Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Н. Фоменко, Каскадный поиск прообразов и совпадений: глобальная и локальная версии, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 127–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9255>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:56:36

Каскадный поиск прообразов и совпадений: глобальная и локальная версии

Т. Н. Фоменко

В предыдущих работах автора был предложен принцип каскадного поиска, позволяющий по многозначному функционалу или по набору многозначных отображений метрического пространства X построить новое многозначное отображение X в себя, генерирующее мультикаскад, т.е. многозначную дискретную динамическую систему, предельное множество которой совпадает соответственно либо с множеством нулей заданного функционала, либо с множеством совпадений или множеством общих прообразов замкнутого подпространства при действии заданного набора отображений. Исследовались вопросы устойчивости каскадного поиска. Данная статья посвящена обобщению и локальным модификациям принципа каскадного поиска и их приложениям к задачам локального поиска и аппроксимации общих прообразов подпространства, а также множества совпадений конечного набора многозначных отображений метрических пространств.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm9255

Введение. В предыдущих работах автора [1]–[5] был предложен так называемый принцип каскадного поиска. Он позволяет при некоторых условиях по данному многозначному функционалу, заданному на метрическом пространстве X , построить многозначное отображение X в себя, генерирующее мультикаскад, т.е. многозначную дискретную динамическую систему, предельное множество которой непусто и совпадает с искомым множеством нулей заданного функционала. Применение этого принципа позволяет по заданному конечному набору многозначных отображений метрического пространства X в себя или в другое метрическое пространство осуществлять поиск множества общих неподвижных точек, множества совпадений, а также общего прообраза заданного замкнутого подпространства при действии этих отображений. В частности, были получены обобщения принципа Банаха неподвижной точки (принципа сжимающих отображений), а также ряда результатов Арутюнова [6], [7] о поиске и аппроксимации совпадений накрывающего и липшицева отображений метрических пространств. В [8]–[10] автором исследовались вопросы устойчивости предложенных методов каскадного поиска.

Данная статья посвящена обобщению и локальной модификации принципа каскадного поиска нулей функционала и соответствующим приложениям к задачам

локального поиска и аппроксимации общих прообразов замкнутого подпространства, а также множества совпадений конечного набора многозначных отображений метрических пространств. Предлагаемые результаты анонсированы на международном конгрессе ISAAC-2011 (см. [11]). Статья организована следующим образом.

В п. 1 излагается обобщенная версия принципа каскадного поиска нулей многозначного функционала по его графику (теорема 1). Показано, как из нее получается утверждение [2; теорема 27], а также обобщение результата [2; теорема 28] о поиске и аппроксимации общего прообраза заданного замкнутого подпространства при действии конечного набора многозначных отображений (теоремы 2 и 3). В качестве следствия из теоремы 1 формулируется утверждение о поиске общих корней набора многозначных отображений (теорема 4).

В п. 2 рассматривается локальный вариант принципа каскадного поиска и его применения к поиску и аппроксимации общих прообразов и, в частности, общих корней конечного набора многозначных отображений в окрестности заданной начальной точки (теоремы 5–7). На этой основе затем решается задача о локальном поиске и аппроксимации подмножества всех таких точек совпадения заданного конечного набора многозначных отображений, в которых существуют их общие значения, находящиеся в фиксированной окрестности заданного замкнутого подпространства (теоремы 8, 9 и предложение 1). Полученные результаты сравниваются в случае двух отображений с результатом [12; теорема 2]. Приводится соответствующий пример.

Приведем необходимые обозначения и введенные ранее определения:

- $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ – множество неотрицательных вещественных чисел;
- $(X, \rho), (Y, d)$ – метрические пространства;
- $P(Y)$ – совокупность всевозможных непустых подмножеств пространства Y ;
- $C(Y)$ – совокупность непустых замкнутых подмножеств пространства Y ;
- $U(M, r) = \{x \in X \mid \rho(x, M) \leq r\}$ – замкнутая шаровая окрестность множества M радиуса $r > 0$ в X (аналогично в соответствующей метрике в Y); в частности, если $M = \{x\}$ – точка, то $U(x, r)$ – замкнутый шар радиуса r с центром в точке x .

Метрику D в пространстве Y^n зададим так:

$$D(y, z) := \sum_{i=1}^n d(y_i, z_i),$$

где $y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in Y^n$.

Обозначим $\Delta_n = \{\tilde{y} = (y, \dots, y) \in Y^n \mid y \in H\}$ – диагональ в Y^n , $n \geq 2$; $\Delta_n(H) = \{\tilde{y} = (y, \dots, y) \in Y^n \mid y \in H\}$ – часть диагонали “над H ”, где H – замкнутое подпространство в Y . В частности, $\Delta_n = \Delta_n(Y)$.

Множество $F^{-1}(H) = \{x \in X \mid F(x) \cap H \neq \emptyset\}$ будем называть *полным прообразом* замкнутого подпространства H при действии многозначного отображения $F: X \rightarrow C(Y)$.

Будем говорить, что график $G(F) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$ многозначного отображения $F: X \rightarrow C(Y)$ является *H -полным*, если всякая фундаментальная последовательность $\{(x_m, y_m)\}_{m=0,1,\dots} \subseteq G(F)$, где $d(y_m, H) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, имеет предел $(\xi, \eta) \in G(F)$, т.е. $\eta \in F(\xi) \cap H$.

График $G(F)$ будем называть H -замкнутым, если все его предельные точки вида (x, y) , где $y \in H$, содержатся в $G(F)$.

Отображение F называется α -накрывающим в X , если для любой точки $x \in X$ и для любого $r > 0$ верно, что $U(F(x), \alpha r) \subseteq F(U(x, r))$.

Отображение $F: X \rightarrow C(Y)$ называется β -липшицевым ($\beta > 0$), если для любых $x, x' \in X$ верно, что $h(F(x), F(x')) \leq \beta \rho(x, x')$, где $h: C(Y) \times C(Y) \rightarrow R \cup \{\infty\}$ – (расширенная) метрика Хаусдорфа, определяемая следующим образом:

$$h(A, B) := \max \left\{ \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}, \sup_{b \in B} \{d(b, A)\} \right\}, \quad d(a, B) := \inf_{b \in B} \{d(a, b)\}.$$

Мультикаскадом на X называется многозначная дискретная динамическая система с фазовым пространством X и аддитивной полугруппой сдвигов $(\mathbb{Z}_+, +)$ ($\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$), т.е. произвольное, вообще говоря многозначное, действие этой полугруппы на X . Другими словами, на X задан мультикаскад, если на X задано некоторое многозначное отображение $\mathcal{G}: X \rightarrow P(X)$, неотрицательные итерации которого образуют полугруппу $\{\mathcal{G}^n\}_{n=0,1,\dots}$, очевидным образом представляющую полугруппу $(\mathbb{Z}_+, +)$, где $\mathcal{G}^0 := \text{id}_X$ – тождественное отображение. Само отображение $\mathcal{G} = \mathcal{G}^1: X \rightarrow P(X)$, представляющее образующий элемент $1 \in \mathbb{Z}_+$, называется генератором этого мультикаскада. Тракторией мультикаскада называется всякая последовательность $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$, где $x_{n+1} \in \mathcal{G}(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, итерации генератора $\mathcal{G}$, примененные к любой точке $x \in X$, задают начинающиеся из x траектории, пределы которых (если они существуют) составляют предельное множество этого мультикаскада.

