Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Шнурников, О числе областей, образованных наборами замкнутых геодезических на плоских поверхностях, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 4, 637–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:20:11

О числе областей, образованных наборами замкнутых геодезических на плоских поверхностях

И. Н. Шнурников

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. Пусть замкнутое связное двумерное риманово многообразие M^2 имеет постоянную гауссову кривизну и набор Γ состоит из n различных замкнутых геодезических на M^2 . Пусть $f(\Gamma)$ обозначает число компонент связности дополнения в многообразии M^2 к объединению геодезических из набора Γ . Как устроено множество $F(M^2, n)$ всех возможных чисел $f(\Gamma)$ для фиксированных многообразия M^2 и числа геодезических n ? Грюнбаум [1] рассмотрел этот вопрос для прямых на вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ и доказал, что $F(\mathbb{RP}^2, n)$ состоит из некоторых чисел отрезка

$$I_n = \left(n; 1 + \frac{n(n-1)}{2} \right).$$

Оставшиеся подряд идущие числа отрезка I_n были названы *лакунами* и изучались в [1]–[4] и др. работах. В [1] были найдены первые две лакуны, в [2] и [3] – третья, а в [4] – все остальные. В итоге при $n \geq 3$ имеется $\lfloor \sqrt{2n-23/4} - 1/2 \rfloor$ лакун, причем лакуна номер i состоит из $n - (i^2 + i)/2 - 2$ целых чисел. Другие доказательства формулы для границ лакун были даны в [5] для достаточно больших n и в [6] для всех n .

Известны также множества $F(S^2, n)$, где S^2 – это двумерная стандартная сфера. С помощью двулистного накрытия $p: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ нетрудно заметить, что

$$F(S^2, n) = \{2f \mid f \in F(\mathbb{RP}^2, n)\}.$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема. В отличие от результатов предыдущих авторов, множества чисел областей найдены для плоских двумерного тора T^2 и бутылки Клейна KL^2 .

ТЕОРЕМА 1. Для тора T^2 и бутылки Клейна KL^2 с евклидовыми метриками множества $F(T^2, n)$ и $F(KL^2, n)$ равны соответственно: $F(T^2, 1) = \{1\}$ и $F(KL^2, 1) = \mathbb{N}$ и при $n \geq 2$ имеют вид

$$F(T^2, n) = \{n-1, n\} \cup \{l \in \mathbb{N} \mid l \geq 2n-4\}, \quad F(KL^2, n) = F(T^2, n) \cup \{n+1\}.$$

2. Определения и вспомогательные утверждения. Под плоским тором T^2 или плоской бутылкой Клейна KL^2 имеем в виду параллелограмм $ABCD \subset \mathbb{R}^2$ на евклидовой плоскости с отождествленными сторонами $AB \sim DC$, $AD \sim BC$ и $AB \sim DC$, $AD \sim CB$ соответственно. Пусть $p_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ и $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow KL^2$ – соответствующие накрытия, локально изометричные. Назовем замкнутые геодезические *параллельными*, если любые их накрывающие прямые параллельны. Опустим высоту BH на прямую AD и обозначим через u , v и w вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{HB}$ соответственно. Для взаимно простых целых чисел k, l *геодезической типа* (k, l) на торе T^2 назовем замкнутую геодезическую, для которой любая ее накрывающая прямая параллельна вектору $ku + lv$. *Геодезической типа* $(2k, l)$ на KL^2 назовем замкнутую геодезическую, для которой найдется накрывающая ее прямая, параллельная вектору $2kw + lv$, за исключением двух замкнутых геодезических, перпендикулярных v и имеющих длину $\|w\|$. Тип этих двух геодезических будем считать равным $(1, 0)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00748), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3224.2010.1), АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект РНП-2.1.1.3704), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (контракты 02.740.11.5213 и 14.740.11.0794).

ЛЕММА 1. Две замкнутые геодезические на плоском торе типов (a, b) и (c, d) пересекаются в $|ad - bc|$ точках.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что $|ad - bc| \neq 0$, так как иначе точек пересечения нет. Длины данных геодезических γ_1 и γ_2 равны $\|au + bv\|$ и $\|cu + dv\|$ соответственно. Расстояния между соседними витками γ_1 и γ_2 равны $h_1 = S/\|au + bv\|$ и $h_2 = S/\|cu + dv\|$ соответственно, где $S = \|[u, v]\|$ — площадь тора. Тогда

$$\sin \angle(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{|ad - bc|S}{\|au + bv\| \cdot \|cu + dv\|}.$$

Поэтому расстояние между соседними по γ_1 точками пересечения равно

$$\frac{h_2}{\sin \angle(\gamma_1, \gamma_2)} = \frac{\|au + bv\|}{|ad - bc|}.$$

Значит, на γ_1 находится $|ad - bc|$ точек пересечения.

