Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Горелов, Об алгебраической независимости значений обобщенных гипергеометрических функций, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 1, 94–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:31:48

Об алгебраической независимости значений обобщенных гипергеометрических функций

В. А. Горелов

Рассматриваются гипергеометрические функции, удовлетворяющие однородным линейным дифференциальным уравнениям произвольных порядков. Доказываются общие теоремы об алгебраической независимости решений совокупностей гипергеометрических уравнений, а также значений этих решений в алгебраических точках. Условия большинства теорем являются необходимыми и достаточными.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm9256

Обозначим $\mathbb{A}$, $\mathbb{Z}^-$ и $\mathbb{Z}^+$ соответственно множество всех алгебраических чисел, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Известные в теории специальных функций обобщенные гипергеометрические функции (см. [1; гл. 5], [2; гл. 4]) определяются так:

$${}_lF_{q-1}(z) = {}_lF_{q-1}(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) = {}_lF_{q-1}(\nu_1, \dots, \nu_l; \lambda_2, \dots, \lambda_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_n \cdots (\nu_l)_n z^n}{n! (\lambda_2)_n \cdots (\lambda_q)_n},$$

где $0 \leq l \leq q$, $\nu_1, \dots, \nu_l \in \mathbb{C}$, $\lambda_2, \dots, \lambda_q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$,

$$(\nu)_0 = 1, \quad (\nu)_n = \nu(\nu+1) \cdots (\nu+n-1).$$

Будем считать, что в вектор $\vec{\lambda}$, относящийся к функции ${}_lF_{q-1}(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$, входит компонента $\lambda_1 = 1$. В виде ${}_lF_{q-1}(z)$ представляются e^z , $\cos z$, функция Бесселя и другие специальные функции. Функция ${}_lF_{q-1}(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$ — одно из решений дифференциального уравнения

$$L(\vec{\nu}; \vec{\lambda})y \equiv L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)y \equiv \left(\prod_{j=1}^q (\delta + \lambda_j - 1) - z \prod_{k=1}^l (\delta + \nu_k) \right) y = 0, \quad (1)$$

где $\delta = zd/dz$ (см. [1], [2] или лемму 1).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2033.2012.1).

Метод Зигеля (см. [3], [4]), являющийся одним из основных методов теории трансцендентных чисел, позволяет устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений гипергеометрических функций ${}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; (z/(q-l))^{q-l})$, где

$${}_l\varphi_q(z) = {}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_n \cdots (\nu_l)_n}{(\lambda_1)_n \cdots (\lambda_q)_n} z^n,$$

$0 \leq l < q$, $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$, принадлежащих классу Е-функций (определение см. там же). Если $\lambda_1 = 1$, то, очевидно, ${}_l\varphi_q(z) = {}_lF_{q-1}(z)$. Функция ${}_l\varphi_q(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L(\vec{\nu}; \vec{\lambda})y = (\lambda_1 - 1) \cdots (\lambda_q - 1).$$

Как было выяснено Шидловским [4; гл. 3, 4], вопрос об алгебраической независимости значений функций ${}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z^{q-l})$ и, следовательно, функций ${}_l\varphi_q(z)$, ${}_lF_{q-1}(z)$ при $\vec{\nu} \in \mathbb{Q}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{Q}^q$ в алгебраических точках сводится к вопросу об алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций ${}_l\varphi_q(\alpha z^{q-l})$, где $\alpha \in \mathbb{A}$. Это способствовало поиску новых методов доказательства алгебраической независимости гипергеометрических функций.

Для векторов $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ будем писать $\vec{\mu} \sim \vec{\eta}$, если существует перестановка π чисел $1, \dots, n$ такая, что $\mu_i - \eta_{\pi(i)} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$. В дальнейшем употребляется также обозначение $\gamma\vec{\mu} + \beta = (\gamma\mu_1 + \beta, \dots, \gamma\mu_n + \beta)$, где $\gamma, \beta \in \mathbb{C}$. Запись $(\vec{\nu}; \vec{\lambda}) \sim \gamma(\vec{\mu}; \vec{\eta}) + \beta$ означает, что $\vec{\nu} \sim \gamma\vec{\mu} + \beta$, $\vec{\lambda} \sim \gamma\vec{\eta} + \beta$. Если вектор $\vec{\lambda}$ используется в качестве набора параметров для функции ${}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$ или дифференциального оператора $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda})$ и имеет компоненту, равную 1, то эта компонента автоматически переставляется на первое место. Символом $\mathbb{F}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ обозначается дифференциальное поле, полученное присоединением к $\mathbb{F}$ дифференциальных переменных $v_1, \dots, v_n$. Знак A^T будет означать матрицу, транспонированную с A , знак $\circ$ – композицию операторов, $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ – кольцо $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Явный вид уравнения $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)y = 0$, получаемого из (1) подстановкой $z \rightarrow \alpha z^p$, приведен в лемме 1.

