Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, Расширения $GQ(4, 2)$, сильно регулярный случай, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 113–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm925>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:26:44

УДК 519.14

РАСШИРЕНИЯ $GQ(4, 2)$, СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЙ СЛУЧАЙ

А. А. Махнев

Сильно регулярный локально $GQ(4, 2)$ граф является графом с параметрами $(126, 45, 12, 8)$ или $(190, 45, 12, 10)$. В первом случае хорошо известны существование и единственность соответствующего локально $GQ(4, 2)$ графа. Установлено, что гипервал из $GQ(4, 2)$ на десяти вершинах является либо графом Петерсена, либо 5-призмой Мёбиуса, либо состоит из двух $(2, 3)$ -подграфов, соединенных тремя ребрами. Получено описание однородных решений $GQ(4, 2)$ с сильно регулярным точечным графом, в частности, дан отрицательный ответ на вопрос Ф. Бюкенхаута о существовании локально $GQ(4, 2)$ графа с параметрами $(190, 45, 12, 10)$.

Библиография: 10 названий.

Геометрия G ранга 2 – это система инцидентности с множеством точек $\mathcal{P}$ и множеством блоков $\mathcal{B}$ (без повторяющихся блоков). При этом каждый блок можно отождествить с множеством инцидентных ему точек и инцидентность становится обычным включением. Две различные точки из $\mathcal{P}$ называются *коллинеарными*, если они лежат в общем блоке. *Вычетом G_a геометрии G в точке a* называется геометрия с множеством точек $\mathcal{P}_a$, коллинеарных с a , и множеством блоков $\mathcal{B}_a = \{B - \{a\} \mid a \in B \in \mathcal{B}\}$.

Пусть $\mathcal{F}$ – семейство геометрий ранга 2. Геометрия G ранга 2 называется *$\mathcal{F}$ -расширением*, если каждый вычет G_a принадлежит $\mathcal{F}$. *Точечный граф* $\Gamma = \Gamma(G)$ – это граф с множеством вершин $\mathcal{P}$, в котором две различные вершины смежны, если они коллинеарны. Диаметр геометрии, связность, расстояние между двумя точками и т.п. соответствуют этим понятиям в графе Γ . Для вершины a графа Γ через $[a]$ обозначим *окрестность вершины a* , т.е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех смежных с a вершин. Положим $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Для подграфа Δ из Γ через $K_i(\Delta)$ обозначим множество вершин вне Δ , смежных с i вершинами из Δ . Полный двудольный граф с долями порядков m, n назовем *(m, n) -графом*.

Пусть $a \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{B}$ и $a \notin B$ (пара (a, B) называется *антифлагом*). Число точек из B , коллинеарных с a , обозначим через $f(a, B)$. Геометрия G называется *φ -однородной*, если $f(a, B) = 0$ или φ для любого антифлага (a, B) ; G называется *сильно φ -однородной*, если $f(a, B) = \varphi$ для любого антифлага (a, B) . Если любые два блока из $\mathcal{B}$ пересекаются не более чем по одной точке, то блоки называются *прямыми*.

Геометрия G называется *α -частичной геометрией порядка (s, t)* , если каждая прямая содержит $s + 1$ точек, каждая точка лежит на $t + 1$ прямых и геометрия является сильно α -однородной (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Геометрия $pG_1(s, t)$ называется *обоб-*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00462.

ценным четырехугольником порядка (s, t) и обозначается $GQ(s, t)$. Далее, $pG_{s+1}(s, t)$ называется 2-схемой Штейнера и $pG_t(s, t)$ – сеть.

Геометрия EpG_α называется расширением α -частичных геометрий, если она связана и каждый вычет есть $pG_\alpha(s, t)$ для подходящих s, t . Ввиду связности порядок (s, t) не зависит от выбора вычета и геометрия обозначается $EpG_\alpha(s, t)$. Геометрия $EpG_\alpha(s, t)$ называется треугольной, если она $(\alpha + 1)$ -однородна.

Пусть Γ – граф, $a, b \in \Gamma$; число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ ($\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом). Граф Γ называется вполне регулярным с параметрами (v, k, λ, μ) ; он имеет v вершин, регулярен валентности k , любое его ребро лежит в λ треугольниках и любая пара вершин, находящихся на расстоянии 2, имеет μ общих соседей. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется сильно регулярным.

