Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Исаев, Асимптотическое поведение числа эйлеровых ориентаций графов, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 828–843

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:31:37

Асимптотическое поведение числа эйлеровых ориентаций графов

М. И. Исаев

Рассматривается класс простых графов с большой алгебраической связностью (второе минимальное собственное число матрицы Лапласа). Для графов этого класса определено асимптотическое поведение числа эйлеровых ориентаций. Установлены некоторые новые свойства матрицы Лапласа, а также получена оценка обусловленности матриц с асимптотическим диагональным преобладанием.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm9249

1. Введение. *Эйлеровой ориентацией* графа G называется ориентация его ребер такая, что для любой вершины количество входящих ребер и выходящих ребер одинаково. Обозначим число эйлеровых ориентаций $EO(G)$. Легко видеть, что $EO(G) = 0$, если степень хотя бы одной вершины G нечетная. *Регулярным турниром* называется эйлерова ориентация полного графа K_n .

В [1] показано, что при нечетных $n \rightarrow \infty$

$$EO(K_n) = \left(\frac{2^{n+1}}{\pi n} \right)^{(n-1)/2} n^{1/2} e^{-1/2} (1 + O(n^{-1/2+\varepsilon})) \quad (1.1)$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Неориентированный граф без петель и кратных ребер называется *простым*.

Задача о точном подсчете числа эйлеровых ориентаций простого графа G является полной для класса $\#P$, см. [2]. Другими словами, данная задача является трудной с точки зрения теории сложности.

Кроме того, для случая $2d$ -регулярного графа без петель G с n вершинами верны следующие оценки, см. [3], [4]:

$$2^d \left(\frac{(2d-1)!!}{d!} \right)^{n-1} \leq EO(G) \leq \left(\frac{(2d)!}{d! \cdot d!} \right)^{n/2}. \quad (1.2)$$

В [5] улучшена верхняя оценка для случая регулярного графа, а также проведены некоторые дополнительные исследования в этом направлении.

Работа выполнена под руководством С. П. Тарасова при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00398а).

Для простого графа G можно определить $(n \times n)$ -матрицу:

$$Q_{jk} = \begin{cases} -1, & \{v_j, v_k\} \in EG, \\ d_j, & j = k, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.3)$$

где $n = |VG|$, d_j обозначает степень вершины $v_j \in VG$. Матрица $Q = Q(G)$ называется *матрицей Лапласа* графа G . Собственные значения $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ матрицы Q являются неотрицательными вещественными числами, причем количество нулевых собственных значений совпадает с количеством компонент связности, в частности, $\lambda_1 = 0$. Число λ_2 называется *алгебраической связностью* графа G . (Для дополнительной информации о спектральных свойствах матрицы Лапласа см., например, [6] и [7].)

По теореме Кирхгофа (матричная теорема о деревьях), см. [8],

$$t(G) = \frac{1}{n} \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n, \quad (1.4)$$

где $t(G)$ обозначает число остовных деревьев графа G .

В настоящей работе обобщен подход, изложенный в [1]. Определено асимптотическое поведение числа эйлеровых ориентаций простых графов, обладающих большой алгебраической связностью, см. теорему 2.1. В п. 2 приведены определения и обозначения, а также сформулирован основной результат настоящей работы.

В п. 3 изложены базовые свойства матрицы Лапласа. Некоторые утверждения, по-видимому, представляют самостоятельный интерес, например, получена оценка обусловленности матриц с асимптотическим диагональным преобладанием, см. лемму 3.2. Также доказано следующее свойство графов, обладающих большой алгебраической связностью: при удалении вершины число остовных деревьев уменьшается не более чем в cn раз, для некоторого $c > 0$, зависящего только от λ_2/n , см. следствие 3.3.

В п. 4 доказан основной результат настоящей работы. Значение $EO(G)$ представлено с помощью формулы Коши в виде n -мерного интеграла. Вывод асимптотической оценки этого интеграла использует три леммы (лемма 4.1, лемма 4.2, лемма 4.3), доказательство которых приведено в п. 5.

2. Основной результат. Для вещественного $p \geq 1$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ используем обозначение

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}. \quad (2.1)$$

В случае $p = \infty$ имеем

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_j |x_j|. \quad (2.2)$$

Векторной p -норме соответствует матричная норма

$$\|A\|_p = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|_p}{\|\vec{x}\|_p}. \quad (2.3)$$

Если A – матрица самосопряженного оператора (симметрическая матрица), то норма $\|A\|_2$ совпадает с наибольшим модулем собственного значения A и выполняется неравенство

$$\|A\|_p \geq \|A\|_2. \quad (2.4)$$

Для обратимых матриц определяется число обусловленности

$$\mu_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p \geq \|AA^{-1}\|_p = 1. \quad (2.5)$$

Если функция f ограничена снизу и сверху функцией g асимптотически, мы используем обозначение

$$f(n) = \Theta_{k_1, k_2}(g(n)), \quad (2.6)$$

что значит, при $n \rightarrow \infty$, начиная с некоторого момента,

$$k_1|g(n)| \leq |f(n)| \leq k_2|g(n)|. \quad (2.7)$$

В том случае, когда функции f и g зависят не только от n , а также от других параметров ξ , мы используем обозначение (2.6), подразумевая, что условие (2.7) выполнено равномерно для любых допустимых значений ξ .