Если $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq k$, то функции

$$z^{1-\lambda_k} {}_lF_{q-1}(\vec{\nu} + 1 - \lambda_k; \vec{\lambda} + 1 - \lambda_k; z), \quad k = 1, \dots, q, \quad (2)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) (см. [1; § 5.7] или лемму 1).

Уравнение (1) называется *приводимым* (*линейно приводимым*), если оно имеет решение $y \not\equiv 0$ такое, что $y, y', \dots, y^{(q-1)}$ алгебраически (линейно) зависимы над $\mathbb{C}(z)$, и *неприводимым* (*линейно неприводимым*) в противном случае. Для системы дифференциальных уравнений эти понятия определяются аналогично.

Необходимые и достаточные условия неприводимости уравнений $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z^{q-l})y = 0$, кроме случая $q - l = 6$, $l \leq 3$, получены Салиховым [5]. В статье Бейкера, Браунвелла и Хекмана [6] при естественных ограничениях установлена алгебраическая независимость значений решений совокупности уравнений вида (1). Черепнев [7] распространил результаты статьи [6] на случай неоднородных уравнений. В настоящей работе доказываются более общие теоремы, условия которых в большинстве случаев являются необходимыми и достаточными.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\vec{\nu}_k = (\nu_{k,1}, \dots, \nu_{k,l_k}) \in \mathbb{Q}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k = (\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,q_k}) \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $q_k \geq \max(2, l_k + 1)$, $F_k(z) = {}_{l_k}F_{q_k-1}(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; z)$, $\alpha_k \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, дифференциальные уравнения $L(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; z^{q_k-l_k})y = 0$ неприводимы, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 1$, а числа $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{A}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Пусть если

$$(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k) \sim (-1)^r((\vec{\nu}_s; \vec{\lambda}_s) - \lambda_{s,j}),$$

где $1 \leq k < s \leq n$, $1 \leq j \leq q_s$, $r \in \{0, 1\}$, то

$$\alpha_k \neq (-1)^{(q_k-l_k)r} \alpha_s.$$

Тогда $q_1 + \dots + q_n + m$ чисел

$$F_1(\alpha_1), F'_1(\alpha_1), \dots, F_1^{(q_1-1)}(\alpha_1), \dots, F_n(\alpha_n), \dots, F_n^{(q_n-1)}(\alpha_n), e^{\gamma_1}, \dots, e^{\gamma_m} \quad (3)$$

алгебраически независимы.

С учетом упомянутых результатов Салихова теорема 1 усиливает аналогичную теорему из [6]. Заметим, что группа Галуа неприводимой системы дифференциальных уравнений содержит $\mathrm{SL}(q, \mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}(q, \mathbb{C})$ [6; с. 280, теорема 2.2]. Конкретный вид группы Галуа гипергеометрического уравнения найден Н. Кацем [8]. Как оказалось, в преобладающем большинстве случаев она содержит $\mathrm{SL}(q, \mathbb{C})$. Исключение составляет относительно небольшое множество случаев, для которых, среди прочих условий, $q - l$ четно, а $\vec{\nu} \sim \nu - \vec{\nu}$, $\vec{\lambda} \sim \lambda - \vec{\lambda}$ при некоторых $\nu, \lambda \in \mathbb{R}$ [9; с. 59, 60]. Так как размерность группы $\mathrm{SL}(q, \mathbb{C})$ равна $q^2 - 1$, степень трансцендентности множества элементов любой фундаментальной матрицы соответствующего уравнения над $\mathbb{C}(z, W)$, где W – вронскиан, также равна $q^2 - 1$ (см. [10; лемма 6.2], [11; § 20]). Это, очевидно, обеспечивает неприводимость уравнения и делает естественными условия двух следующих теорем.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\vec{\nu}_k \in \mathbb{C}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $q_k \geq \max(2, l_k + 1)$, $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\|w_{k,s}^{(i)}\|_{s=1, \dots, q_k; i=0, \dots, q_k-1}$ – фундаментальная матрица оператора $L(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; z)$,

$$\deg \mathrm{tr}_{\mathbb{C}(z)} \mathbb{C}\langle z, w_{k,1}, \dots, w_{k,q_k} \rangle \geq q_k^2 - 1, \quad (4)$$

