Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Елисеев, Ю. А. Коняев, Д. А. Шапошникова, Об однозначной разрешимости некоторых сингулярно возмущенных краевых задач с нестабильным спектром предельного оператора, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 2, 222–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 02:11:25

Об однозначной разрешимости некоторых сингулярно возмущенных краевых задач с нестабильным спектром предельного оператора

А. Г. Елисеев, Ю. А. Коняев, Д. А. Шапошникова

Статья содержит асимптотическое исследование решения сингулярно возмущенных краевых задач в случае нестабильного спектра предельного оператора. Описаны основные сингулярности решения, построен главный член асимптотики.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm9250

В данной работе рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача в случае нестабильного спектра предельного оператора. Задачи с нестабильным спектром относятся к одним из наиболее трудных сингулярно возмущенных задач. Это так называемые задачи с “точками поворота”. Такие задачи решались различными методами: метод ВКБ [1], метод сращиваемых разложений [2], метод пограничных функций [3]. Недостатком этих методов является локальность их асимптотических разложений. В данной работе строится глобальная асимптотика решения, действующая во всей области интегрирования задачи. Это одна из основных идей метода регуляризации [4]. Большой набор задач, решаемых методом регуляризации, представлен в книге [5]. Предложенный в данной работе подход, конечно, не является универсальным. Природа точек поворота слишком многообразна для этого. Предлагаемый метод применим к определенному виду задач, который будет рассмотрен ниже. Классификация точек поворота и возможные подходы к их решению описаны в работе [6]. Для анализа сингулярно возмущенных нелокальных краевых задач вида

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}(t) = (tA_0 + \varepsilon A_1(t))x(t), \\ F_1 x(0) + F_2 x(1) = \alpha \end{cases} \quad (1)$$

с достаточно гладкой матрицей $A_1(t)$ и матрицей A_0 простой структуры воспользуемся интегральным представлением задачи (1).

ТЕОРЕМА 1. Многоточечная нелокальная краевая задача в $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \\ \sum_{j=1}^m F_j x(t_j) = \alpha, \\ 2 \leq m \leq n, \quad 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1, \end{cases} \quad (2)$$

при условии $A(t), f(t) \in C[0, 1]$,

$$\det F \neq 0, \quad \text{где} \quad F = \sum_{j=1}^m F_j \Phi(t_j)$$

($\Phi(t)$ – произвольная фундаментальная матрица, F_j – матрицы размера $n \times n$) однозначно разрешима, и ее решение представимо в виде

$$x(t) = \Phi(t)C + \sum_{j=1}^m \Phi_j(t) \int_{t_j}^t \Phi^{-1}(s)f(s) ds, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_j(t) &= A(t)\Phi_j(t), \quad j = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^m \Phi_j(t) &= \Phi(t), \\ C &= F^{-1} \left(\alpha - \sum_{j=1}^m F_j \sum_{k=j}^m \Phi_k(t_j) \int_{t_k}^{t_j} \Phi^{-1}(s)f(s) ds \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что соотношение (3) является суммой решений однородного уравнения $\Phi(t)C$ и частных решений специального вида, что проверяется непосредственно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть матрица A_0 имеет полупростую структуру, т.е. существует матрица S_0 такая, что

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= S_0^{-1} A_0 S_0 = \text{diag}\{\Lambda_{01}, \Lambda_{02}\}, \quad \Lambda_{01} = \text{diag}\{\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0q}\}, \\ \Lambda_{02} &= \text{diag}\{\lambda_{0q+1}, \dots, \lambda_{0n}\} \end{aligned}$$

и ее спектр удовлетворяет неравенствам

$$\text{Re}(\lambda_{0j}) \leq -\delta_1 < 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad \text{Re}(\lambda_{0j}) \geq \delta_2 > 0, \quad i = q+1, \dots, n.$$

Тогда сингулярно возмущенная задача (1) при условии

$$\det T \neq 0, \quad \text{где} \quad T = (T_{11}, T_{22}), \quad T_j = F_j S_0 = (T_{1j}, T_{2j}), \quad j = 1, 2,$$

и достаточно малом $\|A_1(t)\|$ однозначно разрешима, и ее решение содержит два погранслоя в окрестности точек $t_1 = 0, t_2 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После невырожденной замены $x(t) = S_0 y(t)$ получим сингулярно возмущенную задачу

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{y}(t) = (t\Lambda_0 + \varepsilon B_1(t))y(t), \\ T_1 y(0, \varepsilon) + T_2 y(1, \varepsilon) = \alpha, \end{cases} \quad (4)$$

эквивалентную интегральному уравнению

$$y(t, \varepsilon) = \Phi(t, \varepsilon)C + \sum_{j=1}^2 \Phi_j(t, \varepsilon) \int_{t_j}^t \Phi^{-1}(s, \varepsilon) B_1(s) y(s, \varepsilon) ds \equiv Ly, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(t, \varepsilon) &= \sum_{j=1}^2 \Phi_j(t, \varepsilon), & \Phi_1(t, \varepsilon) &= \text{diag} \left\{ \exp \left(\frac{t^2}{2\varepsilon} \Lambda_{01} \right), 0 \right\}, \\ \Phi_2(t, \varepsilon) &= \text{diag} \left\{ 0, \exp \left(\frac{t^2 - 1}{2\varepsilon} \Lambda_{02} \right) \right\}. \end{aligned}$$

В условиях теоремы 2 оператор Ly является сжимающим и условие $\det T \neq 0$ однозначно определяет вектор C .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Решение сингулярно возмущенной задачи (1) при условии

$$\text{Re}(\lambda_{0j}(t)) \leq -\delta_0 < 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