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть G – связный простой граф с n вершинами, имеющими четную степень, причем алгебраическая связность графа $\lambda_2 \geq \gamma n$ для некоторого $\gamma > 0$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$EO(G) = \Theta_{k_1, k_2} \left(\frac{2^{|EG|+n/2} \pi^{-n/2}}{\sqrt{t(G)}} \right), \quad (2.8)$$

где $t(G)$ обозначает число остовных деревьев G , а константы $k_1, k_2 > 0$ зависят только от γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Учитывая (1.4), значение $t(G)$ может быть выражено как главный минор $(n-1)$ -го порядка матрицы Лапласа Q .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для полного графа

$$\lambda_2 = n, \quad EK_n = \frac{n(n-1)}{2}, \quad t(K_n) = n^{n-2}.$$

Результат теоремы 2.1 для этого случая находится в согласии с асимптотической формулой (1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Справедлив результат об асимптотическом поведении числа эйлеровых циклов, аналогичный теореме 2.1, см. [10].

3. Свойства матрицы Лапласа. В дальнейшем будем полагать, что

$$G \text{ является простым графом.} \quad (3.1)$$

Для матрицы Лапласа Q графа G вектор $[1, 1, \dots, 1]^T$ является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 0$. Обозначим $\bar{Q} = Q + J$, где J – матрица, все элементы которой равны 1. Заметим, что Q и $\bar{Q}$ имеют одинаковый набор

собственных значений и векторов, за исключением собственного значения, соответствующего вектору $[1, 1, \dots, 1]^T$, которое равно 0 для Q и n для $\hat{Q}$.

Учитывая (2.4), получаем, что

$$\lambda_n = \|Q\|_2 \leq \|\hat{Q}\|_2 \leq \|\hat{Q}\|_1 = \max_j \sum_{k=1}^n |\hat{Q}_{jk}| = n. \quad (3.2)$$

Обозначим через G_r граф, получающийся из графа G посредством удаления вершин $v_1, v_2, \dots, v_r$ и всех смежных им ребер.

ЛЕММА 3.1. Пусть граф G – простой граф с n вершинами. Тогда

$$\lambda_2(G) \leq \frac{n}{n-1} \min_j d_j, \quad (3.3)$$

$$\lambda_2(G_r) \geq \lambda_2(G) - r, \quad (3.4)$$

где $\lambda_2(G)$ – алгебраическая связность G , а d_j – степень вершины $v_j \in VG$.

Доказательство леммы 3.1 см. в [6].

ЛЕММА 3.2. Пусть $a > 0$, I – единичная $(n \times n)$ -матрица. Тогда для любого n и для произвольной симметричной $(n \times n)$ -матрицы X такой, что матрица $I + X$ является невырожденной и $|X_{ij}| \leq a/n$, выполняется

$$\mu_2(I + X) \leq \mu_\infty(I + X) \leq C\mu_2(I + X), \quad (3.5)$$

где C зависит только от a (не зависит от n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Левая часть неравенства (3.5) следует из (2.4). Упорядочим собственные числа $I + X$ по модулю

$$|\chi_1| \leq |\chi_2| \leq \dots \leq |\chi_n|. \quad (3.6)$$

Учитывая (2.4), получаем, что

$$|\chi_n| = \|I + X\|_2 \leq \|I + X\|_\infty \leq \|I\|_\infty + \|X\|_\infty \leq 1 + a. \quad (3.7)$$

Рассмотрим произвольный $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, причем $\|\vec{x}\|_\infty = 1$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1 = \|\vec{x}\|_\infty = 1$. Обозначим

$$\mathcal{J} = \left\{ j \mid x_j > \frac{1}{2a} \right\}.$$

Случай 1: $|\mathcal{J}| < n/(4a)$. Оценив первую координату $(I + X)\vec{x}$, получаем, что

$$\|(I + X)\vec{x}\|_\infty \geq x_1 - \frac{a}{n} \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} |x_j| + \sum_{j \notin \mathcal{J}} |x_j| \right) \geq 1 - \frac{a}{n} \left(\frac{n}{4a} \cdot 1 + n \cdot \frac{1}{2a} \right) = \frac{1}{4} \|\vec{x}\|_\infty. \quad (3.8)$$

Случай 2: $|\mathcal{J}| \geq n/(4a)$. Заметим, что

$$\sqrt{n \|(I + X)\vec{x}\|_\infty^2} \geq \|(I + X)\vec{x}\|_2 \geq |\chi_1| \cdot \|\vec{x}\|_2 \geq |\chi_1| \cdot \sqrt{|\mathcal{J}| \cdot \frac{1}{4a^2}} \|\vec{x}\|_\infty. \quad (3.9)$$

Тогда

$$\|(I + X)\vec{x}\|_{\infty} \geq \frac{|\chi_1|}{4a^{3/2}} \|\vec{x}\|_{\infty}. \quad (3.10)$$

Комбинируя (3.8) и (3.10), получаем, что выполняется по крайней мере одно из следующих двух неравенств:

$$\|(I + X)^{-1}\|_{\infty} \leq 4 \quad \text{или} \quad \|(I + X)^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{4a^{3/2}}{|\chi_1|}. \quad (3.11)$$

Из (3.7) имеем

$$\|I + X\|_{\infty} \leq 1 + a. \quad (3.12)$$

Учитывая, что $|\chi_n| \leq 1 + a$ и $\mu_2(I + X) = |\chi_n|/|\chi_1| \geq 1$, получаем (3.5).