1. Обобщенный принцип каскадного поиска.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть многозначный неотрицательный функционал $\varphi: X \rightarrow P(\mathbb{R}_+)$ обобщенно (α, β) -поисковым на метрическом пространстве X , $0 < \beta < \alpha$, если для любой пары из его графика $(x, t) \in G(\varphi)$ существует такая пара $(x', t') \in G(\varphi)$, что

$$\rho(x, x') \leq \frac{t}{\alpha}, \quad t' \leq \beta \cdot \frac{t}{\alpha}. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1 (Принцип каскадного поиска по графику функционала). Пусть $\varphi: X \rightarrow P(\mathbb{R}_+)$ – обобщенно (α, β) -поисковый функционал на X . Пусть либо X полно и график $G(\varphi)$ 0-замкнут, либо график $G(\varphi)$ является 0-полным. Тогда отображение $\mathcal{G}: G(\varphi) \rightarrow P(G(\varphi))$, где

$$\mathcal{G}(x, t) = \left\{ (x', t') \in G(\varphi) \mid \rho(x, x') \leq \frac{t}{\alpha}, t' \leq \beta \cdot \frac{t}{\alpha} \right\}$$

генерирует на графике $G(\varphi)$ мультикаскад с непустым предельным множеством, проекция которого на X совпадает с нуль-подпространством $\text{Nil}(\varphi) = \{x \in X \mid 0 \in \varphi(x)\}$ функционала φ , и для любой пары $(x_0, t_0) \in G(\varphi)$ существует точка $\xi = \xi(x_0, t_0) \in \text{Nil}(\varphi)$, для которой $\rho(x_0, \xi) \leq t_0/(\alpha - \beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения вполне стандартны. Построим последовательности $\{x_n\}_{n=1,2,\dots} \subseteq X$ и $\{t_n\}_{n=0,1,2,\dots}$, где $t_n \in \varphi(x_n)$, следующим образом. Выберем произвольную точку $x_0 \in X$ и произвольное число $t_0 \in \varphi(x_0)$. Тогда согласно

определению обобщенно (α, β) -поискового функционала найдутся такие $x_1 \in X$, $t_1 \in \varphi(x_1)$, что расстояние $\rho(x_0, x_1) \leq t_0/\alpha$, и $t_1 \leq \beta \cdot t_0/\alpha$. Если $t_1 = 0$, то положим $x_k = x_1$, $t_k = t_1$ для всех $k > 1$. Если же $t_1 > 0$, то далее будем действовать по индукции. Если уже выбраны точка x_n и число $t_n \in \varphi(x_n)$, то следующую точку x_{n+1} и следующее число $t_{n+1} \in \varphi(x_n)$ снова выбираем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{t_n}{\alpha}, \quad t_{n+1} \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot t_n.$$

Отсюда получаем

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{t_n}{\alpha} \leq \frac{t_0}{\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad t_n \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \cdot t_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Значит, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, а $\{t_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Из условий теоремы следует, что тогда последовательность элементов графика $\{(x_n, t_n)\}_{n=0,1,\dots}$ сходится к некоторой паре $(\xi, 0) \in G(\varphi)$. Это означает, что $\xi \in \text{Nil}(\varphi)$. При этом расстояние

$$\begin{aligned} \rho(x_0, \xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(x_k, x_{k+1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t_k}{\alpha} \\ &\leq \frac{t_0}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k = \frac{t_0}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k = \frac{t_0}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает ряд результатов о существовании и аппроксимации совпадений, общих неподвижных точек, общих корней, а также о существовании и аппроксимации общих прообразов замкнутого подпространства для конечного набора многозначных отображений. В частности, из нее получается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2 [2; теорема 27]. Пусть $H \subset Y$ – некоторое замкнутое подпространство в Y и задано многозначное отображение $F: X \rightarrow C(Y)$, график которого $G(F)$ является H -полным. Пусть $0 < \beta < \alpha$ и для каждого $x \in X$ и каждого $y \in F(x)$ существуют точки $x' \in X$ и $y' \in F(x')$, для которых выполнены неравенства

$$\rho(x, x') \leq \frac{d(y, H)}{\alpha}, \quad d(y, y') \leq \gamma \cdot d(y, H), \quad d(y', H) \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot d(y, H). \quad (2)$$

Тогда отображение $\mathcal{G}: G(F) \rightarrow P(G(F))$, где

$$\mathcal{G}((x, y)) = \left\{ (x', y') \in G(F) \mid \rho(x, x') \leq \frac{d(y, H)}{\alpha}, d(y, y') \leq \gamma \cdot d(y, H), d(y', H) \leq \frac{\beta}{\alpha} d(y, H) \right\},$$

генерирует на графике $G(F)$ мультикаскад с непустым предельным множеством, проекция которого на X совпадает с полным прообразом $F^{-1}(H)$ подпространства H при действии отображения F . Причем для любой пары $(x_0, y_0) \in G(F)$ существует такая соответствующая ей предельная пара $(\xi, \eta) = (\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0))$,

что

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{d(y_0, H)}{\alpha - \beta}, \quad d(y_0, \eta) \leq \frac{\gamma \alpha d(y_0, H)}{\alpha - \beta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [2; теорема 27] дано непосредственное доказательство этой теоремы. Здесь мы покажем, как она получается из теоремы 1.

Во-первых, достаточно заметить, что из условий теоремы 2 следует, что многозначный функционал $\varphi(x) := \{d \mid d = d(y, H), y \in F(x)\}$ является обобщенно (α, β) -поисковым и его график является 0-полным. Поэтому согласно теореме 1 на графике $G(\varphi)$ определен мультикаскад с непустым предельным множеством $\text{Nil}(\varphi)$, траектории которого есть последовательности вида $\{(x_n, t_n)\}_{n=0,1,\dots}$, где $t_n \in \varphi(x_n)$. Причем в любой траектории последовательность $\{x_n\}_{n=0,1,\dots}$ фундаментальна, а $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. По условию каждому t_n соответствует хотя бы один элемент $y_n \in F(x_n)$ такой, что $t_n = d(y_n, H)$, причем

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \gamma \cdot d(y_n, H) \leq \gamma \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \cdot d(y_0, H).$$

Эти последние неравенства обеспечивают фундаментальность соответствующей последовательности $\{y_n\}$. Поэтому в силу H -полноты графика $G(F)$ фундаментальная последовательность элементов графика $\{(x_n, y_n)\}$ сходится к некоторой предельной паре $(\xi, \eta) \in G(F)$, где $\eta \in F(\xi) \cap H$. Требуемые оценки на расстояния $\rho(x_0, \xi)$, $d(y_0, \eta)$ получаются стандартным образом с помощью неравенства треугольника и неравенств (2). Теорема доказана.

Применение этого результата к задаче поиска и аппроксимации точек совпадения конечного набора многозначных отображений, для которых общие значения этих отображений лежат в заданном замкнутом подпространстве $H \subset Y$, дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $F_1, \dots, F_n: X \rightarrow C(Y)$, $F = F_1 \times \dots \times F_n: X \rightarrow C(Y^n)$ и $H \subseteq Y$ – замкнутое подпространство в Y . Пусть график $G(F)$ $\Delta_n(H)$ -замкнут и хотя бы один из графиков $G(F_i)$, $i = 1, \dots, n$, H -полон. Пусть существуют такие числа $\gamma > 0$, $0 < \beta < \alpha$, что $\forall x \in X$, $\forall y \in F(x)$, $\exists x' = x'(x, y) \in X$, $\exists y' = y'(x, y) \in F(x')$, для которых

$$\rho(x, x') \leq \frac{D_y}{\alpha}, \quad D(y, y') \leq \gamma \cdot D_y, \quad D_{y'} \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot D_y, \quad \text{где } D_y = D(y, \Delta_n(H)).$$

Тогда многозначное отображение $\mathcal{G}: G(F) \rightarrow P(G(F))$, где

$$\mathcal{G}((x, y)) := \left\{ (x', y') \in G(F) \mid \rho(x, x') \leq \frac{D_y}{\alpha}, D(y, y') \leq \gamma \cdot D_y, D_{y'} \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot D_y \right\},$$