Подграф точечного графа $GQ(s, t)$ называется гиперовалом, если он является регулярным графом без треугольников валентности $t + 1$ с четным числом вершин. Заметим, что в треугольных расширениях $GQ(s, t)$ в качестве μ -подграфов могут выступать лишь гиперовалы. В [1] были описаны треугольные расширения обобщенных четырехугольников с $s = 2$ и получен список сильно регулярных локально $GQ(s, t)$ графов для $s = 3, 4$ и классических GQ . В числе нерешенных задач отмечено существование локально $GQ(4, 2)$ графов с параметрами $(190, 45, 12, 10)$. Работа [2] завершила классификацию треугольных расширений обобщенных четырехугольников с $s = 3$ (локально $GQ(3, t)$ графов), начатую в работах автора [3] и Д. Пасечника [4], [5]. При этом важной составной частью исследований явилась классификация гиперовалов в $GQ(3, t)$.

Цель данной работы – классификация однородных $EGQ(4, 2)$ с сильно регулярным точечным графом. При этом удалось доказать несуществование вполне регулярных локально $GQ(4, 2)$ графов с $\mu = 10$.

Хорошо известно [6], что существует единственный $GQ(4, 2)$, обозначаемый через $H_3(4)$. Пусть Γ – точечный граф для $H_3(4)$. Тогда Γ – сильно регулярный граф с параметрами $(45, 12, 3, 3)$, в котором каждая пара точек регулярна. То есть, если a, b – не смежные точки, то Γ содержит единственную отличную от a, b точку c , смежную со всеми тремя точками из $[a] \cap [b]$.

ТЕОРЕМА. Не существует вполне регулярных локально $GQ(4, 2)$ графов с $\mu = 10$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G – однородное расширение $GQ(4, 2)$ с сильно регулярным точечным графом Γ . Тогда либо G является одноточечным расширением (в частности, 2 – $(46, 6, 3)$ -схемой), либо Γ – единственный локально $GQ(4, 2)$ граф с параметрами $(126, 45, 12, 8)$.

Существование одноточечного расширения $GQ(4, 2)$ установлено в [7]. Существование локально $GQ(4, 2)$ графа с параметрами $(126, 45, 12, 8)$ хорошо известно, а единственность доказана в [8]. Это граф на множестве векторов нормы 1 в 6-мерном ортогональном пространстве над $GF(3)$ типа “–” с отношением смежности, задаваемым ортогональностью, имеющий группу автоморфизмов $O_6^-(3)$. Интересно, что этот граф имеет 3-накрытие, которое является локально $GQ(4, 2)$ графом диаметра 4. Отметим, что Пасечником [9] найден еще один (не вполне регулярный) локально $GQ(4, 2)$ граф. Перейдем к доказательству теоремы.

ЛЕММА 1. Пусть Λ – гиперовал из $GQ(4, 2)$ на десяти вершинах, $K_i = K_i(\Lambda)$, $x_i = |K_i|$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) $x_0 = x_4 = 0$, $x_2 = 30$, $x_6 = 5$, Λ – граф Петерсена, граф Петерсена имеет

точно пять максимальных паросочетаний, каждое из которых состоит из трех ребер и лежит в окрестности точно одной точки из K_6 ;

- 2) $x_0 = 4$, $x_2 = 18$, $x_4 = 12$, $x_6 = 1$, Λ состоит из двух $(2,3)$ -подграфов, соединенных тремя ребрами, лежащими в окрестности точки из K_6 ;
- 3) $x_0 = 5$, $x_2 = x_4 = 15$, $x_6 = 0$, Λ является 5-призмой Мёбиуса (см. рис. 1) и каждая точка из K_4 либо смежна с парой вертикальных ребер, либо с парой ребер, лежащих на основании призмы, инцидентных противоположным точкам в некотором четырехугольнике из Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из подсчета числа ребер между Λ и $\Gamma - \Lambda$ следует, что коэффициенты x_i удовлетворяют системе уравнений

$$x_0 + x_2 + x_4 + x_6 = 30, \quad 2x_2 + 4x_4 + 6x_6 = 90. \quad (*)$$

Если прямая (не) пересекает Λ , то мы назовем ее *секущей* (*внешней*). Покажем, что если секущая L содержит по точке из K_i, K_j, K_r , то $i + j + r = 10$. В самом деле, L содержит две точки из Λ и каждая из этих точек смежна с двумя точками из $\Lambda - L$. Далее, каждая точка из $\Lambda - L$ смежна с единственной точкой из L , поэтому $(i - 2) + (j - 2) + (r - 2) = (|\Lambda| - 2) - 4$.