На следующее свойство матрицы Лапласа опираются доказательства леммы 4.1, леммы 4.2 и леммы 4.3.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть G – простой граф с n вершинами, причем алгебраическая связность графа $\lambda_2 \geq \gamma n$ для некоторого $\gamma > 0$. Тогда существует константа $c_{\infty} > 0$, зависящая только от γ , такая, что

$$\|\hat{Q}^{-1}\|_1 = \|\hat{Q}^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{c_{\infty}}{n}. \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3.1. Используя (3.3), получаем, что

$$d_j \geq \lambda_2 \frac{n-1}{n} \geq \gamma(n-1) \geq \frac{\gamma n}{2}. \quad (3.14)$$

Кроме того, учитывая (3.2), все собственные числа $\hat{Q}$ лежат в промежутке $[\gamma n; n]$. Неравенство (3.13) следует из утверждения леммы 3.2 для матрицы $\Omega^T \hat{Q} \Omega$, где

$$\Omega_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_j + 1}}, & \text{если } j = k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Следующая лемма используется для оценки определителя матрицы, близкой к единичной матрице I .

ЛЕММА 3.3. Пусть X является $(n \times n)$ -матрицей, причем $\|X\|_2 < 1$. Тогда для натурального $m \geq 2$

$$\det(I + X) = \exp\left(\sum_{r=1}^{m-1} \frac{(-1)^{r+1}}{r} \operatorname{tr}(X^r) + E_m(X)\right), \quad (3.16)$$

где tr – функция следа и

$$|E_m(X)| \leq \frac{n}{m} \frac{\|X\|_2^m}{1 - \|X\|_2}. \quad (3.17)$$

При доказательстве леммы 3.3 рассматривается ряд матрицы $\ln(I + X)$, след которой оценивается в дальнейшем. Лемма 3.3 сформулирована и подробно доказана в [9].

ЛЕММА 3.4. Пусть G – простой граф с n вершинами, причем алгебраическая связность графа $\lambda_2 \geq \gamma n$ для некоторого $\gamma > 0$. Пусть G_1 – граф, получающийся из G посредством удаления вершины v_1 и всех смежных ребер. Тогда существует константа $c > 0$, зависящая только от γ , такая, что

$$\det \widehat{Q}_1 \geq \frac{\det \widehat{Q}}{cn}. \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.4. Заметим, что матрица M_{11} , которая получается при удалении первой строки и первого столбца $\widehat{Q}$, совпадает с $\widehat{Q}_1$ за исключением диагональных элементов. Пусть Ω – такая диагональная матрица, что

$$\Omega_{jj} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_1, v_j) \in EG, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Рассмотрим матрицу

$$X_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{d_1 + 1}, & \text{если } (v_1, v_j) \notin EG, (v_1, v_k) \notin EG \text{ и } j, k \neq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.20)$$

После одного шага метода исключения Гаусса для $\widehat{Q} + \Omega + X$ получаем, что

$$\det(\widehat{Q} + \Omega + X) = (d_1 + 1) \det \widehat{Q}_1. \quad (3.21)$$

Учитывая (2.4) и (3.14), имеем

$$\|\Omega + X\|_2 \leq \|\Omega\|_2 + \|X\|_2 \leq \|\Omega\|_2 + \|\widehat{Q}\|_1 \leq 1 + \frac{n}{d_1 + 1} \leq \frac{3}{\gamma}. \quad (3.22)$$

Так как алгебраическая связность $\lambda_2 \geq \gamma n$, то

$$\|(\Omega + X)\widehat{Q}^{-1}\|_2 \leq \|\Omega + X\|_2 \|\widehat{Q}^{-1}\|_2 \leq \frac{3}{\gamma \lambda_2} \leq \frac{3}{\gamma^2 n} \quad (3.23)$$

Комбинируя лемму 3.3 с (3.23), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \det(I + (\Omega + X)\widehat{Q}^{-1}) &= \exp(\operatorname{tr}((\Omega + X)\widehat{Q}^{-1}) + E_2((\Omega + X)\widehat{Q}^{-1})) \\ &\geq \exp\left(-n \frac{3}{\gamma^2 n} + O(n^{-1})\right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Из (3.21) и (3.24) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$(d_1 + 1) \det \widehat{Q}_1 = \det(I + (\Omega + X)\widehat{Q}^{-1}) \det \widehat{Q} \geq \det \widehat{Q} \exp\left(-\frac{3}{\gamma^2} + O(n^{-1})\right). \quad (3.25)$$

Так как $d_1 + 1 \leq n$, мы получаем (3.18).

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть предположения леммы 3.4 выполнены. Пусть G_r – граф, получающийся из G посредством удаления вершин $v_1, v_2, \dots, v_r$ и всех смежных им ребер. Тогда существует константа $c_1 > 0$, зависящая только от γ , такая, что

$$\det \widehat{Q}(G_r) \geq \frac{\det \widehat{Q}(G)}{(c_1 n)^r} \quad (3.26)$$

при $r \leq \gamma n/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3.2. Учитывая (3.4), получаем, что

$$\lambda_2(G_r) \geq \gamma n - r \geq \frac{\gamma n}{2}. \quad (3.27)$$

Используя r раз утверждение леммы 3.4, получаем (3.26).

Согласно (1.4)

$$t(G) = \frac{1}{n} \lambda_2 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} = \frac{\det \widehat{Q}}{n^2}, \quad (3.28)$$

поэтому имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть предположения леммы 3.4 выполнены. Тогда существует константа $c > 0$, зависящая только от γ , такая, что

$$t(G_1) \geq \frac{t(G)}{cn}, \quad (3.29)$$

где $t(G)$ – число остовных деревьев графа G .

