Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Р. Васуки, Ч. Чамараджу, О некоторых тождествах для отношений тета-функций и некоторых новых модульных уравнениях смешанного порядка, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 685–696

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:46:51

О некоторых тождествах для отношений тета-функций и некоторых новых модульных уравнениях смешанного порядка

К. Р. Васуки, Ч. Чамараджу

В данной статье выведены некоторые тождества для отношений тета-функций. В качестве приложений этих тождеств получены некоторые новые модулярные уравнения смешанного порядка в теории сигнатуры 3, которые аналогичны модулярным уравнениям типа Рамануджана–Вебера и смешанным модулярным уравнениям типа Рамануджана–Шлефли.

Библиография: 25 названий.

DOI: 10.4213/mzm9251

1. Введение. Всюду в дальнейшем будем полагать $|q| < 1$. Для любого комплексного числа a мы используем стандартное обозначение

$$(a)_\infty := (a; q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - aq^n).$$

Общая *тета-функция Рамануджана* [1; с. 197], [2; с. 34] определяется следующим образом:

$$f(a, b) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n(n+1)/2} b^{n(n-1)/2} = (-a; ab)_\infty (-b; ab)_\infty (ab; ab)_\infty, \quad |ab| < 1.$$

Некоторые специальные случаи функции $f(a, b)$ задаются выражениями

$$\begin{aligned} \varphi(q) &:= f(q, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \frac{(-q; -q)_\infty}{(q; -q)_\infty}, \\ \psi(q) &:= f(q, q^3) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} = \frac{(q^2; q^2)_\infty}{(q; q^2)_\infty}, \\ f(-q) &:= f(-q, -q^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2} = (q; q)_\infty. \end{aligned}$$

Работа первого автора была выполнена при финансовой поддержке фонда DST, New Delhi (грант № SR/S4/MS:517/08).

Мы также определяем

$$\chi(-q) = (q; q^2)_\infty.$$

В неотредактированных страницах второй тетради Рамануджана [1] имеется 23 тождества, содержащих отношения тета-функций; все они были доказаны Берндтом и Джангом [3]. Аналогичные 14 тождеств, содержащих отношения тета-функций, найденные на с. 55 потерянной тетради Рамануджана [4], были доказаны Берндтом [5]. Эти тождества сыграли очень важную роль в оценках цепных дробей и инвариантов различных классов. См., например, [6]–[15]. В данной статье выведены некоторые новые тождества для отношений тета-функций и они использованы для получения новых модулярных уравнений смешанного порядка в теории сигнатуры 3. В разделе 2 данной статьи получены некоторые тождества для отношений тета-функций. В разделе 3 выведены модулярные уравнения смешанного порядка в теории сигнатуры 3.

В заключение данного раздела напомним основные определения.

Пусть

$$(a)_k = a(a+1)(a+2) \cdots (a+k-1)$$

и определим обыкновенный гипергеометрический ряд

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z \right] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} z^k, \quad |z| < 1.$$

Будем говорить, что *модуль β имеет степень n , $n \in \mathbb{N}$, над модулем α* , если

$$\frac{{}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 1 \end{matrix}; 1 - \beta \right]}{{}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 1 \end{matrix}; \beta \right]} = n \frac{{}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 1 - \alpha \end{matrix}; 1 - \beta \right]}{{}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ \alpha \end{matrix}; \beta \right]}.$$

Модулярное уравнение порядка n в соотношении между α и β , индуцированное вышеприведенными тождествами и множителем m , определяется так:

$$m := \frac{{}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 1 \end{matrix}; \alpha \right]}{{}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 1 \end{matrix}; \beta \right]} = \frac{z_1}{z_n}.$$

Будем говорить, что *модуль β^* имеет степень n над модулем α^* в теории сигнатуры 3*, если

$$\frac{\left[\begin{matrix} 1/3, 2/3 \\ 1 \end{matrix}; 1 - \beta^* \right]}{{}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1/3, 2/3 \\ 1 \end{matrix}; \beta^* \right]} = n \frac{{}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1/3, 2/3 \\ 1 \end{matrix}; 1 - \alpha^* \right]}{{}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1/3, 2/3 \\ 1 \end{matrix}; \alpha^* \right]}.$$

Модулярное уравнение порядка n в теории сигнатуры 3 – это соотношение между α^* и β^* , индуцированное вышеприведенным тождеством.