ЛЕММА 2. (а) Замкнутая геодезическая типа $(2k, l)$ на плоской бутылке Клейна KL^2 имеет $|kl|$ точек самопересечения, кратности два каждая.

(б) Две замкнутые непараллельные геодезические на KL^2 имеют хотя бы одну точку пересечения. Замкнутая геодезическая типа $(2, 0)$ пересекает непараллельную ей замкнутую геодезическую γ по крайней мере в двух точках или проходит через точку самопересечения γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Для $kl = 0$ лемма очевидна, считаем далее, что $kl \neq 0$. Через любую точку KL^2 геодезическая проходит не более двух раз, так как накрывающие ее прямые составляют с v один из углов $\{\varphi, \pi - \varphi\}$, где $\operatorname{tg} \varphi = 2k\|w\|/(l\|v\|)$.

Пусть прямая

$$\tilde{\gamma}(t) = A + (p_1 + lt)v + (p_2 + 2kt)w$$

накрывает данную геодезическую γ при $t \in \mathbb{R}$ для некоторых $p_1 \in \mathbb{R}$, $p_2 \in \mathbb{R}$. Пусть $\overrightarrow{AH} = \alpha v$. Точка самопересечения γ происходит при параметрах t_1 и t_2 накрывающей прямой тогда и только тогда, когда

$$t_1 = \frac{(2\alpha - 4p_1)k - l + 2(kj - li)}{4kl}, \quad t_2 = \frac{(2\alpha - 4p_1)k + l + 2(kj + li)}{4kl}$$

для некоторых целых чисел i и j . Следующие дробные части равны

$$\{t_1 + t_2\} = \left\{ \frac{\alpha - 2p_1}{l} + \frac{j}{l} \right\} \quad \text{и} \quad \{t_2 - t_1\} = \left\{ \frac{2i + 1}{2k} \right\},$$

поэтому точки самопересечения γ однозначно соответствуют парам целых чисел (i, j) , где $i \in \{0, 1, \dots, |k| - 1\}$ и $j \in \{0, 1, \dots, |l| - 1\}$.

(б) Накрывающие прямые имеют точку пересечения.

ЛЕММА 3. Если набор замкнутых геодезических на плоском торе или на плоской бутылке Клейна содержит хотя бы две непараллельные геодезические, то все образованные области гомеоморфны открытому диску.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать лемму в случае, когда набор состоит из двух замкнутых непараллельных геодезических на T^2 или KL^2 или из одной геодезической типа $(2k, l)$ с $kl \neq 0$ на KL^2 . Рассмотрим накрытия $p_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ и $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow KL^2$. Предположим, что какие-то две различные точки X и Y связной компоненты прообраза некоторой области отображаются в одну точку при накрытии p_1 или p_2 . Тогда эта связная компонента содержит бесконечную ломаную с равными по длине звеньями, одним звеном которой является отрезок XY . Так как связная компонента прообраза области ограничена, то таких точек X и Y не существует. Следовательно, каждая область гомеоморфна своему прообразу — диску.

Для набора замкнутых геодезических на торе и на бутылке Клейна KL^2 с евклидовыми метриками через t_i обозначим число точек, принадлежащих i геодезическим с учетом кратности самопересечения на KL^2 .

ЛЕММА 4. *Если все области тора T^2 или бутылки Клейна KL^2 с евклидовыми метриками, образованные набором замкнутых геодезических, гомеоморфны диску, то число областей равно*

$$\sum_{i \geq 2} (i-1)t_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Клеточное разбиение тора или бутылки Клейна состоит из $\sum t_i$ точек пересечения геодезических, $\sum it_i$ отрезков геодезических и f областей. А эйлерова характеристика тора и бутылки Клейна равна нулю.

3. Доказательство теоремы 1. Приведем примеры наборов $n \geq 2$ замкнутых геодезических: $n - s$ геодезических типа $(0, 1)$ и s геодезических типа $(1, 0)$ образуют $n - s$ областей на торе и на KL^2 для $s \in \{0, 1\}$; на торе $n - 2$ параллельных геодезических типа $(0, 1)$, одна геодезическая типа $(1, 0)$ и одна геодезическая типа $(1, a + 1)$, проходящая (при $n \geq 3$) через точку пересечения какой-то геодезической типа $(0, 1)$ с геодезической типа $(1, 0)$, образуют $2n - 4 + a$ областей для любого целого $a \geq 0$ (по леммам 1, 3 и 4); на KL^2 геодезическая типа $(2, a)$ и $n - 1$ геодезических типа $(0, 1)$, не проходящих через точки самопересечения первой, образуют $2n - 2 + a$ областей для любого целого $a \geq 0$ (по леммам 2(a), 3 и 4); на бутылке Клейна n геодезических типа $(2, 0)$ образуют $n + 1$ область; на бутылке Клейна $n - 1 - s$ геодезических типа $(2, 0)$, геодезическая типа $(0, 1)$ и s геодезических типа $(1, 0)$ образуют $2n - 2 - s$ областей при $s \in \{1, 2\}$. Осталось заметить, что на KL^2 одна геодезическая типа $(2, a)$ образует a областей для любого натурального числа a (по леммам 2(б), 3 и 4).