генерирует на $G(F)$ мультикаскад, имеющий непустое предельное множество $\mathcal{A} \subseteq G(F)$. Проекция $\mathcal{A}$ на X совпадает с общим прообразом $F^{-1}(\Delta_n(H)) = \{x \in X \mid F_1(x) \cap \dots \cap F_n(x) \cap H \neq \emptyset\}$ подпространства H при действии отображений $F_1, \dots, F_n$, причем для любой пары $(x_0, y_0) \in G(F)$ существует такая соответствующая ей предельная пара мультикаскада $(\xi, \eta) = (\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0)) \in \mathcal{A}$, что

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{D(y_0, \Delta_n(H))}{\alpha - \beta}, \quad D(y_0, \eta) \leq \frac{\gamma \alpha D(y_0, \Delta_n(H))}{\alpha - \beta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что график $G(F)$ отображения F в условиях теоремы 3 является $\Delta_n(H)$ -полным. Пусть, например, график $G(F_1)$ отображения F_1 H -полон и $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots} \subseteq G(F)$ – произвольная фундаментальная последовательность, где $D_k = D(y_k, \Delta_n(H)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда получаем, в частности, что последовательность $\{(x_k, y_{1k})\}_{k=0,1,\dots} \subseteq G(F_1)$ также фундаментальна и $d(y_{1k}, H) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В силу условия H -полноты графика $G(F_1)$ последовательность $\{(x_k, y_{1k})\}_{k=0,1,\dots}$ сходится к некоторой паре $(\xi, \eta) \in G(F_1)$, где расстояние $d(\eta, H) = 0$, т.е. в силу замкнутости H $\eta \in H$. Далее, так как $D_k = D(y_k, \Delta_n(H)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, последовательности $\{y_{ik}\}_{k=0,1,\dots}$, $i = 1, \dots, n$, также являющиеся фундаментальными, сближаются (т.е. $d(y_{ik}, y_{jk}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $1 \leq i < j \leq n$). Это видно, например, из следующих неравенств, приведенных в [1; лемма 1]:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(y_i, y_j) \leq D(y, \Delta_n) \leq \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(y_i, y_j), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n.$$

Отсюда следует, что все эти последовательности сходятся к одному и тому же элементу $\eta \in H$. Это означает, что исходная фундаментальная последовательность $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots}$ сходится к паре $(\xi, \tilde{\eta})$, где $\tilde{\eta} = (\eta, \dots, \eta) \in \Delta_n(H)$. А поскольку график $G(F)$ по условию $\Delta_n(H)$ -замкнут, то $(\xi, \tilde{\eta}) \in G(F)$. Итак, доказано, что график $G(F)$ является $\Delta_n(H)$ -полным.

Применение теоремы 2 к многозначному отображению $F: X \rightarrow C(Y^n)$ и замкнутому подпространству $\Delta_n(H) \subset Y^n$ завершает доказательство.

Отметим, что при $n = 1$ теорема 3 совпадает с теоремой 2, а при $n \geq 2$ и $H = Y$ из нее следует утверждение [2; теорема 28] о поиске множества совпадений конечного набора из n многозначных отображений. Кроме того, при $H = \{c\}$, $c \in Y$, из нее вытекает следующее утверждение о каскадном поиске и аппроксимации общих корней заданных n отображений, соответствующих их общему значению c .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $F_1, \dots, F_n: X \rightarrow C(Y)$, $F = F_1 \times \dots \times F_n: X \rightarrow C(Y^n)$, $c \in Y$, $\tilde{c} = (c, \dots, c) \in \Delta_n$. Пусть $G(F)$ $\tilde{c}$ -замкнут и хотя бы один из графиков $G(F_i)$, $i = 1, \dots, n$, является c -полным, и пусть существуют такие числа $\gamma > 0$, $0 < \beta < \alpha$, что для каждого $x \in X$ и каждого $y \in F(x)$ существуют точки $x' \in X$ и $y' \in F(x')$, для которых

$$\rho(x, x') \leq \frac{D(y, \tilde{c})}{\alpha}, \quad D(y, y') \leq \gamma \cdot D(y, \tilde{c}), \quad D(y', \tilde{c}) \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot D(y, \tilde{c}).$$

Тогда на графике $G(F)$ отображения F определен мультикаскад с генератором $\mathcal{G}$, где

$$\mathcal{G}((x, y)) := \left\{ (x', y') \in G(F) \mid \rho(x, x') \leq \frac{D(y, \tilde{c})}{\alpha}, D(y, y') \leq \gamma \cdot D(y, \tilde{c}), D(y', \tilde{c}) \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot D(y, \tilde{c}) \right\}.$$

Этот мультикаскад имеет непустое предельное множество $\mathcal{A} \subseteq G(F)$, проекция которого на X совпадает с множеством $F^{-1}(\tilde{c}) = \{x \in X \mid F_1(x) \cap \dots \cap F_n(x) \ni c\}$ общих корней отображений $F_1, \dots, F_n$, соответствующих их общему значению c .

Причем для любой точки $(x_0, y_0) \in G(F)$ существует такая соответствующая ей предельная точка $(\xi, c) \in A$, $\xi = \xi(x_0, y_0)$, для которой

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{D(y_0, \tilde{c})}{\alpha - \beta}, \quad D(y_0, \tilde{c}) \leq \frac{\gamma \alpha D(y_0, \tilde{c})}{\alpha - \beta}.$$

2. Локальная версия принципа каскадного поиска. В этом пункте мы обсудим вопрос о том, при каких условиях принцип каскадного поиска позволяет отыскивать нули функционала в заданной окрестности начальной точки.

Пусть на метрическом пространстве X задан неотрицательный многозначный функционал $\varphi: X \rightarrow P(\mathbb{R}_+)$. Обозначим $\varphi_*(x) = \inf\{\varphi \mid \varphi \in \varphi(x)\}$.

Следующая теорема является несложной модификацией теоремы 1, ориентированной на решение задачи локального поиска нулей многозначного функционала. Однако, как будет видно ниже, она дает полезные следствия и обобщения некоторых известных результатов.

ТЕОРЕМА 5 (Принцип локального каскадного поиска). Пусть многозначный функционал $\varphi: X \rightarrow P(\mathbb{R}_+)$ является обобщенно (α, β) -поисковым на метрическом пространстве X и для некоторой точки $x_0 \in X$ выполнено неравенство $\varphi_*(x_0) < (\alpha - \beta)r$, $r > 0$, $0 < \beta < \alpha$. Пусть, кроме того, либо график $G(\varphi)$ является 0-полным, либо X полно и график $G(\varphi)$ является 0-замкнутым. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) на $G(\varphi)$ определен мультикаскад с непустым предельным множеством $A \subseteq G(\varphi)$, причем $A_X = \text{Nil}(\varphi)$, где A_X – проекция A на X ;
- 2) $A_X \cap U(x_0, r) \neq \emptyset$. В частности, для любой пары $(x_0, \varphi_0) \in G(\varphi)$, где $\varphi_0 < (\alpha - \beta)r$, существует предельная точка $\xi = \xi(x_0, \varphi_0) \in U(x_0, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) вытекает непосредственно из теоремы 1.

Условия теоремы 5 позволяют для любой пары $(x_0, \varphi_0) \in G(\varphi)$, где $\varphi_0 < (\alpha - \beta)r$, построить последовательности $\{x_n\}_{n=0,1,2,\dots}$, $\{\varphi_n\}_{n=0,1,2,\dots}$, для которых при всех $n \geq 0$

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\varphi_n}{\alpha} \leq \frac{\varphi_0}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \varphi_n \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \cdot \varphi_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Обе эти последовательности фундаментальны, а значит, в силу условий теоремы соответствующая последовательность $\{(x_n, \varphi_n)\}$ элементов графика $G(\varphi)$ (также фундаментальная) сходится к некоторой паре $(\xi, 0) \in G(\varphi)$.