2. Тождества относительно тета-функций. Для удобства обозначим $f(-q^n)$ как f_n для целых положительных n . Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\varphi(q) &= \frac{f_2^5}{f_1^2 f_4^2}, & \varphi(-q) &= \frac{f_1^2}{f_2}, & \psi(q) &= \frac{f_2^2}{f_1}, & \psi(-q) &= \frac{f_1 f_4}{f_2}, \\ \chi(q) &= \frac{f_2^2}{f_1 f_4}, & \chi(-q) &= \frac{f_1}{f_2}, & f(q) &= \frac{f_2^3}{f_1 f_4}.\end{aligned}\quad (2.1)$$

ЛЕММА 2.1. *Имеем*

$$3\varphi^2(q)\varphi^2(q^9) + \varphi^4(q^3) = 4 \frac{\chi^3(q^9)\chi^3(q)\varphi^4(q^3)}{\chi^{10}(q^3)}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть β и γ имеют третью и четвертую степени, соответственно, относительно α . Пусть

$$m = \frac{z_1}{z_3} \quad \text{и} \quad m' = \frac{z_3}{z_9}.$$

Если мы положим

$$q = \frac{2t(1+t+t^2)}{1-2t+4t^2},$$

то из [4; с. 345] получим

$$\begin{aligned}\alpha(1-\alpha) &= 16t \left(\frac{1-t}{1+2t} \right)^8 \left(\frac{1-t^3}{1+8t^3} \right), \\ \beta(1-\beta) &= 16t^3 \left(\frac{1-t^3}{1+8t^3} \right)^3, & \gamma(1-\gamma) &= 16t^9 \left(\frac{1-t^3}{1+8t^3} \right), \\ m^2 &= \frac{(1+2t)^4}{1+8t^3}, & m'^2 &= 1+8t^3.\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}3 + \frac{m'}{m} &= 3 + \frac{1+8t^3}{(1+2t)^2} = \frac{4+12t+12t^2+8t^3}{(1+2t)^2} = \frac{4(t^2+t+1)}{1+2t} \\ &= \frac{4(1-t^3)}{(1+2t)(1-t)} = 2^{4/3} \frac{m'}{m} \left[\frac{\beta^{10}(1-\beta)^{10}}{\{\alpha\gamma(1-\alpha)(1-\gamma)\}^3} \right]^{1/24}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Из записи 10 (i) главы 17 [2; с. 122] имеем

$$m = \frac{\varphi^2(q)}{\varphi^2(q^3)} \quad \text{и} \quad m' = \frac{\varphi^2(q^3)}{\varphi^2(q^9)},$$

а из записи 12 (v) главы 17 [2; с. 124] имеем

$$[\alpha(1-\alpha)]^{1/24} = \frac{2^{1/6}q^{1/24}}{\chi(q)}, \quad [\beta(1-\beta)]^{1/24} = \frac{2^{1/6}q^{1/8}}{\chi(q^3)}, \quad [\gamma(1-\gamma)]^{1/24} = \frac{2^{1/6}q^{3/8}}{\chi(q^9)}.$$

Используя эти соотношения в (2.3), получим (2.2).

ЛЕММА 2.2. *Имеем*

$$\varphi^2(q)\varphi^2(q^9) - \varphi^4(q^3) = 4q\varphi(-q^2)\psi(q)\chi^2(q^3)\varphi(-q^{18})\psi(q^9).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из записей 2 (i) и (iii) главы 19 [2; с. 349].

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть*

$$P := q^{1/6} \frac{f_1 f_9}{f_3^2} \quad u \quad Q := q^{1/3} \frac{f_2 f_{18}}{f_6^2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{PQ} - 3PQ = \left(\frac{Q}{P}\right)^3 + \left(\frac{P}{Q}\right)^3. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.1) и определений P и Q имеем

$$PQ = q^{1/2} \frac{\varphi(-q)\psi(q)\varphi(-q^9)\psi(q^9)}{\varphi^2(-q^3)\psi^2(q^3)}, \quad \left(\frac{P}{Q}\right)^3 = \frac{\varphi(-q)\psi^2(q^3)\varphi(-q^9)}{q^{1/2}\psi(q)\varphi^2(-q^3)\psi(q^9)}.$$

Из леммы 2.1 и леммы 2.2 имеем

$$\frac{\varphi^2(-q)\varphi^2(-q^9) - \varphi^4(-q^3)}{3\varphi^2(-q)\varphi^2(-q^9) + \varphi^4(-q^3)} = -q \frac{\varphi(-q^2)\psi(-q)\chi^{12}(-q^3)}{\chi^3(-q)} \frac{\varphi(-q^{18})\psi(-q^9)}{\varphi^4(-q^3)\chi^3(-q^9)}.$$