Если секущая L содержит точку a из K_6 , то L содержит две точки из K_2 , а каждая точка из $[a] \cap \Lambda$ смежна с двумя точками из $\Lambda - [a]$ (всего получается двенадцать ребер этого вида). Значит, каждая точка из $\Lambda - [a]$ смежна с тремя точками из $\Lambda \cap [a]$ и $\Lambda - [a]$ — коклика. Если же секущая не содержит точек из K_6 , то она содержит две точки из K_4 и одну из K_2 . Отсюда $x_2 = 6x_6 + x_4$ и уравнения $(*)$ принимают вид $x_0 + 2x_4 + 7x_6 = 35$, $3x_4 + 9x_6 = 45$. Теперь $x_0 = 5 - x_6$, $x_2 = 3(5 + x_6)$, $x_4 = 3(5 - x_6)$.

Если a, b — различные точки из K_6 , то $[a] \cap [b]$ содержит три точки из Λ и по регулярности пары a, b найдется третья точка c , смежная со всеми вершинами из $[a] \cap [b]$. Ясно, что $c \in \Lambda$ и Λ однозначно восстанавливается до графа Петерсена.

В этом случае если $d \in K_4$, то $\Lambda - [d]$ не расщепляется ребрами из Λ ; противоречие с тем, что каждая точка из Λ смежна с некоторой вершиной на внешней прямой из $d^\perp$. Значит, $x_4 = 0$ и утверждение 1) леммы выполняется.

Рис. 1. 5-призма Мёбиуса

Пусть $x_6 = 1$ и $a \in K_6$. Тогда $\Lambda - [a]$ является 4-коккликой и $x_0 = 4, x_2 = 18, x_4 = 12$. Пусть $\Lambda - [a] = \{e_1, \dots, e_4\}$. Если $[e_1] \cap [e_2]$ содержит три вершины из $\Lambda \cap [a]$, то $[e_3] \cap [e_4]$ содержит три оставшихся вершины из $\Lambda \cap [a]$ и Λ – граф из утверждения леммы.

Предположим, что $[e_i] \cap [e_j]$ содержит не более двух вершин из $\Lambda \cap [a]$ для любых различных i, j . Если $[e_i] \cap [e_j]$ содержит две точки x, y из $\Lambda \cap [a]$, то по регулярности пары x, y вершина a смежна с некоторой точкой $b \in ([e_i] \cap [e_j]) - \Lambda$. Но по строению графа $a^\perp$ получим $b \in K_2$; противоречие.

Допустим, наконец, что ребра из $\Lambda \cap [a]$ можно перенумеровать в виде $\{e_1e_2, e_3e_4\}, \{e_1e_3, e_2e_4\}, \{e_1e_4, e_2e_3\}$. Если $b \in K_4$, то $[b]$ содержит по две точки из $\Lambda \cap [a]$ и $\Lambda - [a]$. Пусть $\Lambda \cap [b]$ содержит e_2, e_3, e_1e_2 . Тогда необходимо $\Lambda \cap [b]$ содержит и e_1e_3 . По регулярности пары e_1e_2, e_1e_3 некоторая точка c из $[a]$ смежна с e_2, e_3 . Как и выше, по структуре $[a]$ точка $c \in K_2$; противоречие.

Пусть $x_6 = 0$. Выражения для x_i получаются из уравнений (*).

Заметим, что внешняя прямая содержит либо по две точки из K_0, K_4 и одну из K_2 , либо по одной точке из K_0, K_4 и три из K_2 , либо пять точек из K_2 . Соответствующие прямые назовем прямыми первого, второго и третьего типов. Если имеется i прямых первого типа, то $x_4 = 15 = 2i + j$.

Так как Λ не является графом Петерсена, Λ содержит 4-цикл $xuzw$. Заметим, что Λ не содержит $(2, 3)$ -подграфов, иначе вершина, дополняющая его до $(3, 3)$ -подграфа, лежит в K_6 . Теперь $[x] \cap [z]$ содержит y, w и вершину a из K_4 , смежную с ребрами, инцидентными в Λ с x, z . По регулярности пары x, z некоторая точка $b \in K_4$ смежна с y, w, a . Отсюда прямая, проходящая через a, b , содержит две точки из K_0 и точку $c \in K_2$. Легко понять, что Λ является 5-призмой или 5-призмой Мёбиуса (см. рис. 1). Но в 5-призме по 4-циклам $122'1', 455'4'$ строятся точки из K_4 : $231'5', 341'5'$, поэтому пересечение $[231'5'] \cap [341'5']$ содержит три точки $3, 1', 5' \in \Lambda$.