Вычислим расстояние $\rho(x_0, \xi)$. Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\rho(x_0, x_n) \leq \sum_{k=0}^n \rho(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{\varphi_0}{\alpha} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k = \frac{\varphi_0}{\alpha} \cdot \frac{1 - (\beta/\alpha)^{n+1}}{1 - \beta/\alpha}.$$

Отсюда, применяя предельный переход при $n \rightarrow \infty$ и исходное неравенство $\varphi_0 \leq (\alpha - \beta)r$, получаем

$$\rho(x_0, \xi) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_0}{\alpha} \cdot \frac{1 - (\beta/\alpha)^{n+1}}{1 - \beta/\alpha} = \frac{\varphi_0}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \beta/\alpha} = \frac{\varphi_0}{\alpha - \beta} \leq r.$$

То есть $\xi \in U(x_0, r)$. Теорема доказана.

Рассмотрим применение этого варианта принципа каскадного поиска к задаче поиска прообраза замкнутого подпространства при многозначном отображении. Следующая теорема является локальным вариантом теоремы 2.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $F: X \rightarrow C(Y)$ – многозначное отображение и его график $G(F)$ H -полон, где $H \subset Y$ – замкнутое подпространство в Y . Пусть $\gamma > 0$, $0 < \beta < \alpha$, для каждого $x \in X$ и каждого $y \in F(x)$ существуют точки $x' \in X$ и $y' \in F(x')$, для которых выполнены неравенства (2), и, кроме того, для некоторой точки x_0 верно неравенство $d(F(x_0), H) < (\alpha - \beta)r$. Тогда на графике $G(F)$ определен мультикаскад с непустым предельным множеством, проекция которого на X есть полный прообраз $F^{-1}(H)$, причем $F^{-1}(H) \cap U(x_0, r) \neq \emptyset$. А именно, для начальной точки x_0 и для любого $y_0 \in F(x_0)$, для которого $d(y_0, H) < (\alpha - \beta)r$, существует такая соответствующая предельная пара $(\xi, \eta) = (\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0)) \in G(F)$, что

$$\rho(x_0, \xi) < r, \quad d(y_0, \eta) < \gamma\alpha r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия теоремы 6 содержат условия теоремы 2. В силу теоремы 2 на графике $G(F)$ определен мультикаскад с непустым предельным множеством, проекция которого на X есть полный прообраз $F^{-1}(H)$, причем для любой пары $(x, y) \in G(F)$ существует такая соответствующая ей предельная пара $(\xi, \eta) = (\xi(x, y), \eta(x, y)) \in G(F)$, что

$$\rho(x, \xi) \leq \frac{d(y, H)}{\alpha - \beta}, \quad d(y, \eta) \leq \frac{\gamma\alpha d(y, H)}{\alpha - \beta}.$$

Поэтому в силу условия $d(F(x_0), H) < (\alpha - \beta)r$ для всякой пары $(x_0, y_0) \in G(F)$, где $d(y_0, H) < (\alpha - \beta)r$, из предыдущих оценок получаются требуемые неравенства:

$$\rho(x_0, \xi) < r, \quad d(y_0, \eta) < \gamma\alpha r.$$

Теорема 6 доказана.

Теперь рассмотрим задачу о локальном поиске и аппроксимации подмножества таких точек совпадения конечного набора многозначных отображений, для которых существуют их общие значения, лежащие в замкнутом подпространстве $H \subseteq Y$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $F_1, \dots, F_n: X \rightarrow C(Y)$, $F = F_1 \times \dots \times F_n: X \rightarrow C(Y^n)$ и $H \subseteq Y$ – замкнутое подпространство. Пусть график $G(F)$ является $\Delta_n(H)$ -замкнутым и хотя бы один из графиков $G(F_i)$, $i = 1, \dots, n$, является H -полным. Пусть $\gamma > 0$, $0 < \beta < \alpha$, для каждого $x \in X$ и каждого $y \in F(x)$ существуют точки $x' \in X$ и $y' \in F(x')$, для которых выполнены неравенства (2), и, кроме того, для некоторой точки x_0 верно неравенство $D(F(x_0), \Delta_n(H)) < (\alpha - \beta)r$. Тогда на $G(F)$ определен мультикаскад с непустым предельным множеством, проекция которого на X есть $\text{Coin}_H(F_1, \dots, F_n) := \{x \in X \mid F_1(x) \cap \dots \cap F_n(x) \cap H \neq \emptyset\}$, причем для всякой пары $(x, y) \in G(F)$ существует такая соответствующая ей предельная пара $(\xi, \eta) \in G(F)$, что

$$\rho(x, \xi) \leq \frac{D(y, \Delta_n(H))}{\alpha - \beta}, \quad D(y, \Delta_n(H)) \leq \frac{\gamma\alpha D(y, \Delta_n(H))}{\alpha - \beta}.$$

Кроме того, $\text{Coin}_H(F_1, \dots, F_n) \cap U(x_0, r) \neq \emptyset$. А именно, для любой начальной пары $(x_0, y_0) \in G(F)$, $D(y_0, \Delta_n(H)) < (\alpha - \beta) \cdot r$, существует такая достижимая из нее предельная пара (ξ_0, η_0) , что $\rho(x_0, \xi_0) < r$, т.е. $\xi_0 \in U(x_0, r) \cap \text{Coin}_H(F_1, \dots, F_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы 6. Достаточно проверить, что $G(F)$ является $\Delta_n(H)$ -полным и применить затем теорему 6 к многозначному отображению $F = F_1 \times \dots \times F_n: X \rightarrow C(Y^n)$ и замкнутому подпространству $\Delta_n(H)$. Заметим, что $\Delta_n(H)$ -полнота графика $G(F)$ следует из условий теоремы 7 с помощью рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 3. Итак, $G(F)$ $\Delta_n(H)$ -полон, значит, все условия теоремы 6 для F и $\Delta_n(H)$ выполнены, и теорема 7 следует из теоремы 6.

Ясно, что при $n = 1$ теорема 7 совпадает с теоремой 6, а при $H = Y$ и $n \geq 2$ теорема 7 решает задачу локального поиска множества *всех* совпадений $\text{Coin}(F_1, \dots, F_n)$ данного конечного набора многозначных отображений. Кроме того, при $H = \{c\}$, $c \in Y$ теорема 7 позволяет осуществлять поиск общих корней отображений $F_1, \dots, F_n$, соответствующих их общему значению c . Мы не приводим здесь соответствующие формулировки.

Рассмотрим теперь вопрос об отыскании подмножества таких точек совпадения конечного набора многозначных отображений, в которых пересечение образов этих отображений содержит точки, лежащие “недалеко” от некоторого замкнутого подпространства $Q \subset Y$, т.е. в его заданной окрестности.