ЛЕММА 3.5. Пусть $a > 0$ и предположения леммы 3.4 выполнены. Тогда для любого $A \subset VG$ такого, что $|A| \geq an$, существует функция высоты $h: VG \rightarrow \mathbb{N}_0$, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{aligned} h(v) &= 0, & v &\in A, \\ h(v) &\leq H, & v &\in VG, \\ |\{w \in VG \mid (w, v) \in EG \text{ и } h(w) < h(v)\}| &\geq \alpha n, & \text{если } v &\notin A, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где константы $H, \alpha > 0$ зависят только от a и γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.5. Построим сначала $A_1 = \{v \in VG \mid h(v) = 1\}$, обладающее свойством (3.30).

Если $|A| > n - \gamma n/4$, то положим $A_1 = \{v \in VG \mid v \notin A\}$. Учитывая (3.14), получаем, что свойство (3.30) выполняется при $\alpha = \gamma/4$. В этом случае $H = 1$.

Для $|A| \leq n - \gamma n/4$ определим $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$x_j = \begin{cases} 1 - \frac{|A|}{n}, & v_j \in A, \\ -\frac{|A|}{n}, & v_j \notin A. \end{cases} \quad (3.31)$$

Так как $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, то

$$\vec{x}^T Q \vec{x} = \vec{x}^T \widehat{Q} \vec{x} \geq \lambda_2 \|\vec{x}\|_2^2 \geq \lambda_2 |A| \left(\frac{n - |A|}{n} \right)^2 \geq \gamma n an \left(\frac{\gamma}{4} \right)^2 = \frac{a\gamma^3 n^2}{16}. \quad (3.32)$$

С другой стороны,

$$\vec{x}^T Q \vec{x} = \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} (x_j - x_k)^2, \quad (3.33)$$

что совпадает с количеством $(v, w) \in EG$ таких, что $v \in A$, $w \notin A$. Пусть A_1 – множество вершин $w \notin A$, у которых не менее αn смежных вершин из A , где $\alpha = (1/32)a\gamma^3$.

$$\vec{x}^T Q \vec{x} \leq n|A_1| + \alpha n|VG|. \quad (3.34)$$

Используя (3.32) и (3.34), получаем, что $|A_1| \geq \alpha n$.

Дальнейшее построение функции h производится индуктивно, используя на k -м шаге множество $A^{(k)} = A \cup A_1 \cup \dots \cup A_k$. Число шагов не превосходит $1/\alpha$, так как $|A_k| \geq \alpha n$ для всех шагов, кроме, быть может, последнего.

4. Доказательство теоремы 2.1. Аналогично [1] (см. доказательство теоремы 3.1) заметим, что функция

$$\prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} (x_j^{-1} x_k + x_k^{-1} x_j) \quad (4.1)$$

является производящей функцией числа ориентаций графа G по разностям числа входящих и выходящих ребер в каждой вершине. Значение $EO(G)$ равно свободному члену, который можно получить с помощью формулы Коши, используя единичную окружность в качестве контура для каждой переменной:

$$EO(G) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint \dots \oint \frac{\prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} (x_j^{-1} x_k + x_k^{-1} x_j)}{x_1 x_2 \dots x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (4.2)$$

Заменяя $x_j = e^{i\theta_j}$ для каждого j , получаем, что

$$EO(G) = 2^{|EG|} \pi^{-n} S, \quad S = \int_{U_n(\pi/2)} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} d\vec{\theta}, \quad (4.3)$$

где $\Delta_{jk} = \theta_j - \theta_k$,

$$U_n(\rho) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid |x_j| \leq \rho \text{ для всех } j\}, \quad (4.4)$$

а также используется тот факт, что для графов, степени вершин которого четные, подынтегральное выражение остается неизменным при заменах $\theta_j \rightarrow \theta_j + \pi$.

Начнем оценку S с части, которая вносит основной вклад в значение интеграла. Зафиксируем некоторую достаточно маленькую константу $\varepsilon > 0$. Пусть

$$V_0 = \left\{ \vec{\theta} \in U_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \mid |\theta_j - \bar{\theta}_\pi| \pmod{\pi} \leq n^{-1/2+\varepsilon} \right\}. \quad (4.5)$$

где $\bar{\theta}_\pi$ обозначает среднее арифметическое значение θ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, на отрезке со склееными концами $[-\pi/2, \pi/2]$ (которое корректно определяется, если все θ_j находятся в одной половине), $|\theta_j - \bar{\theta}_\pi| \pmod{\pi}$ обозначает расстояние между θ_j и $\bar{\theta}_\pi$ на отрезке со склееными концами $[-\pi/2, \pi/2]$.

Используя разложение в ряд Тейлора, получаем, что для $\vec{\theta} \in V_0$

$$\prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^2 - \frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4 + O(n^{-1+6\varepsilon})\right). \quad (4.6)$$

Обозначим S_0 вклад в S при интегрировании по области V_0 .

ЛЕММА 4.1. Пусть G – простой граф с n вершинами, причем алгебраическая связность графа $\lambda_2 \geq \gamma n$ для некоторого $\gamma > 0$. Тогда для $a, b > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\int_{V_0} \exp\left(-a \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^2 - b \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4\right) d\vec{\theta} = \Theta_{k_1, k_2}\left(n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\vec{\theta}^T \hat{Q} \vec{\theta}} d\vec{\theta}\right), \quad (4.7)$$

где константы $k_1, k_2 > 0$ зависят только от a, b и γ .