Итак, Λ является 5-призмой Мёбиуса. Прямые из $(1245)^\perp$ содержат точки $1, 2, 12, 123'4'$ (по циклу $233'2'$); $4, 5, 45, 452'3'$ (это две секущие) и $1'2'4'5', 33'$ и две точки из K_0 (по циклу $15'51$). Далее, прямая из $4^\perp \cap (44')^\perp$ содержит либо $44'22', 11'44'$, либо $1244', 1'2'44'$. Но последний случай невозможен, так как секущая, проходящая через $1, 2$, содержит 1245 и $123'4'$. Итак, прямые из $(44')^\perp$ имеют вид: $4, 4', 11'44', 22'44'; 2351', 15'2'3'$, две точки из K_0 ; $12, 1'2', 33'55'$ и точка из K_0 .

В подграфе Λ имеется пять 4-угольников и десять точек из K_4 смежны с ребрами на основаниях призмы, инцидентными парам противоположных точек на этих 4-угольниках. Оставшиеся пять точек из K_4 смежны с парами вертикальных ребер в Λ .

ЛЕММА 2. *Сильно регулярный локально $GQ(4, 2)$ граф Γ является графом с параметрами $(126, 45, 12, 18)$ или $(190, 45, 12, 10)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ имеет параметры $(v, 45, 12, \mu)$. Тогда μ четно, $\mu = 2x$ и $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$ является квадратом. Отсюда $x^2 - 14x + 81$ является квадратом, $3 \leq x \leq 9$. В этом случае x не сравним с 1 по модулю 3. Если x делится на 3, то $x^2 - 14x + 81$ делится на 9 и $x = 9$. Если же $x = 8$, то $x^2 - 14x + 81 = 33$ не является квадратом. Таким образом, $\mu = 18$ или 10. Лемма доказана.

Пусть до конца работы Γ – вполне регулярный локально $GQ(4, 2)$ граф с $\mu = 10$. Для вершин $x, y \in \Gamma$ через $\Gamma(x, y)$ обозначим подграф $[x] \cap [y]$. Зафиксируем вершины $a, b \in \Gamma$, находящиеся на расстоянии 2, и положим $\Lambda = \Gamma(a, b)$.

ЛЕММА 3. *Если $[b] \cap K_6(\Lambda)$ не пусто, то Λ – граф Петерсена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – секущая из $[b]$, содержащая точку c из $K_6(\Lambda)$. Положим $\Sigma = [a] \cap [c]$. Тогда $b \in K_6(\Sigma)$.

Заметим, что любая вершина из $[c] \cap \Lambda$ смежна с двумя вершинами из $\Lambda - [c]$ и между $[c] \cap \Lambda$ и $\Lambda - [c]$ имеется точно двенадцать ребер. Значит, $\Lambda - [c]$ является 4-коккликой и любая вершина из $\Lambda - [c]$ смежна с 3-коккликой из $\Lambda \cap [c]$. Теперь $\Lambda - [c] \subseteq K_6 \cap [a]$ и ввиду леммы 1 Σ – граф Петерсена.

ЛЕММА 4. Если Λ – призма Мёбиуса, то $[x] \cap [y]$ – призма Мёбиуса для любых вершин $x, y \in \Gamma$, находящихся на расстоянии 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in [b] \cap \Gamma_2(a)$, $\Sigma = [a] \cap [x]$. Если $x \in K_0(\Lambda) \cup K_4(\Lambda)$, то $b \in K_0(\Sigma) \cup K_4(\Sigma)$ и из лемм 1, 3 следует, что Σ – призма Мёбиуса.

Предположим, что $x \in K_2(\Lambda)$ и Σ – граф Петерсена. Пусть B – прямая из $[b]$, содержащая ребро из $\Lambda \cap [x]$. Тогда $B^* = (B - \{b\}) \cup \{x\}$ – секущая для Σ . Значит, некоторая точка y из B лежит в $K_4(\Lambda) \cap K_6(\Sigma)$. Из предыдущего абзаца следует, что $[a] \cap [y]$ – призма Мёбиуса, а по лемме 3 $[a] \cap [y]$ – граф Петерсена; противоречие.