Теперь, используя (2.1) в правой части этого равенства, получаем

$$\frac{\varphi^2(-q)\varphi^2(-q^9) - \varphi^4(-q^3)}{3\varphi^2(-q)\varphi^2(-q^9) + \varphi^4(-q^3)} = -q \frac{\psi^2(q)\psi^2(q^9)}{\psi^4(q^3)}.$$

Перемножая накрест данное равенство и сокращая на

$$q^{1/2}\varphi(-q)\psi(q)\varphi(-q^9)\varphi^2(-q^3)\psi^2(q^3)\psi(q^9),$$

получим (2.4). Тождество (2.4) было доказано Баргавой с соавторами [16] при использовании модулярного уравнения порядка 3 в теории сигнатуры 4.

ТЕОРЕМА 2.2 [17]. *Пусть*

$$P := \frac{f_1}{q^{1/3}f_9} \quad u \quad Q := \frac{f_2}{q^{2/3}f_{18}}.$$

Тогда

$$PQ + \frac{9}{PQ} + 4 = \left(\frac{P}{Q}\right)^3 + \left(\frac{Q}{P}\right)^3. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в [17; с. 210].

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть*

$$P := q^{1/12} \frac{f_1 f_6}{f_2 f_3} \quad u \quad Q := q^{1/4} \frac{f_3 f_{18}}{f_6 f_9}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (PQ)^6 + \frac{1}{(PQ)^6} - 10 \left[(PQ)^3 + \frac{1}{(PQ)^3} \right] + 20 \\ = \left[\left(\frac{P}{Q}\right)^6 + \left(\frac{Q}{P}\right)^6 \right] \left[(PQ)^3 + \frac{1}{(PQ)^3} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A_n := \frac{f_n}{q^{n/12} f_{3n}}.$$

Тогда

$$P = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{и} \quad Q = \frac{A_3}{A_6}.$$

Из теоремы 2.2, имеем

$$A_1 A_2 A_3 A_6 + \frac{9}{A_1 A_2 A_3 A_6} = (PQ)^3 + \frac{1}{(PQ)^3} - 4. \quad (2.7)$$

Из теоремы 2.1, имеем

$$\frac{A_3 A_6}{A_1 A_2} - 3 \frac{A_1 A_2}{A_3 A_6} = \left(\frac{P}{Q}\right)^3 + \left(\frac{Q}{P}\right)^3.$$

Разрешая относительно $A_1 A_2 / A_3 A_6$, получим

$$\frac{A_1 A_2}{A_3 A_6} = \frac{-T + \sqrt{T^2 + 12}}{6},$$

а также

$$\frac{A_3 A_6}{A_1 A_2} = \frac{T + \sqrt{T^2 + 12}}{2},$$

где

$$T = \left(\frac{P}{Q}\right)^3 + \left(\frac{Q}{P}\right)^3.$$

Тогда из двух верхних тождеств имеем

$$\frac{A_1 A_2}{A_3 A_6} + \frac{A_3 A_6}{A_1 A_2} = \frac{T + 2\sqrt{T^2 + 12}}{3}$$

или

$$9 \left[\left(\frac{A_1 A_2}{A_3 A_6} \right)^2 + \left(\frac{A_3 A_6}{A_1 A_2} \right)^2 \right] = 5T^2 + 30 + 4T\sqrt{T^2 + 12}. \quad (2.8)$$

Из записи 51 главы 25 [17; с. 204] имеем

$$(A_1 A_2)^2 + \frac{9}{(A_1 A_2)^2} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^6 + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^6, \quad (2.9)$$

$$(A_3 A_6)^2 + \frac{9}{(A_3 A_6)^2} = \left(\frac{A_6}{A_3}\right)^6 + \left(\frac{A_3}{A_6}\right)^6. \quad (2.10)$$

Перемножая эти два тождества, а затем используя (2.7) и (2.8), получим

$$4T\sqrt{T^2 + 12} = 8 \left[(PQ)^3 + \frac{1}{(PQ)^3} \right] + \left(\frac{P}{Q}\right)^6 + \left(\frac{Q}{P}\right)^6 - 5T^2 - 30.$$

Возведя обе части равенства в квадрат, после упрощения имеем (2.6).

