} \right)^{p-1} = \frac{1}{10^{p-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{p-1}}{y_{2j}^{p-1}}, \end{aligned}$$

откуда сразу заключаем, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{p-1}}{y_{2j}^{p-1}}$$

сходится, а следовательно, в силу монотонности y_n должен сходиться и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{p-1}}{y_j^{p-1}}.$$

Поскольку $x_k \leq y_k$, отсюда следует, что $\sum |k/z_k^*|^{p-1} < +\infty$. Случай 1 доказан.

Для доказательства второго случая, заметим, что для всех $t \leq 0$ имеет место неравенство

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_k - t}\right) = \frac{x_k - t}{(x_k - t)^2 + y_k^2} \geq \frac{x_k - t}{(x_k - t)^2 + (x_k - t)^2} = \frac{1}{2(x_k - t)}.$$

Поэтому, в силу того, что ряд g_∞ сходится в $L_p(\mathbb{R})$, обязан сходиться и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k - t}$$

в $L_p(\mathbb{R}_-)$, т.е.

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k + t}\right)^p dt = \int_{-\infty}^0 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k - t}\right)^p dt < +\infty.$$

Расположим последовательность x_n в порядке возрастания и оценим снизу интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k + t}\right)^p dt &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{1}{x_j + t} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{x_k + t}\right)^{p-1} dt \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{x_j} \frac{1}{x_j + t} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{x_k + t}\right)^{p-1} dt \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{2x_j} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{x_k + x_j}\right)^{p-1} \geq 2^{-p} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{x_k}\right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Проводя рассуждения, идентичные случаю 1, отсюда заключаем, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{p-1}}{x_j^{p-1}}$$

сходится. Ввиду того, что $x_j \geq y_j$, отсюда заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{k}{z_k^*} \right|^{p-1} < +\infty.$$

Случай 2 доказан.

Общий случай теперь может быть легко доказан путем разбиения нашего ряда на два, один из которых относится к первому, а другой к второму случаю.

2. Заключение. Теоремы 1 и 2 можно объединить в одну.

ТЕОРЕМА 3. *Необходимым условием сходимости ряда $g_\infty(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1/(t - z_k))$ в $L_p(\mathbb{R})$ является неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p-1}}{|z_k^*|^{p-1}} < +\infty.$$

Достаточным условием сходимости ряда $g_\infty(t)$ в этом же пространстве является неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p-1}}{|y_k|^{p-1}} < +\infty.$$

Очевидно, что без дополнительных предположений на последовательность x_k теорема 3 не может быть улучшена. Однако, если задать некоторые условия на последовательность x_k , то могут быть получены другие критерии сходимости ряда $g_\infty(t)$ в $L_p(\mathbb{R})$. Например, в случае когда последовательность x_k достаточно разрежена, В.И. Данченко [3] показал, что необходимым и достаточным условием сходимости ряда $g_\infty(t)$ в $L_p(\mathbb{R})$ является неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{y_k^{p-1}} < +\infty.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. Ю. Протасов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 123–140. [2] И. Р. Каюмов, *Матем. сб.*, **202**:10 (2011), 87–98. [3] В. И. Данченко, *Матем. сб.*, **201**:7 (2010), 53–66.

И. Р. Каюмов

Научно-Исследовательский Институт
математики и механики им. Н. Г. Чеботарева
Казанского федерального университета
E-mail: ikayumov@gmail.com

Поступило

12.08.2011