Итак, Σ – призма Мёбиуса для любого $x \in [b] \cap \Gamma_2(a)$. Но граф $\Gamma_2(a)$ связан, поэтому $[a] \cap [x]$ – призма Мёбиуса для любой точки x , не смежной с a . Лемма доказана.

Рис. 2

Из лемм 3, 4 следует, что в графе Γ либо все μ -подграфы являются графами Петерсена, либо все они призмы Мёбиуса. Пусть $x \in [b] \cap \Gamma_2(a)$, $\Sigma = \Gamma(a, x)$.

ЛЕММА 5. Если Λ – призма Мёбиуса и вершина x смежна с парой вертикальных ребер из Λ , то эти ребра являются вертикальными в призме Мёбиуса Σ , причем их ориентация сохраняется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[x] \cap \Lambda$ содержит ребра $22'$, $44'$. Допустим, что эти ребра не являются вертикальными в Σ . Тогда некоторая пара несмежных точек из $[x] \cap \Lambda$ лежит в 4-угольнике из Σ . Но $[2] \cap [4]$ содержит в $[a]$ точки 3 и $22'44'$, не лежащие в Σ , поэтому можно считать, что $[2] \cap [4']$ содержит две точки $123'4'$ и $234'5'$ из Σ . Но в этом случае $[4] \cap [234'5']$ содержит в $[a]$ точки 3, $4'$ и $452'3'$. Противоречие с тем, что $452'3'$ не смежна с $2'$ в графе Σ (см. рис. 2(a)).

Допустим, что ребра $22'$, $44'$ являются вертикальными в Σ , но сменили ориентацию, т.е. $[2] \cap [4']$ и $[2'] \cap [4]$ содержат по точке из Σ . Без ограничения общности $123'4' \in \Sigma$, поэтому и $1'2'34 \in \Sigma$. Подграф $[2] \cap [4]$ содержит в $[a]$ вершины 3, $22'44'$ и 1245 , поэтому $[3]$ содержит два ребра $\{4, 1'2'34\}$ и $2y$ из Σ , а $[1245]$ содержит ребра $\{2, 123'4'\}$ и $4z$ (см. рис. 2(б)). Противоречие с тем, что 1245 и $123'4'$ не смежны в $[a]$.

Рис. 3. Подграф $[a] \cap [x]$

ЛЕММА 6. Все μ -подграфы из Γ являются графами Петерсена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть $[x] \cap \Lambda$ содержит ребра $22', 44'$. По лемме 5 подграф $[2] \cap [4]$ содержит точку 1245 из Σ ; симметрично, $1'2'4'5' \in \Sigma$. Далее, $[4] \cap [1'2'4'5']$ содержит точки $4', 1245$ и $1'2'34$ из $[a]$, поэтому $1'2'34 \in K_4(\Sigma)$ и $[1'2'34]$ содержит ребра $\{2', 1'2'4'5'\}$ и $4y$ из Σ , $y = 1'5'34$. Теперь Σ однозначно восстанавливается до графа с рис. 3, причем $[1]$ содержит 3-кликку из Σ ; противоречие. Лемма доказана.

Пусть $c \in K_6(\Lambda) \cap [b]$ и $[c] \cap \Lambda$ состоит из трех изолированных ребер pq, uw, xy . Тогда $[a]$ содержит единственную точку d , смежную с этими ребрами (см. рис. 4). Так как $\Sigma = \Gamma(u, x)$ – граф Петерсена, то $w, y \in K_6(\Sigma)$ и $[w] \cap [y]$ содержит три изолированных ребра ad, bc, ef .

Рис. 4. Подграф $[a] \cap [b]$

ЛЕММА 7. Подграф $\Omega = \Gamma(a, e)$ содержит все три ребра pq, uw, xy .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $d \in K_6(\Omega)$, поэтому любая другая точка из $[a] \cap K_6(\Omega)$ смежна с тремя точками из $[d] \cap \Omega$. Если Ω не содержит p или q , то $p, q \in K_2(\Omega)$. Пусть L – прямая из $[a]$, содержащая p, q . Тогда L является внешней прямой для гипероваля Ω , содержащего пять точек из $K_2(\Omega)$. По крайней мере одна из этих точек смежна с вершиной из $\{x, y, u, w\}$. Теперь L – внешняя прямая для Λ , и ввиду леммы 1 указанная точка совпадает с d ; противоречие.