Теперь докажем, что в множествах $F(T^2, n)$ и $F(KL^2, n)$ нет других чисел. Рассмотрим произвольный набор Γ из $n \geq 3$ различных замкнутых геодезических на T^2 или KL^2 , образующий $f = f(\Gamma)$ областей. Обозначим через m максимальное число параллельных геодезических в наборе Γ . Разберем отдельно случаи геодезических на T^2 и KL^2 .

Начнем с тора. Если $m = n$, то $f = n$. Если $m = n - 1$, то f делится нацело на $n - 1$. Если $2 \leq m \leq n - 2$, то каждая из $n - m$ оставшихся в Γ геодезических имеет по крайней мере m точек пересечения с m параллельными геодезическими, поэтому по леммам 3 и 4 получаем $f \geq m(n - m) \geq 2n - 4$. Остался случай $m = 1$. Если любые две геодезические из Γ пересекаются не менее, чем в двух точках, то из лемм 3 и 4 следует, что $f \geq 2n - 2$. Если некоторые геодезические γ_1 и γ_2 из Γ пересекаются в одной точке и любая из $n - 2$ оставшихся в Γ геодезических пересекает объединение $\gamma_1 \cup \gamma_2$ не менее чем в двух точках, то из лемм 3 и 4 следует, что $f \geq 2n - 3$. Докажем, что если попарные пересечения некоторых геодезических γ_1 , γ_2 и γ_3 из Γ состоят из одной точки и эта точка общая, то любая из $n - 3$ оставшихся в Γ геодезических пересекает $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ не менее чем в двух точках. Из этого и из лемм 3 и 4 следует, что $f \geq 2n - 4$. Заменим базис $\{u, v\}$ решетки $\{A + au + bv | a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$ на плоскости так, что в новом базисе типы γ_1 и γ_2 будут равны $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Тогда тип γ_3 будет равен $(1, -1)$ или $(1, 1)$. Для любой оставшейся в Γ геодезической (кроме γ_1 , γ_2 и γ_3) типа (x, y) в новом базисе число точек пересечения с $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ по лемме 1 не меньше чем $|x| + |y| + |x \pm y| - 2 \geq 2$.

Перейдем к случаю KL^2 . Любая из m параллельных геодезических при $m \geq 1$ имеет тип (k, l) с $kl = 0$, поскольку геодезическая типа (k, l) с $kl \neq 0$ сама себе не параллельна. Если $m = n$, то $f \in \{n - 1, n, n + 1\}$. Если $m = n - 1$ и оставшаяся в Γ геодезическая имеет тип (k, l) , то при $kl = 0$ получаем $f \in \{n - 1, 2n - 4, 2n - 3, 2n - 2\}$, а при $kl \neq 0$ из лемм 2(б), 3 и 4 следует, что $f \geq 2n - 4$. Если $2 \leq m \leq n - 2$, то каждая из $n - m$ оставшихся в Γ геодезических имеет по лемме 2(б) как минимум одну точку пересечения с каждой из m параллельных геодезических. Тогда из лемм 3 и 4 следует, что $f \geq m(n - m) \geq 2n - 4$. Остался случай $m \leq 1$. Выделим две геодезические в Γ так, чтобы все геодезические в Γ типа (k, l) с $kl = 0$ оказались бы выделенными. Каждая из $n - 2$ невыделенных

геодезических имеет тип $(2k, l)$ с $|kl| \geq 1$, поэтому из лемм 2(a)(б), 3 и 4 следует, что $f \geq 2n - 4$.

Автор признателен А. А. Ошемкову и А. Т. Фоменко за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Grünbaum, *Arrangements and Spreads*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **10**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1972. [2] R. Cordovil, *European J. Combin.*, **1**:4 (1980), 317–322. [3] G. Purdy, *Geom. Dedicata*, **9**:1 (1980), 107–109. [4] N. Martinov, *Discrete Comput. Geom.*, **9**:1 (1993), 39–46. [5] В. И. Арнольд, Матем. просв., сер. 3, **12**, Изд-во МЦНМО, М., 2008, 95–104. [6] И. Н. Шнурников, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, № 5, 32–36.

И. Н. Шнурников

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: shnurnikov@yandex.ru

Поступило

19.05.2011