имеет один пограничный слой в окрестности точки $t_1 = 0$, а в случае

$$\text{Re}(\lambda_{0j}(t)) \geq \delta_0 > 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

– в окрестности $t_2 = 1$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу с нестабильным спектром

$$\begin{cases} \varepsilon \ddot{x}(t) + t(\dot{x}(t) - x(t)) = 0, \\ x(0, \varepsilon) = \alpha_1, \\ x(1, \varepsilon) = \alpha_2 \end{cases} \quad (6)$$

с помощью одного из вариантов метода, рассмотренного в работах [7], [8], являющегося развитием метода регуляризации [4], [6]. После замены $x(t) = e^{-t/\varepsilon} y(t)$ уравнение (6) приводится к виду

$$\varepsilon^2 \ddot{y}(t) = \varepsilon(2 - t)\dot{y}(t) + (t(1 + \varepsilon) - 1)y(t).$$

Сделав замену $t = t_1 - 10$, перейдем к системе

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{y}(t_1) = (t_1 A_0 + A_1)y(t_1), \\ y(t_1) = (y, \varepsilon \dot{y}), \end{cases}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 + \varepsilon & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -(11 + 10\varepsilon) & 12 \end{pmatrix}.$$

После замены

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 + \varepsilon & 1 \end{pmatrix} z(t)$$

получим систему

$$\varepsilon \dot{z}(t_1) = t_1 \left(\Lambda_0 + \frac{B_1}{t_1} \right) z(t_1) \equiv B(t_1) z(t), \quad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\bar{A} = \text{diag}\{a_{11} \dots a_{nn}\}, \quad \overline{\bar{A}} = A - \bar{A}.$$

Сделаем замену переменных

$$z(t_1) = H(t_1) v(t_1) = \left(E + \frac{\bar{H}_1}{t_1} + \frac{\bar{H}_2}{t_1^2} \right) v(t_1).$$

Тогда получим почти диагональную систему

$$\varepsilon \dot{v}(t_1) = t_1 \left(\Lambda_0 + \frac{\Lambda_{-1}}{t_1} + \frac{\Lambda_{-2}}{t_1^2} + \overline{O}(t_1^{-2}) \right) v(t_1) \equiv Q(t_1) v(t_1), \quad (7)$$

что возможно, если матрицы $B(t_1)$, $Q(t_1)$, $H(t_1)$ связаны соотношением

$$\varepsilon \dot{H}(t_1) = B(t_1) H(t_1) - H(t_1) Q(t_1). \quad (8)$$

Приравнявая в (8) коэффициенты при одинаковых степенях t_1 , получим серию матричных уравнений:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 \bar{H}_1 - \bar{H}_1 \Lambda_0 &= \Lambda_{-1} - P_1 \implies \Lambda_{-1} = \bar{P}_1, \quad \bar{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_0 \bar{H}_2 - \bar{H}_2 \Lambda_0 &= \Lambda_{-2} - P_2 \implies \Lambda_{-2} = \bar{P}_2, \quad \bar{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix}, \\ P_1 &= B_1, \quad P_2 = B_1 \bar{H}_1 - \bar{H}_1 \Lambda_{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Система (9) позволяет записать асимптотическое представление решения в виде

$$\begin{aligned} y(t, \varepsilon) &= S_0 \left(E + \frac{H_1}{(t+10)} + \frac{H_2}{(t+10)^2} \right) \begin{pmatrix} \exp \left(\int_0^{t+10} \lambda_1 ds \right) & 0 \\ 0 & \exp \left(\int_0^{t+10} \lambda_2 ds \right) \end{pmatrix} \\ &\times (E + \overline{O}((t+10)^{-2})) C. \end{aligned} \quad (10)$$

И ответ исходной задачи примет вид

$$x(t, \varepsilon) = e^{-t/\varepsilon} (y(t, \varepsilon, c_1, c_2) (1 + \overline{O}((t+10)^{-2})). \quad (11)$$

где c_1, c_2 определяются из граничных условий.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно заметить, что структура найденного решения (11) позволяет судить об асимптотической устойчивости решения соответствующей задачи Коши на полуоси.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Изложенным выше методом может быть изучена и более сложная задача с нестабильным спектром $\varepsilon \ddot{x}(t) = x(t) - \sqrt{t} \dot{x}$, $x(0) = \alpha_1$, $x(1) = \alpha_2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1977.
- [2] А. Х. Найфэ, *Методы возмущений*, Мир, М., 1976.
- [3] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973.
- [4] С. А. Ломов, *Введение в общую теорию сингулярных возмущений*, Наука, М., 1981.
- [5] В. Ф. Сафонов, А. А. Бободжанов, *Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации*, Изд-во МЭИ, М., 2010.
- [6] А. Г. Елисеев, С. А. Ломов, “Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора”, *Матем. сб.*, **131**:4 (1986), 544–557.
- [7] Ю. А. Коняев, “О некоторых методах исследования устойчивости”, *Матем. сб.*, **192**:3 (2001), 65–82.
- [8] Ю. А. Коняев, “Об однозначной разрешимости некоторых классов нелинейных регулярных и сингулярно возмущенных краевых задач”, *Дифференц. уравнения*, **35**:8 (1999), 1028–1035.

А. Г. Елисеев

Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»
E-mail: predikat@bk.ru, EliseyevAG@mpei.ru

Поступило

06.09.2011

Исправленный вариант

09.04.2013

Ю. А. Коняев

Российский университет дружбы народов, г. Москва
E-mail: ykonyaev@mail.ru

Д. А. Шапошникова

Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»