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть

$$P := \frac{f_1 f_2}{q^{1/4} f_3 f_6} \quad \text{и} \quad Q := \frac{f_3 f_6}{q^{3/4} f_9 f_{18}}.$$

Тогда

$$\left(\frac{Q}{P}\right)^2 = PQ + \frac{9}{PQ} + 3. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_n определено так же, как в теореме 2.3. Легко видеть, что

$$P = A_1 A_2 \quad \text{и} \quad Q = A_3 A_6.$$

Из (2.5) имеем

$$\left(\frac{A_2 A_6}{A_1 A_3}\right)^3 + \left(\frac{A_1 A_3}{A_2 A_6}\right)^3 = PQ + \frac{9}{PQ} + 4. \quad (2.12)$$

Также из (2.4) находим

$$\left(\frac{A_2 A_3}{A_1 A_6}\right)^3 + \left(\frac{A_1 A_6}{A_2 A_3}\right)^3 = \frac{Q}{P} - 3 \frac{P}{Q}. \quad (2.13)$$

Перемножая (2.9) и (2.10), а затем используя (2.12) и (2.13), получим

$$(PQ)^2 + \frac{81}{(PQ)^2} + 9 \left[\left(\frac{P}{Q}\right)^2 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2 \right] = \left(PQ + \frac{9}{PQ} + 4\right)^2 + \left(\frac{Q}{P} - \frac{3P}{Q}\right)^2 - 4.$$

Упрощая это соотношение, выводим (2.11).

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть

$$P := \frac{f_1 f_6}{q^{7/12} f_3 f_{18}} \quad \text{и} \quad Q := \frac{f_2 f_3}{q^{5/12} f_6 f_4}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (PQ)^2 + \frac{9^2}{(PQ)^2} - 2 \left[PQ + \frac{9}{PQ} \right] + 12 \\ = \left[\left(\frac{P}{Q}\right)^6 + \left(\frac{Q}{P}\right)^6 \right] \left[PQ + \frac{9}{PQ} + 3 \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_n определено, как в теореме 2.3. Тогда

$$P = A_1 A_6 \quad \text{и} \quad Q = A_2 A_3.$$

Из (2.5) и последнего соотношения находим

$$PQ + \frac{9}{PQ} + 4 = \left(\frac{A_2 A_6}{A_1 A_3}\right)^3 + \left(\frac{A_1 A_3}{A_2 A_6}\right)^3.$$

Возводя обе части в квадрат, получим

$$\left(\frac{A_2 A_6}{A_1 A_3}\right)^6 + \left(\frac{A_1 A_3}{A_2 A_6}\right)^6 = (PQ)^2 + \frac{9^2}{(PQ)^2} + 8 \left[PQ + \frac{9}{PQ} \right] + 32.$$

Из (2.4) имеем

$$\left(\frac{A_3 A_6}{A_1 A_2}\right) - 3\left(\frac{A_1 A_2}{A_3 A_6}\right) = \left(\frac{Q}{P}\right)^3 + \left(\frac{P}{Q}\right)^3. \quad (2.15)$$

Разрешая относительно $A_1 A_2 / A_3 A_6$, а затем вычисляя обратную величину, получим

$$\frac{A_1 A_2}{A_3 A_6} + \frac{A_3 A_6}{A_1 A_2} = \frac{T + 2\sqrt{T^2 + 12}}{3},$$

где

$$T = \left(\frac{P}{Q}\right)^3 + \left(\frac{Q}{P}\right)^3.$$

Возводя обе части в квадрат, получим

$$9\left[\left(\frac{A_1 A_2}{A_3 A_6}\right)^2 + \left(\frac{A_3 A_6}{A_1 A_2}\right)^2\right] = 5T^2 + 30 + 4T\sqrt{T^2 + 12}. \quad (2.16)$$

Перемножая (2.9) и (2.10), а затем используя (2.15) и (2.16), находим

$$4T\sqrt{T^2 + 12} = 8\left\{PQ + \frac{9}{PQ}\right\} + \left(\frac{P}{Q}\right)^6 + \left(\frac{Q}{P}\right)^6 - 5T^2 + 2.$$

Возводя обе части в квадрат, а затем упрощая, получим (2.14).

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть

$$P := \frac{q^{5/12} f_1 f_{18}}{f_3 f_6} \quad u \quad Q := \frac{q^{1/12} f_2 f_9}{f_6 f_3}.$$

Тогда

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^3 + \left(\frac{Q}{P}\right)^3 = \frac{1}{(PQ)^2} + 1. \quad (2.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_n определено так же, как в теореме 2.3, имеем

$$P := \frac{A_1}{A_6} \quad \text{и} \quad Q := \frac{A_2}{A_3}.$$

Из (2.5) и данного соотношения, получим

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^3 + \left(\frac{Q}{P}\right)^3 - 4 = A_1 A_2 A_3 A_6 + \frac{9}{A_1 A_2 A_3 A_6}.$$

Из (2.11) имеем

$$\frac{1}{(PQ)^2} - 3 = A_1 A_2 A_3 A_6 + \frac{9}{A_1 A_2 A_3 A_6}.$$

Таким образом, из данных двух тождеств получим (2.17).