ЛЕММА 8. Пусть ad – ребро из Γ . Для любых несмежных вершин $x, y \in \Gamma(a, d)$ найдется содержащий a, d, x, y подграф $\Sigma = \Sigma(ad; x, y)$, состоящий из двух подграфов Σ_1, Σ_2 таких, что Σ_i состоит из трех изолированных ребер и любая вершина из Σ_1 смежна с каждой вершиной из Σ_2 , причем $\Sigma = \Sigma(gh; i, j)$ для любого ребра gh из Σ_1 и пары несмежных вершин $i, j \in \Sigma_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega = \Gamma(x, y)$, z – точка из $[x] \cap K_6(\Omega)$, лежащая на секущей, проходящей через ad . Тогда $\Sigma_2 = [z] \cap \Omega$, и $\Sigma_2 = [r] \cap \Omega$ для единственной вершины $r \in K_6(\Omega) \cap [y]$. Далее, пусть Σ_1 состоит из ребер xz, yr и третьего ребра, смежного с парой несмежных точек из Σ_2 . Последнее утверждение леммы следует из леммы 7. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Пусть ad – ребро из Γ . Тогда $\Gamma(a, d)$ состоит из трех изолированных 4-клик L_1, L_2, L_3 . Пусть $x \in L_1, y \in L_2$ и $\Sigma = \Sigma(ad; x, y)$. Тогда $\Sigma \cap [a] \cap [d]$ содержит по ребру из каждой клики L_i .

Выберем $y \in L_2 - \Sigma$ и положим $\Sigma' = \Sigma(ad; x, y')$. Тогда $\Sigma' \cap (L_2 \cup L_3)$ не пересекает Σ (иначе $\Sigma = \Sigma'$). Далее, единственная точка $x' \in L_1$ не лежит в $\Sigma \cup \Sigma'$. Если теперь $z \in \Sigma \cap L_3$, то $\Sigma(ad; z, y')$ пересекает L_1 по двум точкам, поэтому $\Sigma(ad; z, y')$ совпадает с Σ или с Σ' ; противоречие. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Пусть G – φ -однородное расширение $GQ(4, 2)$ с сильно регулярным точечным графом Γ . Тогда φ четно и не больше $s + 2$. Случай $\varphi = 2$ рассмотрен в теореме. Если $\varphi = 4$, то геометрия сильно однородна и по теореме 7.2 из [10] таких $EGQ(4, 2)$ нет. Если же $\varphi = 6 = s + 2$, то G – одноточечное расширение $GQ(4, 2)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Buekenhout F., Hubaut X. Locally polar spaces and related rank 3 groups // J. Algebra. 1977. V. 45. № 2. P. 391–434.
- [2] Makhnev A. A. Locally $GQ(3, 5)$ -graphs and geometries with short lines // Всеукраинская конференция памяти П. С. Казимирского. Тезисы докл. Львов, 1995. С. 59–60.
- [3] Махнев А. А. Конечные локально $GQ(3, 3)$ графы // Сиб. матем. ж. 1994. Т. 35. № 6. С. 1314–1324.
- [4] Pasechnik D. V. The triangular extensions of a generalized quadrangle of order $(3, 3)$ // Bull. Belg. Math. Soc. 1995. V. 2. P. 509–518.
- [5] Pasechnik D. V. The extensions of the generalized quadrangle of order $(3, 9)$ // Eur. J. Comb. 1996. V. 17. P. 751–755.
- [6] Pain S., Thas J. A. Finite Generalized Quadrangles. Boston: Pitman, 1984.
- [7] Blokhuis A., Brouwer A. E. Uniqueness of a Zara graph on 126 points and nonexistence of a completely regular 2-graph on 288 points // Papers dedicated to J. J. Seidel / ed. J. H. van Lint. Eindhoven Univ. Techn. Report. 84-WSK-03 1984. P. 6–19.
- [8] Cameron P. J. Several $2 - (6, 4, 3)$ designs // Discrete Math. 1991. V. 87. P. 89–90.
- [9] Pasechnik D. V. Extending polar spaces of rank at least 3 // J. Comb. Theory (A). 1995. V. 72. P. 232–242.
- [10] Cameron P. J., Hughes D. R., Pasini A. Extended generalized quadrangles // Geom. Dedic. 1990. V. 35. P. 193–228.