Лемма 4.1 следует из леммы 8.3 из [10]. Доказательство приведено в п. 5. Комбинируя (3.28), (4.3), (4.6), (4.7) и

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\vec{\theta}^T \hat{Q} \vec{\theta}} d\vec{\theta} = \frac{\pi^{n/2} a^{-n/2}}{\sqrt{\det \hat{Q}}}, \quad (4.8)$$

получаем, что

$$S_0 = \Theta_{k_1, k_2} \left(\frac{2^{(n-1)/2} \pi^{(n+1)/2}}{\sqrt{t(G)}} \right), \quad (4.9)$$

где константы $k_1, k_2 > 0$ зависят только от γ .

Тем самым, осталось показать, что другие части интеграла пренебрежимо малы. Заметим, что

$$|\cos(x)| \leq \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad \text{для} \quad |x| \leq \frac{9}{16}\pi. \quad (4.10)$$

Разделим промежуток $[-\pi/2, \pi/2] \pmod{\pi}$ на 32 равных интервала $H_0, \dots, H_{31}$ таких, что $H_0 = [-\pi/64, \pi/64]$. Для каждого j определим область $W_j \subseteq U_n(\pi/2)$ как множество таких $\vec{\theta} \in U_n(\pi/2)$, у которых хотя бы $n/32$ координат лежат в H_j . Очевидно, что набор W_j покрывает $U_n(\pi/2)$, кроме того, W_j может быть отображен в W_0 путем равномерного сдвига всех $\theta_j \pmod{\pi}$. Это отображение не изменяет подынтегрального выражения (4.3), а также переводит V_0 в себя, поэтому

$$\int_{U_n(\pi/2) - V_0} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} d\vec{\theta} \leq 32Z, \quad (4.11)$$

где

$$Z = \int_{W_0 - V_0} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} |\cos \Delta_{jk}| d\vec{\theta}. \quad (4.12)$$

Мы определим интегралы S_1, S_2, S_3 так, чтобы Z было ограничено их суммой, и покажем отдельно, что каждый из них пренебрежимо мал. Пусть

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \vec{\theta} \in W_0 \mid |\theta_j| \geq \frac{1}{32}\pi \text{ для менее чем } n^\varepsilon \text{ различных } j \right\}, \\ V_2 &= \left\{ \vec{\theta} \in V_1 \mid |\theta_j| \geq \frac{1}{16}\pi \text{ для по крайней мере одного } j \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Наши три интеграла определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{W_0 - V_1} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} |\cos \Delta_{jk}| d\vec{\theta}, & S_2 &= \int_{V_2} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} |\cos \Delta_{jk}| d\vec{\theta}, \\ S_3 &= \int_{V_1 - V_2 - V_0} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} |\cos \Delta_{jk}| d\vec{\theta}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Начнем с S_1 . Пусть h – функция высоты из леммы 3.5 для $A = \{v_j \mid |\theta_j| \leq \pi/64\}$. Пусть $l_{\min}$ – минимальное натуральное число, для которого неравенство

$$|\theta_j| \geq \frac{1}{64}\pi \left(1 + \frac{l}{H}\right) \quad (4.15)$$

выполнено для по крайней мере n^ε/H индексов из множества $\{j \mid h(v_j) = l\}$. Из определения области V_1 следует существование $l_{\min}$. Если

$$|\theta_j| \geq \frac{\pi}{64} \left(1 + \frac{l_{\min}}{H}\right) \quad \text{и} \quad |\theta_k| \leq \frac{\pi}{64} \left(1 + \frac{l_{\min} - 1}{H}\right) \quad (4.16)$$

или наоборот, имеем

$$|\cos \Delta_{jk}| \leq \cos \frac{\pi/64}{H}.$$

Это выполняется по крайней мере для $(\alpha n - n^\varepsilon)n^\varepsilon/H$ ребер $\{v_j, v_k\} \in EG$. Используя (3.2) и (3.28), получаем при $n \rightarrow \infty$

$$S_1 \leq \pi^n \left(\cos \frac{\pi}{64H} \right)^{(\alpha n - n^\varepsilon)n^\varepsilon/H} = O(\exp(-cn^{1+\varepsilon})) \frac{2^{(n-1)/2} \pi^{(n+1)/2}}{\sqrt{t(G)}} \quad (4.17)$$

для некоторой константы $c > 0$, зависящей только от γ .

Для $1 \leq r \leq n^\varepsilon$ обозначим $S_2(r)$ вклад в S_2 тех $\theta \in V_2$, для которых неравенство $|\theta_j| \geq \pi/16$ выполняется ровно для r индексов j . Если $|\theta_j| \leq \pi/32$ и $|\theta_k| \geq \pi/16$ или наоборот, получаем

$$|\cos \Delta_{jk}| \leq \cos \left(\frac{\pi}{32} \right). \quad (4.18)$$

Это выполняется по крайней мере для $r(\gamma n/2 - n^\varepsilon)$ ребер $\{v_j, v_k\} \in EG$, так как степень любой вершины G не менее $\gamma n/2$, см. (3.14). Для пар (j, k) таких, что $|\theta_j|, |\theta_k| \leq \pi/16$, мы используем (4.10). Обозначим $\vec{\theta}' = (\theta_1, \dots, \theta_{n-r})$. Имеем

$$S_2(r) \leq \pi^r \left(\cos \frac{\pi}{32} \right)^{r(\gamma n/2 - n^\varepsilon)} \sum_{G_r} \int_{U_{n-r}(\pi/2)} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG_r} \Delta_{jk}^2 \right) d\vec{\theta}', \quad (4.19)$$

где первая сумма по графам, получающимся из G посредством удаления всевозможных наборов из r вершин.