ТЕОРЕМА 2.7 [18]. Пусть

$$P := \frac{q^{1/12} f_1 f_6}{f_3 f_2} \quad u \quad Q := \frac{q^{1/6} f_2 f_{12}}{f_6 f_4}.$$

Тогда

$$\left[\left(\frac{P}{Q}\right)^6 + \left(\frac{Q}{P}\right)^6\right] \left[(PQ)^2 + \frac{1}{(PQ)^2}\right] + 6 = (PQ)^4 + \frac{1}{(PQ)^4}. \quad (2.18)$$

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть

$$P := \frac{f_1 f_4}{q^{5/12} f_3 f_{12}} \quad \text{и} \quad Q := \frac{f_2^2}{q^{1/3} f_6^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Q}{P}\right)^{24} + \left(\frac{P}{Q}\right)^{24} + 113 \left[\left(\frac{Q}{P}\right)^{12} + \left(\frac{P}{Q}\right)^{12} \right] + (PQ)^4 + \frac{9^4}{(PQ)^4} + 258 \\ &= \left[(PQ)^2 + \frac{9^2}{(PQ)^2} \right] \left[\left(\frac{Q}{P}\right)^{18} + \left(\frac{P}{Q}\right)^{18} + 17 \left\{ \left(\frac{Q}{P}\right)^6 + \left(\frac{P}{Q}\right)^6 \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_n определено так же, как в теореме 2.3. Тогда, изменяя q на q^2 в (2.9), имеем

$$(A_2 A_4)^2 + \frac{9}{(A_2 A_4)^2} = \left(\frac{A_4}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{A_4}\right)^2. \quad (2.20)$$

Перемножая (2.9) и (2.20), получим

$$\begin{aligned} & (A_1 A_2^2 A_4)^2 + \frac{9^2}{(A_1 A_2^2 A_4)^2} + 9 \left\{ \left(\frac{A_1}{A_4}\right)^2 + \left(\frac{A_4}{A_1}\right)^2 \right\} \\ &= \left(\frac{A_4}{A_1}\right)^6 + \left(\frac{A_1}{A_4}\right)^6 + \left(\frac{A_1 A_4}{A_2^2}\right)^6 + \left(\frac{A_2^2}{A_1 A_4}\right)^6. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Отсюда видно, что

$$P = A_1 A_4 \quad \text{и} \quad Q = A_2^2.$$

Используя эти равенства в (2.21), получим

$$(PQ)^2 + \frac{9^2}{(PQ)^2} + 9 \left\{ \left(\frac{A_1}{A_4}\right)^2 + \left(\frac{A_4}{A_1}\right)^2 \right\} = \left(\frac{A_4}{A_1}\right)^6 + \left(\frac{A_1}{A_4}\right)^6 + \left(\frac{P}{Q}\right)^6 + \left(\frac{Q}{P}\right)^6.$$

Полагая в данном соотношении

$$x = \left(\frac{A_1}{A_4}\right)^2 + \left(\frac{A_4}{A_1}\right)^2,$$

находим

$$x^3 - 12x = (PQ)^2 + \frac{9^2}{(PQ)^2} - \left\{ \left(\frac{P}{Q}\right)^6 + \left(\frac{Q}{P}\right)^6 \right\}. \quad (2.22)$$

Из (2.18) и определения A_n имеем

$$\left[\left(\frac{P}{Q}\right)^6 + \left(\frac{Q}{P}\right)^6 \right] x = x^2 - 8. \quad (2.23)$$

Исключая x с помощью (2.22) и (2.23), получим (2.19).