$\|v_{k,s}^{(i)}\|$ – фундаментальная матрица оператора $L(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; \alpha_k z^{p_k})$, $p_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 1$. Пусть числа $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, а также $\beta_1, \dots, \beta_p$ принадлежат $\mathbb{C}$ и линейно независимы над $\mathbb{Q}$, $\beta_1 \in \mathbb{Q}$. Тогда для алгебраической независимости $q_1^2 + \dots + q_n^2 - n + m + p$ функций

$$\left\{ v_{k,s}^{(i)} \mid k=1, \dots, n; s=1, \dots, q_k; i=0, \dots, q_k-1; (s,i) \neq (q_k, q_k-1) \right\}, e^{\gamma_1 z}, \dots, e^{\gamma_m z}, z^{\beta_1}, \dots, z^{\beta_p}$$

над $\mathbb{C}$ необходимо и достаточно, чтобы если

$$(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k) - \lambda_{k,1} \sim (-1)^r((\vec{\nu}_s; \vec{\lambda}_s) - \lambda_{s,j}) \quad \text{и} \quad p_k = p_s,$$

где $1 \leq k < s \leq n$, $1 \leq j \leq q_s$, $r \in \{0, 1\}$, то

$$\alpha_k \neq (-1)^{(q_k-l_k)r} \alpha_s.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть при условиях теоремы 2 $\vec{v}_k \in \mathbb{Q}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k \in \mathbb{Q}^{q_k}$, $\alpha_k, \gamma_i \in \mathbb{A}$, $F_k(z) = {}_{l_k}F_{q_k-1}(\vec{v}_k; \vec{\lambda}_k; z)$. Тогда для алгебраической независимости чисел (3) необходимо и достаточно выполнение трех следующих условий:

- 1°) если выполнено $(\vec{v}_k; \vec{\lambda}_k) \sim (\vec{v}_s; \vec{\lambda}_s)$, где $1 \leq k < s \leq n$, то $\alpha_k \neq \alpha_s$;
- 2°) если выполнено $(\vec{v}_k; \vec{\lambda}_k) \sim \lambda_{s,j} - (\vec{v}_s; \vec{\lambda}_s)$, где $1 \leq k < s \leq n$, $1 \leq j \leq q_s$, то $\alpha_k \neq (-1)^{(q_k-l_k)}\alpha_s$;
- 3°) если для некоторого $s \in \{1, \dots, n\}$ выполнено $(\vec{v}_s; \vec{\lambda}_s) - \lambda_{s,j} \sim (\vec{v}_{k(j)}; \vec{\lambda}_{k(j)})$, $j = 1, \dots, q_s$, $k(j) \neq k(t)$, $j \neq t$, то $\alpha_s \neq \alpha_{k(j)}$ хотя бы при одном j .

Необходимые и достаточные условия алгебраической независимости решений неоднородных уравнений автор намеревается опубликовать в отдельной статье.

ЛЕММА 1. Функция $z^\gamma {}_l\varphi_q(\vec{v}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)$, где $\vec{v} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\prod_{i=1}^q (\delta + p(\lambda_i - 1) - \gamma) - \alpha p^{q-l} z^p \prod_{i=1}^l (\delta + p\nu_i - \gamma) \right) y = p^q z^\gamma \prod_{i=1}^q (\lambda_i - 1).$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Функция $z^\gamma {}_l\varphi_q(\vec{v}; \vec{\lambda}; z)$, где $\gamma \in \mathbb{C}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L(\vec{v} - \gamma; \vec{\lambda} - \gamma)y = (\lambda_1 - 1) \cdots (\lambda_q - 1) z^\gamma.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Если $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq k$, $q \geq \max(2, l)$, то функции (2) образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) без ограничения $\lambda_1 = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Если $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq k$, $q \geq \max(2, l)$, то функции (2), умноженные на z^γ , где $\gamma \in \mathbb{C}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(\vec{v} - \gamma; \vec{\lambda} - \gamma)y = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая аналогично [4; гл. 5, § 1], получим