В следующей теореме для решения этого вопроса мы используем небольшое усиление условий локального каскадного поиска по графику функционала в сочетании с дополнительным условием на расстояние от подпространства Q до образа одного из заданных n отображений.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $F_1, \dots, F_n: X \rightarrow C(Y)$, $F = F_1 \times \dots \times F_n$, $Q \subset Y$ – замкнутое подпространство. Пусть график $G(F)$ является Δ_n -замкнутым и хотя бы один из графиков $G(F_i)$, $i = 1, \dots, n$, является полным. Пусть, кроме того, выполнены следующие условия:

- 1) для некоторых чисел α, β , $0 < \beta < \alpha$, $\gamma \geq 0$ отображение F и многозначный функционал φ , где

$$\varphi(x) := \left\{ \varphi \mid \varphi = \varphi(y) = \sum_{i=1}^{n-1} d(y_i, y_{i+1}), y = (y_1, \dots, y_n) \in F(x) \right\},$$

удовлетворяют следующему условию: для любой пары $(x, y) \in G(F)$ существует пара $(x', y') \in G(F)$ такая, что выполнены неравенства

$$\rho(x, x') \leq \frac{\varphi(y)}{\alpha}, \quad \varphi(y') \leq \beta \cdot \rho(x, x'), \quad d(y_n, y'_1) \leq \gamma \cdot \rho(x, x'), \quad (3)$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y' = (y'_1, \dots, y'_n)$;

- 2) существует такая пара $(x_0, y_0) \in G(F)$, что $d(y_{01}, Q) \leq (\alpha - \beta)R$, и

$$\varphi_0 = \varphi(y_0) \leq \frac{\beta(\alpha - \beta) \min\{r, R\}}{\alpha + \gamma} \quad \text{для некоторых } r > 0, \quad R > 0.$$

Тогда на $G(F)$ определен мультикаскад с непустым предельным множеством $C \subseteq G(F)$, проекция которого на X есть $\text{Coin}(F_1, \dots, F_n)$, причем $\text{Coin}(F_1, \dots, F_n) \cap U(x_0, r) \neq \emptyset$. В частности, для любой пары $(x_0, y_0) \in G(F)$, удовлетворяющей условию 2), существует достижимая из нее предельная пара $(\xi, \tilde{\eta}) \in G(F)$, $\tilde{\eta} = (\eta, \dots, \eta) \in \Delta_n$, для которой $\xi = \xi(x_0, y_0) \in C \cap U(x_0, r)$. Кроме того, $\eta = \eta(x_0, y_0) \in U(Q, \alpha R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, из того, что график $G(F)$ является Δ_n -замкнутым и хотя бы один из графиков $G(F_i)$, $i = 1, \dots, n$, полон, следует, что график $G(\varphi)$ является 0-полным. Покажем это. Пусть, например, полным является график $G(F_1)$. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{(x_m, \varphi_m)\}_{m=1,2,\dots}$, где $\varphi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$,

$$\varphi_m = \varphi(y_m) = \sum_{i=1}^{n-1} d(y_{mi}, y_{mi+1}),$$

где $y_m = (y_{m1}, \dots, y_{mn}) \in F(x_m) = F_1(x_m) \times \dots \times F_n(x_m)$, $m \geq 1$.

Фундаментальность последовательности $\{y_{m1}\}_{m=1,2,\dots}$ обеспечивается неравенствами (3). В самом деле, это следует из неравенств

$$\begin{aligned} d(y_{m1}, y_{m+11}) &\leq \varphi_m + d(y_{mn}, y_{m+11}) \\ &\leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \varphi_0 + \gamma \cdot \rho(x_m, x_{m+1}) \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \varphi_0 + \frac{\gamma}{\alpha} \varphi_m \\ &\leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \varphi_0 + \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \varphi_0 = \varphi_0 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Итак, последовательность $\{y_{m1}\}_{m=1,2,\dots}$ фундаментальна. Следовательно, фундаментальна и последовательность $\{(x_m, y_{m1})\}_{m=1,2,\dots} \subseteq G(F_1)$. В силу полноты графика $G(F_1)$ она сходится к некоторой паре $(\xi, \eta) \in G(F_1)$. С другой стороны, так как $\varphi_m = \sum_{i=1}^{n-1} d(y_{mi}, y_{mi+1}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, последовательности $\{y_{mi}\}_{m=1,2,\dots}$, $i = 1, \dots, n$, сближаются. Следовательно, все они фундаментальны и сходятся к одному и тому же пределу η . Это означает, что исходная последовательность $\{(x_m, \varphi_m)\}_{m=1,2,\dots}$ сходится к паре $(\xi, 0) \in G(\varphi)$. Итак, график $G(\varphi)$ является 0-полным.

Далее, заметим, что неравенства (3) из условия 1) теоремы 8 содержат усиление неравенств (1). Следовательно, функционал φ является обобщенно (α, β) -поисковым. Отсюда следует, в силу теоремы 1, что на графике $G(\varphi)$ определен мультикаскад с непустым предельным множеством, проекция которого на X есть $\text{Nil}(\varphi) = \text{Coin}(F_1, \dots, F_n)$. В силу определения функционала φ это означает, что определен мультикаскад на графике $G(F)$ с непустым предельным множеством, проекция которого на X есть множество совпадений $\text{Coin}(F_1, \dots, F_n)$.

Пусть теперь пара $(x_0, y_0) \in G(F)$ удовлетворяет условию 2), и пусть $(\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0))$ – произвольная соответствующая ей предельная пара. Тогда из теоремы 5 и условия 2) теоремы 8 следует, что

$$\rho(x_0, \xi(x_0, y_0)) \leq \frac{\varphi_0}{\alpha - \beta} \leq r.$$

Таким образом, $\text{Coin}(F_1, \dots, F_n) \cap U(x_0, r) \neq \emptyset$.

Осталось показать, что $\eta = \eta(x_0, y_0) \in U(Q, \alpha R)$. Применяя неравенство треугольника и неравенства из условий 1) и 2), $\forall m \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned}
 d(Q, y_{m1}) &\leq d(Q, y_{01}) + \sum_{k=1}^m d(y_{k-11}, y_{k1}) \\
 &\leq d(Q, y_{01}) + \sum_{k=1}^m [\varphi_{k-1} + d(y_{k-1n}, y_{k1})] \\
 &\leq d(Q, y_{01}) + \sum_{k=1}^m \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{k-1} \cdot \varphi_0 + \gamma \cdot \rho(x_{k-1}, x_k) \right] \\
 &\leq d(Q, y_{01}) + \varphi_0 \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^k + \frac{\gamma \varphi_0}{\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^k \\
 &= d(Q, y_{01}) + \varphi_0 \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^k < d(Q, y_{01}) + \varphi_0 \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \frac{1}{1 - \beta/\alpha} \\
 &= d(Q, y_{01}) + \varphi_0 \frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \beta} \leq (\alpha - \beta)R + \beta \cdot \min\{r, R\} \leq \alpha R.
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем: $d(Q, \eta) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(Q, y_{m1}) \leq \alpha R$. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 8 является по сути локальной модификацией утверждения [2; теорема 2].

Аналогично можно сформулировать и доказать локальную версию теоремы 6 о поиске прообразов заданного замкнутого подпространства, а также аналогичные локальные теоремы о поиске общих неподвижных точек или общих корней конечного набора многозначных отображений.

Приведем еще один вариант локального поиска совпадений n многозначных отображений с общими значениями вблизи заданного замкнутого подмножества Q в Y . В этом варианте каскадный поиск осуществляется на квадрате графика $G(F) \times G(F)$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $F_1, \dots, F_n: X \rightarrow C(Y)$, $F = F_1 \times \dots \times F_n$,

$$\varphi(x) := \left\{ \varphi \mid \varphi = \varphi(y) = \sum_{i=1}^{n-1} d(y_i, y_{i+1}), y = (y_1, \dots, y_n) \in F(x) \right\},$$

$Q \subset Y$ – замкнутое подпространство. Пусть график $G(F)$ является Δ_n -замкнутым и хотя бы один из графиков $G(F_i)$, $i = 1, \dots, n$, является полным. Пусть, кроме того, для некоторых чисел $0 < \beta < \alpha$, $\gamma \geq 0$, $r > 0$, $R > 0$ выполнены следующие условия (где $y = (y_1, \dots, y_n)$):

а) для любой пары $(x, y) \in G(F)$ существует такая пара $(x', y') \in G(F)$, что выполнены неравенства

$$\varphi(y') \leq \beta \cdot \rho(x, x'), \quad d(y_n, y'_1) \leq \gamma \cdot \rho(x, x'); \quad (4)$$