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть

$$P := \frac{f_1 f_2}{q^{1/4} f_3 f_6} \quad \text{и} \quad Q := \frac{f_2 f_4}{q^{1/2} f_6 f_{12}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\frac{P}{Q}\right)^{16} + \left(\frac{Q}{P}\right)^{16} + 85 \left[\left(\frac{P}{Q}\right)^{12} + \left(\frac{Q}{P}\right)^{12} \right] \\ & - 836 \left[\left(\frac{P}{Q}\right)^8 + \left(\frac{Q}{P}\right)^8 \right] + 835 \left[\left(\frac{P}{Q}\right)^4 + \left(\frac{Q}{P}\right)^4 \right] \\ & + \left[(PQ)^4 + \frac{9^4}{(PQ)^4} \right] \left[\left(\frac{P}{Q}\right)^8 + \left(\frac{Q}{P}\right)^8 + 4 \left\{ \left(\frac{P}{Q}\right)^4 + \left(\frac{Q}{P}\right)^4 \right\} + 6 \right] + 7606 \\ & = \left[(PQ)^2 + \frac{9^2}{(PQ)^2} \right] \left[\left(\frac{P}{Q}\right)^{14} + \left(\frac{Q}{P}\right)^{14} - 3 \left\{ \left(\frac{P}{Q}\right)^{10} + \left(\frac{Q}{P}\right)^{10} \right\} \right. \\ & \quad \left. + 51 \left\{ \left(\frac{P}{Q}\right)^6 + \left(\frac{Q}{P}\right)^6 \right\} - 337 \left\{ \left(\frac{P}{Q}\right)^2 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2 \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_n определено также как в теореме 2.3. Тогда имеем

$$P = A_1 A_2 \quad \text{и} \quad Q = A_2 A_4.$$

Из теоремы 2.7 и данного соотношения, находим

$$\left[\left(\frac{A_1 A_4}{A_2^2} \right)^6 + \left(\frac{A_2^2}{A_1 A_4} \right)^6 \right] \left[\left(\frac{P}{Q} \right)^2 + \left(\frac{Q}{P} \right)^2 \right] + 6 = \left(\frac{P}{Q} \right)^4 + \left(\frac{Q}{P} \right)^4. \quad (2.25)$$

Также из теоремы 2.7 получим

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{A_1 A_4}{A_2^2} \right)^{24} + \left(\frac{A_2^2}{A_1 A_4} \right)^{24} \right] + 113 \left[\left(\frac{A_1 A_4}{A_2^2} \right)^{12} + \left(\frac{A_2^2}{A_1 A_4} \right)^{12} \right] + (PQ)^4 + \frac{9^4}{(PQ)^4} + 258 \\ & = \left[(PQ)^4 + \frac{9^2}{(PQ)^2} \right] \left[\left(\frac{A_1 A_4}{A_2^2} \right)^{18} + \left(\frac{A_2^2}{A_1 A_4} \right)^{18} \right] + 17 \left[\left(\frac{A_1 A_4}{A_2^2} \right)^6 + \left(\frac{A_2^2}{A_1 A_4} \right)^6 \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Исключая $(A_2^2/A_1 A_4)$ с помощью (2.25) и (2.26), выводим требуемый результат.

3. Смешанные модулярные уравнения. Шлефли [19] получил некоторые тождества, дающие связь между P и Q , где

$$P := 2^{1/6} [\alpha \beta (1 - \alpha) (1 - \beta)]^{1/24}, \quad Q := \left[\frac{\beta (1 - \beta)}{\alpha (1 - \alpha)} \right]^{1/24},$$

для β со степенями 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19 соответственно над α . Рамануджан записал одиннадцать смешанных модулярных уравнения типа Шлефли в своей первой тетради [1; с. 86, 88]. Рассел [22] получил некоторые модулярные уравнения, дающие

связь между $(\alpha\beta)^{1/8}$ и $\{(1-\alpha)(1-\beta)\}^{1/8}$. Berndt [21; с. 391–396] привел 7 модулярных уравнений типа Рамануджана–Вебера, которые представляют собой модулярные уравнения типа Рассела смешанного порядка. Среди них подобные модулярные уравнения порядков 33, 35 и 55 были впервые получены Вебером [23]; Рамануджаном они были записаны в его первой тетради [1; с. 309]. Рамануджан также записал некоторые модулярные уравнения подобной природы в теории сигнатуры 3. Более подробно это изложено в [21], [23]. В последнее время Чан и Лиану [24], а также Найка [25] получили некоторые новые модулярные уравнения в теории сигнатуры 3. Под влиянием этих результатов в данном разделе мы получим некоторые новые смешанные модулярные уравнения в теории сигнатуры 3, которые аналогичны смешанным модулярным уравнениям типа Шлефли и модулярным уравнениям типа Вебера в классической теории.