$$\begin{aligned} (\delta + pa - \gamma)z^{pn+\gamma} &= p(n+a)z^{pn+\gamma}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \\ \prod_{i=1}^q (\delta + p(\lambda_i - 1) - \gamma)y &= p^q z^\gamma \prod_{i=1}^q (\lambda_i - 1) + \alpha p^q z^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_{n+1} \cdots (\nu_l)_{n+1}}{(\lambda_1)_n \cdots (\lambda_q)_n} \alpha^n z^{pn+\gamma}, \\ \prod_{i=1}^l (\delta + p\nu_i - \gamma)y &= p^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_{n+1} \cdots (\nu_l)_{n+1}}{(\lambda_1)_n \cdots (\lambda_q)_n} \alpha^n z^{pn+\gamma}, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы. Следствие 1.2 получается из того, что функции

$$z^{1-\lambda_k} {}_l\varphi_q(\vec{v} + 1 - \lambda_k; \vec{\lambda} + 1 - \lambda_k; z), \quad k = 1, \dots, q,$$

совпадают с (2), линейно независимы над $\mathbb{C}$ и согласно следствию 1.1 удовлетворяют уравнению $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; z)y = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $\delta = z d/dz$, $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, ζ, θ – произвольные аналитические функции от z , $\theta \not\equiv 0$. Тогда

$$P(\delta + \zeta) \circ \theta = \theta P\left(\delta + \zeta + z \frac{\theta'}{\theta}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть f, b, θ – произвольные аналитические функции, причем $\theta \neq 0$, а f удовлетворяет уравнению $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)y = b$, где $\vec{v} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда функция θf удовлетворяет уравнению

$$L\left(\vec{v} - z \frac{\theta'}{\theta p}; \vec{\lambda} - z \frac{\theta'}{\theta p}; \alpha z^p\right)y = b\theta.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $\vec{v} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geq 2$, $f_1, \dots, f_q$ – фундаментальная система решений уравнения

$$L(\vec{v} - \lambda_s + 1; \vec{\lambda} - \lambda_s + 1)y = 0, \quad 1 \leq s \leq q.$$

Тогда функции $z^{1-\lambda_s} f_1, \dots, z^{1-\lambda_s} f_q$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(\vec{v}; \vec{\lambda})y = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из равенств

$$P(x) = a(x + \alpha_1) \cdots (x + \alpha_n), \quad (\delta + \zeta + \alpha) \circ \theta = \theta \left(\delta + \zeta + \alpha + \frac{z\theta'}{\theta} \right).$$

Напомним, что сопряженным к дифференциальному уравнению

$$Ly \equiv a_m y^{(m)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (5)$$

называется уравнение

$$\bar{L}v \equiv (-1)^m (a_m v)^{(m)} + \cdots - (a_1 v)' + a_0 v = 0$$

(см., например, [12; п. 5.3], [13; гл. 2, § 5]). Аналогично определяются сопряженные дифференциальные операторы.

ЛЕММА 3. При условиях леммы 2

$$\overline{\theta P(\delta + \zeta)} = \theta P\left(-\delta - 1 + \zeta - z \frac{\theta'}{\theta}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что

$$\overline{\theta(\delta + \zeta + \alpha)} = -\theta\left(\delta - \zeta - \alpha + 1 + z \frac{\theta'}{\theta}\right), \quad \overline{L + Q} = \bar{L} + \bar{Q}, \quad \overline{\alpha L} = \alpha \bar{L},$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$. Кроме того, $\overline{LQ} = \bar{Q} \bar{L}$ (см. [12; пп. 5.3, 17.4]). Отсюда, учитывая лемму 2 и перестановочность операторов вида $\delta + \zeta + \alpha_k$, индукцией по n получаем

$$\overline{\theta(\delta + \zeta + \alpha_1) \cdots (\delta + \zeta + \alpha_n)} = (-1)^n \theta \left(\delta - \zeta - \alpha_1 + 1 + z \frac{\theta'}{\theta} \right) \cdots \left(\delta - \zeta - \alpha_n + 1 + z \frac{\theta'}{\theta} \right),$$

что равносильно утверждению леммы.

