Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Заторский, А. Р. Малярчук, Обобщение баллотировочных чисел, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 4, 527–529

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9252>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:18:45

Обобщение баллотировочных чисел

Р. А. Заторский, А. Р. Малярчук

Работа посвящена обобщению баллотировочных чисел, связанных со случайным блужданием.

Библиография: 6 названий.

1. Комбинаторные числа в силу своих многочисленных интерпретаций играют важнейшую роль не только в комбинаторном анализе, но и во всей дискретной математике. Баллотировочные числа важны тем, что допускают, по крайней мере, три комбинаторные интерпретации. *Баллотировочное число по Риордану* (см. [1; с. 6, 131]) является числом $a(\lambda_1, \lambda_2)$ способов подсчета голосов, полученных на выборах двумя кандидатами, если известно, что за первого кандидата было подано λ_1 голосов, за второго кандидата – λ_2 , $\lambda_1 \geq \lambda_2$, голосов, и при этом в процессе подсчета число голосов, поданных за второго кандидата, ни разу не превышало числа голосов, поданных за первого кандидата.

Целью настоящей заметки является обобщение и исследование баллотировочных чисел на случай n кандидатов.

2. Дадим определение n -мерного баллотировочного числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть n кандидатов $P_1, P_2, \dots, P_n$ получили на выборах соответственно $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ голосов. n -Мерным баллотировочным числом

$$a(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

назовем число способов подсчета голосов, в каждый момент которого число голосов P_i -го кандидата не меньше числа голосов P_j -го кандидата ($1 \leq i \leq j \leq n$).

В [1] Риорданом установлено явное выражение для двумерных баллотировочных чисел, а именно:

$$a(\lambda_1, \lambda_2) = \binom{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} - \binom{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 - 1}. \quad (1)$$

Кроме этого им установлено рекуррентное соотношение

$$a(\lambda_1, \lambda_2) = a(\lambda_1, \lambda_2 - 1) + a(\lambda_1 - 1, \lambda_2), \quad a(\lambda_1, \lambda_1) = a(\lambda_1, \lambda_1 - 1) \quad (2)$$

с начальным условием

$$a(0, 0) = 1,$$

позволяющее эффективно вычислять эти числа. Там же можно найти связь двумерных баллотировочных чисел с биномиальными коэффициентами:

$$\binom{\lambda_1}{\lambda_2} = \sum_{i=0}^{\lambda_2} 2^i a(\lambda_1 - \lambda_2 - 1, \lambda_2 - i).$$

Найдем явное выражение для n -мерных баллотировочных чисел при помощи их новых комбинаторных интерпретаций.

3. Разбиением [2] целого неотрицательного числа m называют любое упорядоченное по невозрастанию мультимножество λ [3] целых неотрицательных чисел $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ таких, что $m = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$. Каждому разбиению числа m можно сопоставить диаграмму Ферре $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ [2], первый столбец которой состоит из λ_1 единичных квадратов, другой столбец из λ_2 единичных квадратов, и т.д., n -й – из λ_n единичных квадратов.

Под *построением диаграммы Ферре* будем понимать следующий процесс. Располагаем первый единичный квадрат так, чтобы он своей нижней и левой боковой стороной касался сторон прямого угла. Каждый следующий единичный квадрат ложим так, чтобы он своей нижней и левой боковой стороной прилегал либо к предыдущим единичным квадратам, либо к предыдущему единичному квадрату и стороне прямого угла.

Если единичные квадраты i -го столбца диаграммы Ферре, начиная с нижнего, интерпретировать как голоса, поданные за P_i -го кандидата, которые поочередно встречаются при подсчете всех голосов, то тем самым будет установлена биекция между способами подсчета голосов, приводящих к n -мерным баллотировочным числам, и способами построений диаграмм Ферре.

Если же при построении диаграмм Ферре $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ каждый единичный квадрат нумеровать натуральными числами от 1 до $m = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$, то после каждого такого построения получим стандартную таблицу Юнга $\text{tab}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (см. [4], [5]).