ЛЕММА 3.1. *Имеем*

$$\frac{f_1}{q^{1/12}f_3} = 3^{1/4} \left(\frac{(1-\alpha^*)}{\alpha^*} \right)^{1/12}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тождество (3.1) непосредственно следует из следствия 3.4 и следствия 3.5 работы [21; с. 104].

Полагаем

$$\begin{aligned} X &= 3 \left\{ \frac{(1-\alpha^*)(1-\beta^*)(1-\gamma^*)(1-\delta^*)}{\alpha^*\beta^*\gamma^*\delta^*} \right\}^{1/12}, & Y &= \left\{ \frac{\alpha^*\beta^*(1-\gamma^*)(1-\delta^*)}{\gamma^*\delta^*(1-\alpha^*)(1-\beta^*)} \right\}^{1/12}, \\ Z &= \left\{ \frac{\alpha^*\gamma^*(1-\beta^*)(1-\delta^*)}{\beta^*\delta^*(1-\alpha^*)(1-\gamma^*)} \right\}^{1/12}, & W &= \left\{ \frac{\alpha^*\delta^*(1-\beta^*)(1-\gamma^*)}{\beta^*\gamma^*(1-\alpha^*)(1-\delta^*)} \right\}^{1/12}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Если α^* , β^* , γ^* и δ^* имеют степени 1, 2, 3 и 6 соответственно, то*

- (i) $Y - \frac{3}{Y} = W^3 + \frac{1}{W^3},$
- (ii) $X + \frac{9}{X} + 4 = Z^3 + \frac{1}{Z^3},$
- (iii) $Z^6 + \frac{1}{Z^6} - 10 \left(Z^3 + \frac{1}{Z^3} \right) + 20 = \left(W^6 + \frac{1}{W^6} \right) \left[Z^3 + \frac{1}{Z^3} - 1 \right],$
- (iv) $Y^2 = X + \frac{9}{X} + 3,$
- (v) $X^2 + \frac{9^2}{X^2} - 2 \left[X + \frac{9}{X} \right] + 12 = \left\{ W^6 + \frac{1}{W^6} \right\} \left\{ X + \frac{9}{X} + 3 \right\},$
- (vi) $Z^3 + \frac{1}{Z^3} = Y^2 + 1.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.1) и определения Y и W имеем

$$PQ = \frac{1}{Y} \quad \text{и} \quad \frac{Q}{P} = W,$$

где P и Q такие же как и в теореме 2.1. Используя их в (2.4), получим часть (i). Аналогично часть (ii) следует из (2.5) и (3.1). Часть (iii) следует из (2.6) и (3.1), часть (iv) следует из (2.11) и (3.1), часть (v) следует из (2.14) и (3.1), а часть (vi) следует из (2.17) и (3.1).

ТЕОРЕМА 3.2. Если α^* , β^* , γ^* , δ^* имеют степени 1, 2, 2 и 4 соответственно, то