б) для любой пары пар $((x, y), (x', y')) \in G(F) \times G(F)$ существует такая пара $(x'', y'') \in G(F)$, что верны неравенства

$$\varphi(y'') \leq \beta \cdot \rho(x', x''), \quad d(y'_n, y''_1) \leq \gamma \cdot \rho(x', x''), \quad \rho(x', x'') \leq \frac{\beta}{\alpha} \rho(x, x');$$

- с) существует пара пар $((x_0, y_0), (x_1, y_1)) \in G(F) \times G(F)$, удовлетворяющая условию а), для которой

$$d(y_{0n}, Q) \leq (\alpha - \beta)R, \quad \rho(x_0, x_1) \leq \frac{\beta(\alpha - \beta)}{\alpha(\beta + \gamma)} \min\{r, R\}.$$

Тогда на $G(F) \times G(F)$ определен мультикаскад с непустым предельным множеством $\mathcal{A} \subseteq \Delta$, где Δ – диагональ в $G(F) \times G(F)$. Проекция любой траектории этого мультикаскада на первую компоненту есть аппроксимационная последовательность в $G(F)$, сходящаяся к паре вида $(\xi, \eta) \in G(F)$, где $\xi \in \text{Coin}(F_1, \dots, F_n)$. Кроме того, если такая последовательность начинается с пар $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, удовлетворяющих условию с), то она сходится к такой паре $(\xi_0, \eta_0) \in G(F)$, что $\xi_0 \in \text{Coin}(F_1, \dots, F_n) \cap U(x_0, r)$, $\eta_0 \in (\bigcap_{k=1}^n F_k(\xi_0)) \cap U(Q, \alpha R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Везде ниже в доказательстве отображением для краткости будем называть вообще говоря многозначное отображение. Согласно условию b) теоремы 9 на $G(F) \times G(F)$ определено отображение $S: G(F) \times G(F) \rightarrow P(G(F))$, для которого $S((x, y), (x', y')) = \{(x'', y'')\}$, где (x'', y'') – любая пара, удовлетворяющая условию b) относительно $((x, y), (x', y'))$. Обозначим $T: G(F) \times G(F) \rightarrow P(G(F) \times G(F))$, где $T((x, y), (x', y')) = ((x', y'), S((x, y), (x', y')))$. Покажем, что отображение T генерирует на $G(F) \times G(F)$ мультикаскад с предельным множеством $\mathcal{A} \subseteq \Delta$, где Δ – диагональ в $G(F) \times G(F)$. В самом деле, рассмотрим произвольную траекторию этого мультикаскада $\{((x_m, y_m), (x'_m, y'_m))\}_{m=1,2,\dots}$. Согласно ее построению $(x_{m+1}, y_{m+1}) = (x'_m, y'_m)$, т.е. последовательность первых компонент этой траектории совпадает с последовательностью вторых ее компонент “с отставанием на 1 шаг”. Поэтому указанные последовательности сходятся или расходятся одновременно, и если сходятся, то их пределы одинаковы. Покажем, что последовательность первых компонент сходится. По ее построению, имеем следующие условия для ее членов (x_m, y_m) , $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} \varphi(y_{m+1}) &\leq \beta \cdot \rho(x_m, x_{m+1}), & d(y_{mn}, y_{(m+1)1}) &\leq \gamma \cdot \rho(x_m, x_{m+1}), \\ \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) &\leq \frac{\beta}{\alpha} \rho(x_m, x_{m+1}). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \rho(x_m, x_{m+1}) &\leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{m-1} \rho(x_1, x_2) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \\ D(y_m, y_{m+1}) &= \sum_{i=1}^{n-1} d(y_{mi}, y_{(m+1)i}) \leq n \cdot (\varphi(y_m) + \varphi(y_{m+1}) + d(y_{mn}, y_{(m+1)1})) \\ &\leq n \cdot [\beta \cdot \rho(x_{m-1}, x_m) + \beta \cdot \rho(x_m, x_{m+1}) + \gamma \cdot \rho(x_m, x_{m+1})] \\ &\leq n \cdot \left[\beta + \beta \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \gamma \cdot \frac{\beta}{\alpha} \right] \rho(x_{m-1}, x_m) \\ &< n \cdot (2\beta + \gamma) \rho(x_{m-1}, x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Это значит, что последовательность $\{(x_m, y_m)\}$ фундаментальна. Кроме того, легко видеть, что $\varphi(y_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, поэтому последовательности $\{y_{mi}\}_{m=1,2,\dots}$, $1 \leq i \leq n$,

сближаются. Из условий теоремы о том, что один из графиков $G(F_i)$, $1 \leq i \leq n$, полон, а график $G(F)$ является Δ -замкнутым, следует, что последовательность $\{(x_m, y_m)\}$ сходится к некоторой паре $(\xi, \tilde{\eta}) \in G(F)$, где $\tilde{\eta} = (\eta, \dots, \eta) \in \Delta(Y)$, т.е. $\xi \in \text{Coin}(F_1, \dots, F_n)$.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть последовательность первых компонент $\{(x_m, y_m)\}$ траектории построенного мультикаскада начинается с пар (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , удовлетворяющих условию с) теоремы 9. Оценим в этом случае расстояния $\rho(x_0, \xi)$, $d(Q, \eta)$.

Искомые оценки получаются следующим стандартным образом. Обозначим $\rho_m = \rho(x_m, x_{m+1})$, $\varphi_m = \varphi(y_m)$, $m = 0, 1, \dots$. Имеем

$$\begin{aligned} \rho(x_0, \xi) &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \leq \rho_0 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m = \frac{\alpha \rho_0}{\alpha - \beta} \leq \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\beta(\alpha - \beta)}{\alpha(\beta + \gamma)} \cdot \min\{r, R\} \leq r, \\ d(Q, \eta) &\leq d(Q, y_{0n}) + d(y_{0n}, y_{11}) + \sum_{m=1}^{\infty} d(y_{m1}, y_{(m+1)1}) \\ &\leq d(Q, y_{0n}) + \gamma \rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi_m + \gamma \rho_m) \leq (\alpha - \beta)R + \gamma \rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta \cdot \rho_m + \gamma \cdot \rho_m) \\ &\leq (\alpha - \beta)R + \gamma \rho_0 + (\beta + \gamma) \rho_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m < (\alpha - \beta)R + (\beta + \gamma) \rho_0 \frac{1}{1 - \beta/\alpha} \\ &= (\alpha - \beta)R + \frac{(\beta + \gamma)\alpha \rho_0}{\alpha - \beta} \leq (\alpha - \beta)R + \beta \min\{r, R\} \leq \alpha R. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из теоремы 9 вытекает, например, такое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $F_1, \dots, F_n: X \rightarrow C(Y)$, $F = F_1 \times \dots \times F_n$,

$$\varphi(x) := \left\{ \varphi \mid \varphi = \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} d(y_i, y_{i+1}), y = (y_1, \dots, y_n) \in F(x) \right\},$$

$Q \subset Y$ – замкнутое подпространство. Пусть график $G(F)$ является Δ_n -замкнутым и хотя бы один из графиков $G(F_i)$, $i = 1, \dots, n$, является полным. Пусть существуют такие числа $0 < \beta < \alpha$, $\gamma \geq 0$, $r > 0$, $R > 0$, что для некоторой пары $(x_0, y_0) \in G(F)$ верно неравенство $d(y_{0n}, Q) \leq (\alpha - \beta)R$ и существует начинающаяся из нее последовательность $\{(x_m, y_m)\}_{m=0,1,\dots} \subseteq G(F)$, удовлетворяющая следующим неравенствам ($m \geq 1$):

$$\begin{aligned} \rho(x_0, x_1) &\leq \frac{\beta(\alpha - \beta)}{\alpha(\beta + \gamma)} \min\{r, R\}, & \varphi(y_m) &\leq \beta \cdot \rho(x_{m-1}, x_m), \\ d(y_{mn}, y_{(m+1)1}) &\leq \gamma \cdot \rho(x_m, x_{m+1}), & \rho(x_m, x_{m+1}) &\leq \frac{\beta}{\alpha} \rho(x_{m-1}, x_m). \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда всякая такая последовательность $\{(x_m, y_m)\}_{m=0,1,\dots}$ имеет предел $(\xi, \eta) \in G(F)$, где $\xi \in \text{Coin}(F_1, \dots, F_n) \cap U(x_0, r)$, $\eta \in (\bigcap_{i=1}^n F_i(\xi)) \cap U(Q, \alpha R)$.