Таким образом, справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Между способами подсчета голосов для n -мерных баллотировочных чисел $a(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, способами построений диаграмм Ферре $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ и стандартными таблицами Юнга $\text{tab}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ существует взаимно однозначное соответствие.*

Из утверждения 1 и комбинаторного правила равенства следует, что n -мерное баллотировочное число $a(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ равно числу стандартных таблиц Юнга $\text{tab}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. К счастью число стандартных таблиц Юнга уже найдено не только для диаграмм Ферре [6], но и для гораздо более общих диаграмм, называемых косыми диаграммами (см. [7] и [8; с. 24–33]).

Для нахождения баллотировочных чисел нам понадобится формула подсчета всех стандартных таблиц Юнга, найденная Фрэймом, Робинсоном и Троллом и называемая *формулой крюков* [6]. Согласно этой формуле каждой клетке диаграммы Ферре ставится в соответствие крюк, состоящий из клеток той же строки, расположенных правее данной, и клеток того же столбца, лежащих выше данной, включая ее самую. Число клеток каждого крюка называют его *длиной*. Теперь формулу крюков можно записать в виде

$$a(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \frac{n!}{\text{произведение длин всех крюков диаграммы}}.$$

В [8] формула крюков записана при помощи определителя Вандермонда. Следовательно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для n -мерного баллотировочного числа справедливо равенство*

$$a(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (-1)^{n(n-1)/2} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)!}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i + n - i)!} \det_{i,j=1,\dots,n} \|(\lambda_i - i)^{j-1}\|. \quad (3)$$

При $n = 2$ формула (3) примет вид формулы (1), установленной Риорданом.

При нахождении баллотировочных чисел с помощью ЭВМ полезна

ТЕОРЕМА 2. *Пусть первые k_1 кандидатов получили по λ_1 голосов, k_2 следующих кандидатов – λ_2 голосов и т.д., k_r последних кандидатов получили λ_r голосов, причем $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Тогда для баллотировочных чисел справедливо равенство*

$$a(\lambda_1^{k_1}, \lambda_2^{k_2}, \dots, \lambda_r^{k_r}) = \sum_{i=1}^r a(\lambda_1^{k_1}, \dots, \lambda_{i-1}^{k_{i-1}}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}^{k_{i+1}}, \dots, \lambda_r^{k_r}), \quad (4)$$

где $a(\underbrace{0, \dots, 0}_n) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построение диаграммы Ферре $\text{diag } \lambda_1^{k_1}, \lambda_2^{k_2}, \dots, \lambda_r^{k_r}$ может закончиться верхним квадратом k_1 -го столбца или верхним квадратом $(k_1 + k_2)$ -го столбца или же, наконец, верхним квадратом последнего $(k_1 + k_2 + \dots + k_r)$ -го столбца. При этом множество всех построений, заканчивающихся одним единичным квадратом, непересекается с множеством всех построений, заканчивающихся другим единичным квадратом. Следовательно, равенство (4) справедливо.

Очевидно, что равенство (4) обобщает рекуррентное равенство (2), установленное Риорданом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дж. Риордан, *Комбинаторные тождества*, Наука, М., 1982.
- [2] Г. Эндрюс, *Теория разбиений*, Наука, М., 1982.
- [3] В. Н. Сачков, *Комбинаторные методы дискретной математики*, Наука, М., 1977.
- [4] Е. Янцен, “Связь между теорией представлений и комбинаторикой”: В. Боро, Д. Цагир, Ю. Рольфс, Х. Крафт, Е. Янцен, *Живые числа. Пять экскурсий*, Современная математика. Популярная серия, Мир, М., 1985, 105–123.
- [5] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.
- [6] J. S. Frame, G. de B. Robinson, R. M. Thrall, “The hook graphs of the symmetric group”, *Canad. J. Math.*, **6** (1954), 316–324.
- [7] I. P. Goulden, D. M. Jackson, *Combinatorial Enumeration*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math., John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [8] Р. А. Заторский, “О числе стандартных таблиц Юнга косых диаграмм”, *Изв. Киевск. ун-та. Сер. физ.-матем. науки*, 2000, № 4, 24–33.

Р. А. Заторский

Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника,
г. Ивано-Франковск
E-mail: romazz@rambler.ru

Поступило

07.06.2010

А. Р. Мальярчук

Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника,
г. Ивано-Франковск