ЛЕММА 4.2. Пусть предположения леммы 4.1 выполнены. Тогда

$$\int_{U_n(\pi/2)} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^2 \right) d\vec{\theta} \leq \frac{2^{(n-1)/2} \pi^{(n+1)/2} n}{\sqrt{\det \hat{Q}}}. \quad (4.20)$$

Лемма 4.2 совпадает с леммой 6.1 из [10]. Доказательство приведено в п. 5. Используя лемму 3.1 и следствие 3.2, получаем, что

$$\lambda_2(G_r) \geq \gamma n - n^\varepsilon, \quad (4.21)$$

$$\det \hat{Q}(G_r) \geq \frac{\det \hat{Q}}{(c_1 n)^r}. \quad (4.22)$$

Согласно лемме 4.2, имеем

$$\int_{U_{n-r}(\pi/2)} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG_r} \Delta_{jk}^2 \right) d\vec{\theta}' \leq \frac{2^{(n-r-1)/2} \pi^{(n-r+1)/2} n}{\sqrt{\det \hat{Q}(G_r)}}. \quad (4.23)$$

Комбинируя (4.19) с (4.22) и (4.23) и оценивая числом n^r выбор набора из r вершин для построения графа G_r , получаем, что

$$S_2(r) \leq 2^{(n-r-1)/2} \pi^{(n+r+1)/2} n^{r+1} \left(\cos \frac{\pi}{32} \right)^{r(\gamma n/2 - n^\varepsilon)} \frac{(c_1 n)^{r/2}}{\sqrt{\det \widehat{Q}}}. \quad (4.24)$$

Используя (3.2) и суммируя по $0 \leq r \leq n^\varepsilon$, находим, что

$$S_2 = \sum_{r=1}^{n^\varepsilon} S_2(r) = O(c^{-n}) \frac{2^{(n-1)/2} \pi^{(n+1)/2}}{\sqrt{t(G)}} \quad (4.25)$$

для некоторой константы $c > 1$, зависящей только от γ .

Заметим, что $\Delta_{jk} \leq \pi/8$ для $\bar{\theta} \in V_1 - V_2$, поэтому

$$V_0 = \left\{ \theta \in U_n \left(\frac{\pi}{2} \right) \mid |\theta_j - \bar{\theta}_\pi| \pmod{\pi} \leq \frac{\pi}{8} \right\}, \quad (4.26)$$

где $\bar{\theta}_\pi$ и $|\theta_j - \bar{\theta}_\pi| \pmod{\pi}$ определены в (4.5). Так как подынтегральное выражение инвариантно относительно равномерного сдвига всех $\theta_j \pmod{\pi}$, а также V_0 и V_3 переходят в себя, мы можем зафиксировать $\bar{\theta}_\pi = 0$ и домножить на отношение промежутка интегрирования π к длине $n^{-1/2}$ вектора $(1/n)[1, 1, \dots, 1]^T$. Получаем, что

$$S_3 \leq \pi n^{1/2} \int_{L \cap U_n(\pi/8) \setminus V_0} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} |\cos \Delta_{jk}| dL, \quad (4.27)$$

где L обозначает ортогональное дополнение к $[1, 1, \dots, 1]^T$. Аналогично (4.19) находим, что

$$S_3 \leq \pi n^{1/2} \int_{L \cap U_n(\pi/8) \setminus V_0} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^2 \right) dL. \quad (4.28)$$

ЛЕММА 4.3. Пусть предположения леммы 4.1 выполнены. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\int_{L \cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^2 \right) dL = O(\exp(-cn^{2\varepsilon})) \frac{2^{(n-1)/2} \pi^{(n-1)/2} n^{1/2}}{\sqrt{\det \widehat{Q}}} \quad (4.29)$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от γ .

Лемма 4.3 совпадает с леммой 6.2 из [10]. Доказательство приведено в п. 5. Комбинируя (3.28), (4.29) и (4.28), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$S_3 = O(\exp(-cn^{2\varepsilon})) \frac{2^{(n-1)/2} \pi^{(n+1)/2} n}{\sqrt{\det \widehat{Q}}} = O(\exp(-cn^{2\varepsilon})) \frac{2^{(n-1)/2} \pi^{(n+1)/2}}{\sqrt{t(G)}}, \quad (4.30)$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от γ . Комбинируя (4.9), (4.17), (4.25) и (4.30), мы получаем (2.8), а также следующую лемму.

ЛЕММА 4.4. Пусть предположения леммы 4.1 выполнены. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$S = (1 + O(\exp(-cn^{2\varepsilon}))) S_0 \quad (4.31)$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от γ .

5. Доказательство лемм 4.1–4.3. В этом пункте мы везде полагаем, что предположения леммы 4.1 выполнены. Пусть

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}(\vec{\theta}) = [\phi_1(\vec{\theta}), \dots, \phi_n(\vec{\theta})]^T = \widehat{Q}\vec{\theta}. \quad (5.1)$$

Пусть $P(\vec{\theta})$ – ортогональная проекция вектора $\vec{\theta}$ на пространство L , где L обозначает ортогональное дополнение к $[1, 1, \dots, 1]^T$. Заметим, что

$$Q\vec{\theta} = QP(\vec{\theta}). \quad (5.2)$$

Для любого $a > 0$, мы имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta}} d\vec{\theta} = \frac{\pi^{n/2} a^{-n/2}}{\sqrt{\det \widehat{Q}}} \quad (5.3)$$

и

$$\int_L e^{-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta}} dL = \int_L e^{-a\vec{\theta}^T Q\vec{\theta}} dL = \frac{\pi^{(n-1)/2} a^{-(n-1)/2} n^{1/2}}{\sqrt{\det \widehat{Q}}}. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.2. Заметим, что

$$\sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^2 = \vec{\theta}^T Q\vec{\theta}. \quad (5.5)$$

Диагональ куба $U_n(\pi/2)$ равна $\pi n^{1/2}$. Используя (5.2), мы находим, что

$$\int_{U_n(\pi/2)} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^2\right) d\vec{\theta} \leq \pi n^{1/2} \int_L e^{-(1/2) \vec{\theta}^T Q\vec{\theta}} dL. \quad (5.6)$$

Комбинируя (5.4) и 5.6, мы получаем (4.20).