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \left[W^6 + \frac{1}{W^6} \right] \left[Y^2 + \frac{1}{Y^2} \right] + 6 = Y^4 + \frac{1}{Y^4}, \\
 \text{(ii)} \quad & W^{24} + \frac{1}{W^{24}} + 113 \left\{ W^{12} + \frac{1}{W^{12}} \right\} + X^4 + \frac{9^4}{X^4} + 258 \\
 & = \left[X^2 + \frac{9^2}{X^2} \right] \left[W^{18} + \frac{1}{W^{18}} + 17 \left\{ W^6 + \frac{1}{W^6} \right\} \right], \\
 \text{(iii)} \quad & Z^{16} + \frac{1}{Z^{16}} + 85 \left[Z^{12} + \frac{1}{Z^{12}} \right] - 836 \left[Z^8 + \frac{1}{Z^8} \right] + 835 \left[Z^4 + \frac{1}{Z^4} \right] \\
 & + \left[X^4 + \frac{9^4}{X^4} \right] \left[Z^8 + \frac{1}{Z^8} + 4 \left(Z^4 + \frac{1}{Z^4} \right) + 6 \right] + 7606 \\
 & = \left[X^2 + \frac{9^2}{X^2} \right] \left[Z^{14} + \frac{1}{Z^{14}} - 3 \left(Z^{10} + \frac{1}{Z^{10}} \right) \right. \\
 & \quad \left. + 51 \left(Z^6 + \frac{1}{Z^6} \right) - 337 \left(Z^2 + \frac{1}{Z^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть (i) следует из (3.1) и (2.18), часть (ii) следует из (3.1) и (2.19), а часть (iii) следует из (3.1) и (2.24).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Ramanujan, *Notebooks*, Vols. 1, 2, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.
- [2] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, Part III, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] B. C. Berndt, L.-C. Zhang, "Ramanujan's identities for theta-functions", *Math. Ann.*, **292**:3 (1992), 561–573.
- [4] S. Ramanujan, *The Lost Notebook and Other Unpublished Papers*, Narosa Publ. House, New Delhi, 1988.
- [5] B. C. Berndt, "Modular equations in Ramanujan's lost notebook", *Number Theory*, Hindustan Book, New Delhi, 1999, 55–74.
- [6] Ch. Adiga, K. R. Vasuki, M. S. Mahadeva Naika, "Some new explicit evaluations of Ramanujan's cubic continued fraction", *New Zealand J. Math.*, **31**:2 (2002), 109–114.
- [7] Ch. Adiga, K. Shivashankara, K. R. Vasuki, "Some theta function identities and new explicit evaluation of Rogers–Ramanujan continued fraction", *Tamsui Oxf. J. Math. Sci.*, **18**:1 (2002), 101–117.
- [8] N. D. Baruah, N. Saikia, "Some general theorems on the explicit evaluations of Ramanujan's cubic continued fraction", *J. Comput. Appl. Math.*, **160**:1-2 (2003), 37–51.
- [9] S. Bhargava, K. R. Vasuki, T. G. Sreeramamurthy, "Some evaluations of Ramanujan's cubic continued fraction", *Indian J. of Pure appl. Math.*, **35** (2004), 1003–1025.
- [10] S.-Y. Kang, "Ramanujan's formulas for explicit evaluation of the Rogers–Ramanujan continued fraction and theta-functions", *Acta Arith.*, **90**:1 (1999), 49–68.
- [11] M. S. Mahadeva Naika, B. N. Dharmendra, "On Some new general Theorem for the explicit evaluations of Ramanujan's remarkable product of theta-function", *Ramanujan J.*, **15**:3 (2008), 349–366.
- [12] K. R. Vasuki, K. Shivashankara, "A note on explicit evaluations of products and ratios of class invariants", *Math. Forum*, **13** (2000), 45–46.
- [13] K. R. Vasuki, T. G. Sreeramamurthy, "A note on explicit evaluations of Ramanujan's continued fraction", *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **9**:1 (2004), 63–80.

- [14] K. R. Vasuki, B. R. Srivatsa Kumar, “Evaluations of the Ramanujan–Göllnitz–Gordon continued fraction $H(q)$ by modular equations”, *Indian J. Math.*, **48**:3 (2006), 275–300.
- [15] J. Yi, “Evaluations of the Rogers–Ramanujan’s continued fraction $R(q)$ by modular equations”, *Acta. Arith.*, **97**:2 (2001), 103–127.
- [16] S. Bhargava, Ch. Adiga, M. S. M. Naika, “A new class of modular equations in Ramanujan’s alternative theory of elliptic functions of signature 4 and some new P - Q eta function identities”, *Indian. J. Math.*, **45**:1 (2003), 23–39.
- [17] B. C. Berndt, *Ramanujan’s Notebooks*, Part IV, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [18] K. R. Vasuki, T. G. Sreeramamurthy, “Certain new Ramanujan’s Schläfli-type mixed modular equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **309**:1 (2005), 238–255.
- [19] L. Schläfli, “Beweis der Hermiteschen Verwandlungstafeln für elliptischen modularfunction”, *J. Reine Angew. Math.*, **1870**:72 (1870), 360–369.
- [20] R. Russell, “On modular equations”, *Proc. London Math. Soc.*, **21** (1889), 351–395.
- [21] B. C. Berndt, *Ramanujan’s Notebooks*, Part V, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [22] H. Weber, “Zur Theorie der elliptischen Functionen”, *Acta Math.*, **11**:1-4 (1887), 333–390.
- [23] B. C. Berndt, S. Bhargava, F. G. Garvan, “Ramanujan’s theories of elliptic functions to alternative bases”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347**:11 (1995), 4163–4244.
- [24] H. H. Chan, W.-C. Liaw, “Cubic modular equations and new Ramanujan-type series for $1/\pi$ ”, *Pacific J. Math.*, **192**:2 (2000), 219–238.
- [25] M. S. Mahadeva Naika, “On some cubic Russell-type mixed modular equations”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **10**:2 (2005), 219–231.

К. Р. Васуки

University of Mysore, India

E-mail: vasuki_kr@hotmail.com

Поступило

03.02.2011

Ч. Чамараджу

Sri Jayachamarajendra College of Engineering, India