При $n = 2$ предложение 1 тесно связано со следующим результатом работы [12], который представляет собой локальную модификацию теоремы Арутюнова [6; теорема 2].

ТЕОРЕМА 10 [12; теорема 2]. Пусть $\Psi: X \rightarrow C(Y)$ – многозначное отображение, которое для заданных $\alpha > 0$, $x_0 \in X$, замкнутого подмножества $D_0 \subseteq \Psi(x_0)$, $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$ является замкнутым и α -накрывающим по отношению к множествам $U(x_0, R_1) \subseteq X$ и $U(D_0, \alpha R_2) \subseteq Y$ (т.е. $U(\Psi(x), \alpha r) \cap U(D_0, \alpha R_2) \subseteq \Psi(U(x, r))$ для любого $r > 0$). Пусть многозначное отображение $\Phi: U(x_0, R_1) \rightarrow C(Y)$ является $\tilde{\beta}$ -липшицевым для некоторого $\tilde{\beta}$, $0 \leq \tilde{\beta} < \alpha$, хотя бы один из графиков $G(\Psi|_{U(x_0, R_1)})$ или $G(\Phi)$ является полным множеством и $d(D_0, \Phi(x_0)) < (\alpha - \tilde{\beta}) \times \min\{R_1, R_2\}$. Тогда множество $\Theta = \{\xi \in U(x_0, R_1) : \Psi(\xi) \cap \Phi(\xi) \neq \emptyset\}$ точек совпадения многозначных отображений Ψ и Φ непусто и, кроме того,

$$d(x_0, \Theta) \leq \frac{d(\Psi(x_0), \Phi(x_0) \cap U(D_0, (\alpha - \tilde{\beta})R_2))}{\alpha - \tilde{\beta}}.$$

Доказательство теоремы 10, приведенное в [12; теорема 2], дает достаточные условия для существования последовательности, удовлетворяющей условиям предложения 1, при $n = 2$.

Действительно, в предложении 1 положим $n = 2$, $\beta = \tilde{\beta} + \alpha\delta$ при достаточно малом δ , удовлетворяющем неравенству $0 < \delta < 1 - \tilde{\beta}/\alpha$. Так как по условию теоремы 10 отображение Ψ замкнуто, а отображение Φ $\tilde{\beta}$ -липшицево (следовательно, тоже замкнуто, т.е. имеет замкнутый график), то график отображения $F = \Psi \times \Phi$ является замкнутым. Кроме того, один из графиков отображений Ψ , Φ предполагается по условию полным. Далее, в доказательстве теоремы 10 в [12] строятся последовательности $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ и $\{y_m\}_{m \geq 1}$, начинающиеся соответственно из точек x_0 и

$$y_1 \in \Phi(x_0) \cap U(\Psi(x_0), \alpha r_0) \cap U(D_0, (\alpha - \tilde{\beta})R_2),$$

где

$$\alpha r_0 = d(\Psi(x_0), \Phi(x_0) \cap U(D_0, (\alpha - \tilde{\beta})R_2)) + \delta,$$

где δ достаточно мало и $0 < \delta < 1 - \tilde{\beta}/\alpha$. Члены этих последовательностей удовлетворяют следующим условиям: $x_m \in U(x_0, R_1)$, $y_m \in U(D_0, \alpha R_2)$. Кроме того, выполнено

$$\rho(x_0, x_1) \leq \frac{d(\Psi(x_0), \Phi(x_0) \cap U(D_0, (\alpha - \tilde{\beta})R_2)) + \delta}{\alpha}, \quad (6)$$

$$\rho(x_{k-1}, x_k) \leq \left(\frac{\tilde{\beta}}{\alpha} + \delta \right) \rho(x_{k-2}, x_{k-1}), \quad k \geq 2, \quad (7)$$

$$y_k \in \Psi(x_k) \cap \Phi(x_{k-1}), \quad k \geq 1, \quad (8)$$

$$d(y_{k-1}, y_k) \leq (\tilde{\beta} + \alpha\delta) \rho(x_k, x_{k-1}), \quad k \geq 2. \quad (9)$$

В доказательстве теоремы 10 в [12] показано, что из ее условий вытекает следующее двойное неравенство:

$$d(\Psi(x_0), \Phi(x_0) \cap U(D_0, (\alpha - \tilde{\beta})R_2)) \leq d(D_0, \Phi(x_0)) < (\alpha - \tilde{\beta}) \min\{r, R\}.$$

Отсюда и из неравенства (6) авторы [12] получают, что

$$\rho(x_0, x_1) \leq \frac{d(\Psi(x_0), \Phi(x_0) \cap U(D_0, (\alpha - \tilde{\beta})R_2)) + \delta}{\alpha} < \frac{(\alpha - \tilde{\beta}) \min\{r, R\} + \delta}{\alpha}$$

и, следовательно, при достаточно малых $\delta > 0$ верно неравенство

$$\rho(x_0, x_1) \leq \frac{(\alpha - \beta)\tilde{\beta} \min\{r, R\}}{\alpha\beta} \quad (\beta = \tilde{\beta} + \alpha\delta).$$

Отсюда следует оценка

$$\rho(x_0, x_1) \leq \frac{(\alpha - \beta)\tilde{\beta} \min\{r, R\}}{\alpha\beta} \leq \frac{(\alpha - \beta) \min\{r, R\}}{\alpha},$$

совпадающая при $\gamma = 0$ с оценкой

$$\rho(x_0, x_1) \leq \frac{\beta(\alpha - \beta)}{\alpha(\beta + \gamma)} \min\{r, R\},$$

указанной в предложении 1 (а также в теореме 9). Таким образом, неравенства (6)–(9) обеспечивают выполнение всех неравенств (5) для рассматриваемых в доказательстве теоремы 10 в [12] последовательностей, начинающихся из пары (x_0, y_0) , если положить $n = 2$, $\beta = \tilde{\beta} + \alpha\delta$, $\gamma = 0$, где δ достаточно мало и $0 < \delta < 1 - \tilde{\beta}/\alpha$. Следовательно, при указанном выборе параметров выполнены все условия предложения 1.

Следует отметить, что предложение 1 может гарантировать существование точки совпадения при $n = 2$ даже в том случае, когда условия теоремы 10 не выполнены. Это обусловлено тем, что, в отличие от теоремы 10, в предложении 1 (как и в теореме 9) не предполагается свойств накрываемости и липшицевости отображений, а также не предполагается, что $Q \subseteq \Psi(x_0)$, и параметр γ не обязательно нулевой.

Приведем соответствующий пример.

ПРИМЕР. Пусть $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ со стандартной метрикой. Зададим числа $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0$, $r = R = 1.1$, $Q = [0.5; 2] \subset Y$, $0.45 < \lambda \leq 0.5$. Определим 2 отображения $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ следующим образом.