Заметим, что для некоторой функции $g_1(\vec{\theta}) = g_1(\theta_2, \dots, \theta_n)$

$$\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta} = \frac{\phi_1(\vec{\theta})^2}{d_1 + 1} + g_1(\vec{\theta}). \quad (5.7)$$

Также напомним (см. (3.14)), что

$$\min_j d_j \geq \frac{\gamma n}{2}. \quad (5.8)$$

Комбинируя (5.7) и (5.8), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta}) d\vec{\theta} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a g_1(\theta_2, \dots, \theta_n)) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-a\phi_1(\vec{\theta})^2}{d_1 + 1}\right) d\theta_1 \right) d\theta_2 \dots d\theta_n \\ &= (1 + O(\exp(-\tilde{c}n^{2\varepsilon}))) \int_{|\phi_1(\vec{\theta})| \leq (1/2)c_n^{-1} n^{1/2+\varepsilon}} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta}) d\vec{\theta} \end{aligned} \quad (5.9)$$

для некоторой $\tilde{c} > 0$, зависящей только от γ и a , где c_∞ – константа из (3.13). Комбинируя аналогичные (5.9) выражения для $\phi_1, \dots, \phi_n$, находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_{\|\vec{\phi}(\vec{\theta})\|_\infty \leq (1/2)c_\infty^{-1}n^{1/2+\varepsilon}} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta}) d\vec{\theta} \\ &= \left(1 + O\left(\exp(-cn^{2\varepsilon})\right)\right) \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta}) d\vec{\theta} \end{aligned} \quad (5.10)$$

для некоторой $c > 0$, зависящей только от γ и a . Используя (5.10) и (3.13), мы получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\int_{U_n((1/2)n^{-1/2+\varepsilon})} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta}) d\vec{\theta} = (1 + O(\exp(-cn^{2\varepsilon}))) \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta}) d\vec{\theta}. \quad (5.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.3. Заметим, что

$$\|P(\vec{\theta})\|_\infty = \|\vec{\theta} - \bar{\theta}[1, 1, \dots, 1]^T\|_\infty \leq 2\|\vec{\theta}\|_\infty, \quad (5.12)$$

где

$$\bar{\theta} = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n}{n}. \quad (5.13)$$

Поэтому

$$U_n\left(\frac{1}{2}n^{-1/2+\varepsilon}\right) \subset \{\vec{\theta} \mid P(\vec{\theta}) \in U_n(n^{-1/2+\varepsilon})\} \quad (5.14)$$

Используя (5.2), (5.5) и (5.14), находим, что

$$\begin{aligned} & \int_{L \cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^2\right) dL = \int_{L \cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{\theta}^T Q \vec{\theta}\right) dL \\ &= \int_{P(\vec{\theta}) \in U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{\theta}^T \widehat{Q} \vec{\theta}\right) d\vec{\theta} / \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} nx^2\right) dx \\ &\geq \frac{n^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{U_n((1/2)n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{\theta}^T \widehat{Q} \vec{\theta}\right) d\vec{\theta}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Комбинируя (5.3), (5.11) и (5.15), мы получаем (4.29).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. При $n \rightarrow \infty$

$$\int_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\left(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q} \vec{\theta} - b \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4\right) d\vec{\theta} = \Theta_{k_1, k_2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q} \vec{\theta}) d\vec{\theta} \right), \quad (5.16)$$

где константы $k_1, k_2 > 0$ зависят только от a, b и γ .

В данной работе мы приводим только схему доказательства предложения 5.1. Подробное доказательство можно найти в [10] (см. лемму 8.3).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.1. Так как $a, b > 0$, то

$$\int_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\left(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q} \vec{\theta} - b \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4\right) d\vec{\theta} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q} \vec{\theta}) d\vec{\theta}. \quad (5.17)$$

Пусть

$$R_k(\vec{\theta}) = 8bn \sum_{j=k}^n \theta_j^4, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (5.18)$$

Представляя интеграл в виде повторного, можно показать, что

$$\begin{aligned} & \int_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \phi_j^4 \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta} - R_k(\vec{\theta})) d\vec{\theta} \\ & \leq c'n^2 \int_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta} - R_k(\vec{\theta})) d\vec{\theta} \\ & \quad + O(\exp(-cn^{2\varepsilon})) \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta}) d\vec{\theta} \end{aligned} \quad (5.19)$$

для некоторых констант $c, c' > 0$, зависящих только от a, b и γ .

Из (5.19) можно получить

$$\begin{aligned} & \int_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \theta_j^4 \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta} - R_k(\vec{\theta})) d\vec{\theta} \\ & \leq \frac{c'}{n^2} \int_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta} - R_k(\vec{\theta})) d\vec{\theta} \\ & \quad + O(\exp(-c_1 n^{2\varepsilon})) \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta}) d\vec{\theta}; \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} & \int_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta} - R_k(\vec{\theta})) d\vec{\theta} \\ & \geq \left(1 + \frac{c'_2}{n}\right) \int_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta} - R_{k+1}(\vec{\theta})) d\vec{\theta} \\ & \quad + O(\exp(-c_2 n^{2\varepsilon})) \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta}) d\vec{\theta}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

для некоторых констант $c_1, c'_1, c_2, c'_2 > 0$, зависящих только от a, b и γ . Заметим, что

$$b \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4 \leq 8bn \sum_{j=1}^n \theta_j^4 = R_1(\vec{\theta}). \quad (5.22)$$

Используя несколько раз неравенство (5.21) для $k = 1, 2, \dots, n-1$, а потом комбинируя с (5.22) и (5.17), можно получить (5.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Пусть

$$F(\vec{\theta}) = \exp\left(-a\vec{\theta}^T \widehat{Q}\vec{\theta} - b \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4\right). \quad (5.23)$$

Заметим, что для $\theta \in L$,

$$F(\vec{\theta}) = \exp\left(-a \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^2 - b \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4\right). \quad (5.24)$$

Так как подынтегральное выражение (4.7) инвариантно относительно равномерного сдвига всех $\theta_j \bmod \pi$, а также V_0 переходит в себя, мы можем зафиксировать $\bar{\theta} = 0$ и домножить на отношение промежутка интегрирования π к длине $n^{-1/2}$ вектора $(1/n)[1, 1, \dots, 1]^T$. Получаем, что

$$\int_{V_0} \exp\left(-a \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^2 - b \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4\right) d\vec{\theta} = \pi n^{1/2} \int_{L \cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} F(\vec{\theta}) dL. \quad (5.25)$$

Аналогично (5.15) находим, что

$$\begin{aligned} \int_{L \cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} F(\vec{\theta}) dL &= \int_{P(\vec{\theta}) \in U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} F(\vec{\theta}) d\vec{\theta} / \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-anx^2} dx \\ &= \left(\frac{\pi}{an}\right)^{-1/2} \int_{P(\vec{\theta}) \in U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} F(\vec{\theta}) d\vec{\theta}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Используя (5.11) и (5.14), получаем, что

$$\int_{P(\vec{\theta}) \in U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} F(\vec{\theta}) d\vec{\theta} = \int_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} F(\vec{\theta}) d\vec{\theta} + O(\exp(-cn^{2\varepsilon})) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\vec{\theta}^T \hat{Q} \vec{\theta}}. \quad (5.27)$$

Комбинируя (5.16), (5.25), (5.26) и (5.27), мы получаем (4.7).

6. Заключительные замечания. Комбинируя (4.2), (4.5), (4.6), (4.30), (5.25), (5.26), (5.27), находим, что имеет место следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть предположения теоремы 2.1 выполнены. Тогда

$$EO(G) = (1 + O(n^{-1+6\varepsilon})) 2^{|EG|-1/2} \pi^{-n+1/2} n \text{Int}, \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned} \text{Int} &= \int_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{\theta}^T \hat{Q} \vec{\theta} - \frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4\right) d\vec{\theta}, \\ \hat{Q} &= Q + J, \quad \Delta_{jk} = \theta_j - \theta_k, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $Q = Q(G)$ – матрица Лапласа, а J – матрица, все элементы которой 1.

Интеграл (6.2) можно оценить более точно для конкретных классов графов и получить асимптотические формулы для $EO(G)$, подобные (1.1). Например, при четных $n \rightarrow \infty$

$$EO(K_{n,n}) = e^{-1} \frac{2^{n^2+n-1/2}}{\pi^{n-1/2} n^{n-1}} (1 + O(n^{-1/2+\varepsilon})) \quad (6.3)$$

для любого $\varepsilon > 0$, где $K_{n,n}$ – полный двудольный граф с n вершинами в каждой доле.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B.D. McKay, “The asymptotic numbers of regular tournaments, Eulerian digraphs and Eulerian oriented graphs”, *Combinatorica*, **10:4** (1990), 367–377.

- [2] M. Mihail, P. Winkler, “On the number of Eulerian orientations of a graph”, *Algorithmica*, **16**:4-5 (1996), 402–414.
- [3] M. Las Vergnas, “Le polynôme de Martin d’un graphe eulérien”, *Ann. Discrete Math.*, **17** (1983), 397–411.
- [4] A. Schrijver, “Bounds on the number of Eulerian orientations”, *Combinatorica*, **3**:3-4 (1983), 375–380.
- [5] M. Las Vergnas, “An upper bound for the number of Eulerian orientations of a regular graph”, *Combinatorica*, **10**:1 (1990), 61–65.
- [6] M. Fiedler, “Algebraic connectivity of graphs”, *Czechoslovak Math. J.*, **23** (98) (1973), 298–305.
- [7] B. Mohar, “The Laplacian spectrum of graphs”, *Graph Theory, Combinatorics, and Applications*, Vol. 2, Wiley-Intersci. Publ., John Wiley & Sons, New York, 1991, 871–898.
- [8] G. Kirchhoff, “Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird”, *Ann. Phys. Chem.*, **148**:12 (1847), 497–508.
- [9] B. D. McKay, R. W. Robinson, “Asymptotic enumeration of eulerian circuits in the complete graph”, *Combin. Probab. Comput.*, **7**:4 (1998), 437–449.
- [10] M. Isaev, “Asymptotic behaviour of the number of Eulerian circuits”, *Electron. J. Combin.*, **18**:1 (2011), 219, arXiv: 1104.3046.

М. И. Исаев

Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Centre de Mathématiques Appliquées,
École Polytechnique, Франция
E-mail: isaev.m.i@gmail.com

Поступило

03.09.2011

Исправленный вариант

21.04.2012