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-0.5}e^x + \frac{1}{3e}(e^x - e^{\lambda x}) \left| \sin \frac{1}{x} \right|, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-0.5}e^{\lambda x} + \frac{1}{3e}(e^{\lambda x} - e^{\lambda^2 x}) \left| \sin \frac{1}{\lambda x} \right|, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

В данном случае пространство X полно и графики обоих отображений замкнуты. Несложно убедиться, что ни одно из этих отображений не является ни α -накрывающим, ни β -липшицевым на пространстве X . Ни одно из них не является также α -накрывающим по отношению к окрестностям $U(1; 1.1)$ и $U(Q; 1.1)$. Таким образом, условия теоремы 10 [12; теорема 2] здесь не выполнены. Покажем, что, тем не менее,

все условия предложения 1 для точки $x_0 = 1$ выполнены. Проверим выполнение соответствующих неравенств.

Заметим, что так как $\gamma = 0$, то неравенство $d(y_{mn}, y_{(m+1)1}) \leq \gamma \cdot \rho(x_m, x_{m+1})$ превращается в равенство $f_2(x_m) = f_1(x_{m+1})$. Поскольку для всех $x \in \mathbb{R}$ из определения функций f_1, f_2 следует, что $f_2(x) = f_1(\lambda x)$, отсюда вытекает, что $x_{m+1} = \lambda x_m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому $x_m = (\lambda)^m x_0 = (\lambda)^m$ и $\rho(x_m, x_{m+1}) = (1 - \lambda)x_m$.

Проверим неравенство

$$\rho(x_0, x_1) < \frac{\beta(\alpha - \beta)}{\alpha(\beta + \gamma)} \min\{r, R\}.$$

В самом деле,

$$\rho(x_0, x_1) = 1 - \lambda < \frac{\beta(\alpha - \beta)}{\alpha(\beta + \gamma)} \min\{r, R\} = 0.5 \min\{r, R\} = 0.5 \cdot 1.1 = 0.55.$$

Проверим неравенство $\varphi(y_m) \leq \beta \cdot \rho(x_{m-1}, x_m)$. В указанных условиях

$$\begin{aligned} \varphi(y_m) &= d(y_{m1}, y_{m2}) = d(f_1(x_m), f_2(x_m)) = |f_1(x_m) - f_2(x_m)| \\ &= \frac{1}{2} e^{-0.5} (e^{x_m} - e^{\lambda x_m}) + \frac{1}{3e} \left[(e^{x_m} - e^{\lambda x_m}) \left| \sin \frac{1}{x_m} \right| - (e^{\lambda x_m} - e^{\lambda^2 x_m}) \left| \sin \frac{1}{\lambda x_m} \right| \right]. \end{aligned}$$

Применяя формулу конечных приращений Лагранжа к функции e^{tx} , имеем

$$e^x - e^{\lambda x} = x e^{\xi x} (1 - \lambda) < x e^x (1 - \lambda), \quad \lambda < \xi < 1.$$

Пользуясь этим, а также применяя неравенство треугольника, оценку синуса и неравенство $0.45 < \lambda \leq 0.5$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(y_m) &= \frac{1}{2} e^{-0.5} (e^{x_m} - e^{\lambda x_m}) + \frac{1}{3e} \left[(e^{x_m} - e^{\lambda x_m}) \left| \sin \frac{1}{x_m} \right| - (e^{\lambda x_m} - e^{\lambda^2 x_m}) \left| \sin \frac{1}{\lambda x_m} \right| \right] \\ &< \frac{1}{2} e^{-0.5} [x_m e^{x_m} (1 - \lambda)] + \frac{1}{3e} [(e^{x_m} - e^{\lambda x_m}) + (e^{\lambda x_m} - e^{\lambda^2 x_m})] \\ &= \frac{1}{2} e^{-0.5} [x_m e^{x_m} (1 - \lambda)] + \frac{1}{3e} [(e^{x_m} - e^{\lambda^2 x_m})] \\ &< \frac{1}{2} e^{-0.5} [x_m e^{x_m} (1 - \lambda)] + \frac{1}{3e} x_m e^{x_m} (1 - \lambda^2) \\ &= x_m e^{x_m - 0.5} (1 - \lambda) \left(\frac{1}{2} + \frac{1 + \lambda}{3e^{0.5}} \right) \leq x_m e^{x_m - 0.5} (1 - \lambda) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{0.5}} \right) \\ &< \lambda^m x_0 (1 - \lambda) \leq \frac{1}{2} (1 - \lambda) \lambda^{m-1} x_0 = \frac{1}{2} \rho(x_{m-1}, x_m). \end{aligned}$$

Итак, $\varphi(y_m) < 0.5 \rho(x_{m-1}, x_m) = \beta \rho(x_{m-1}, x_m)$.

Проверим неравенство $d(y_{0n}, Q) \leq (\alpha - \beta)R$.

$$\begin{aligned} d(y_{02}, Q) &= d(f_2(x_0), Q) = |0.5 - f_2(1)| \\ &= 0.5 - \left(0.5 e^{\lambda - 0.5} + \frac{1}{3e} (e^{\lambda} - e^{\lambda^2}) \left| \sin \frac{1}{\lambda} \right| \right) < 0.5 < (\alpha - \beta)R = 0.55. \end{aligned}$$

Осталось проверить неравенство

$$\rho(x_m, x_{m+1}) \leq \frac{\beta}{\alpha} \rho(x_{m-1}, x_m), \quad m \geq 1.$$

В самом деле, поскольку $\lambda \leq \frac{1}{2}$, то

$$\rho(x_m, x_{m+1}) = (1 - \lambda)x_m = \lambda^m x_0(1 - \lambda) \leq \frac{1}{2} \lambda^{m-1} x_0(1 - \lambda) = \frac{1}{2} \rho(x_{m-1}, x_m).$$

Итак все условия предложения 1 выполнены.

Автор благодарит А. В. Арутюнова за ряд замечаний и предложений, способствовавших улучшению изложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Т. Н. Фоменко, “О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств”, *Матем. заметки*, **86**:1 (2009), 110–125.
- [2] Т. Н. Фоменко, “К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений”, *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 304–309.
- [3] T. N. Fomenko, “Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings”, *Topology Appl.*, **157**:4 (2010), 760–773.
- [4] Т. Н. Фоменко, “О приближении к точкам совпадения конечного набора отображений метрических пространств”, *Abstracts of the Fifth International Conference of Differential and Functional Differential Equations (DFDE-2008)* (Moscow, Russia, August 17–24, 2008), 119.
- [5] Т. Н. Фоменко, “Принцип каскадного поиска и совпадения N отображений”, *Материалы международной конференции “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвященной 70-летию В. А. Садовниченко* (30 марта–02 апреля 2009 г., МГУ, Москва), 99.
- [6] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *ДАН*, **416**:2 (2007), 151–155.
- [7] А. В. Арутюнов, “Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений”, *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 163–169.
- [8] T. N. Fomenko, “The stability of Cascade Search Principle”, *Abstracts of the 2010 International Conference on Topology and its Applications* (June 26–30, Nafpaktos, Greece), Nafpaktos, 2010, 99.
- [9] Т. Н. Фоменко, “Устойчивость каскадного поиска”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:5 (2010), 171–190.
- [10] Т. Н. Фоменко, “Каскадный поиск: устойчивость достижимых предельных точек”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, №5, 3–9.
- [11] T. N. Fomenko, “New developments in the cascade search theory”, *Abstracts of the 8-th International ISAAC Congress* (Moscow, August 22–27), 2011, 369.
- [12] A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk, V. Obukhovskii, “Locally covering maps in metric spaces and coincidence points”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2009, №1, 105–127.

Т. Н. Фоменко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: tn-fomenko@yandex.ru

Поступило

29.09.2011

Исправленный вариант

29.12.2011