Как следует из леммы 1, уравнение $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)y = 0$ при $q - l > 1$ и $q - l = 1$, соответственно, имеет вид

$$\begin{aligned} z^q y^{(q)} + \left((\lambda_1 + \dots + \lambda_q)p + (q - 2p - 1)\frac{q}{2} \right) z^{q-1} y^{(q-1)} + \dots \\ + ((\lambda_1 - 1) \dots (\lambda_q - 1)p^q - \alpha \nu_1 \dots \nu_l p^q z^p) y = 0, \\ z^q y^{(q)} + \left(-\alpha p z^p + (\lambda_1 + \dots + \lambda_q)p + (q - 2p - 1)\frac{q}{2} \right) z^{q-1} y^{(q-1)} + \dots \\ + ((\lambda_1 - 1) \dots (\lambda_q - 1)p^q - \alpha \nu_1 \dots \nu_l p^q z^p) y = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Вронскианы этих уравнений с точностью до постоянного множителя равны, соответственно,

$$W_1 = z^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_q)p - (q - 2p - 1)q/2}, \quad W_2 = e^{\alpha z^p} W_1. \quad (7)$$

ЛЕММА 4. Пусть $\vec{\nu} - \zeta \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} - \eta \in \mathbb{C}^q$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, ζ, η – произвольные аналитические функции. Тогда

$$\overline{z^\gamma L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)} = (-1)^q z^\gamma L\left(1 - \vec{\nu} + \frac{1 + \gamma}{p}; 2 - \vec{\lambda} + \frac{1 + \gamma}{p}; (-1)^{q-l} \alpha z^p\right)$$

является сопряженным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно леммам 1 и 3

$$\begin{aligned} \overline{z^\gamma L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)} &= \overline{z^\gamma \prod_i (\delta + p(\lambda_i - 1)) - \alpha p^{q-l} z^{p+\gamma} \prod_i (\delta + p\nu_i)} \\ &= (-1)^q z^\gamma \left(\prod_i (\delta + p(1 - \lambda_i) + 1 + \gamma) - (-1)^{q-l} \alpha p^{q-l} z^p \prod_i (\delta + p(1 - \nu_i) + 1 + \gamma) \right), \end{aligned}$$

что равносильно утверждению леммы.

ЛЕММА 5. Пусть $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geq \max(2, l + 1)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, Φ_1, Φ_2 – произвольные фундаментальные матрицы дифференциальных операторов $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)$ и $L(1 - \vec{\nu}; 2 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l} \alpha z^p)$. Тогда существует матрица $C \in \text{GL}(q, \mathbb{C})$ такая, что $\Phi_1(\Phi_2 C)^T \in \text{GL}(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из леммы 4 при $\gamma = -1$, $\zeta \equiv \eta \equiv 0$ и свойств сопряженных дифференциальных уравнений (см. доказательство аналогичного результата в [14]).

ЛЕММА 6. Пусть $\mathbb{F}$ – дифференциальное поле с полем констант $\mathbb{C}$. Пусть для любого k , $1 \leq k \leq n$, $\Phi_k = \|v_{k,s}^{(i)}\|_{s=1, \dots, q_k; i=0, \dots, q_k-1}$ – фундаментальная матрица дифференциального уравнения

$$y^{(q_k)} + P_{k,q_k-1} y^{(q_k-1)} + \dots + P_{k,0} y = 0, \quad q_k \geq 2, \quad P_{k,s} \in \mathbb{F},$$

$|\Phi_k| \in \mathbb{F}$. Пусть поле констант дифференциального поля $\mathbb{L} = \mathbb{F}\langle v_{1,1}, \dots, v_{n,q_n} \rangle$ есть $\mathbb{C}$, а $\deg \text{tr}_{\mathbb{F}} \mathbb{L} < q_1^2 + \dots + q_n^2 - n$. Тогда либо $\deg \text{tr}_{\mathbb{F}} \mathbb{F}\langle v_{k,1}, \dots, v_{k,q_k} \rangle < q_k^2 - 1$ для некоторого k , либо для некоторых индексов $1 \leq j < k \leq n$ имеем $q_j = q_k = q$ и выполняется хотя бы одно из равенств

$$\Phi_j = aB\Phi_k C, \quad \Phi_j = aB(\Phi_k^{-1})^T C, \quad (8)$$

где $a \in \mathbb{L}$, $a^q \in \mathbb{F}$, $B \in \text{GL}(q, \mathbb{F})$, $C \in \text{GL}(q, \mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Колчин [15] доказал утверждение леммы 6 в случае, когда $q_1 = \dots = q_n = q$, а поля констант полей $\mathbb{F}$ и $\mathbb{L}$ являются произвольным полем $\mathbb{B}$ характеристики 0. Схема рассуждений была следующей. Сначала доказывалась теорема о подгруппах прямого произведения $G_1 \times \dots \times G_n$ алгебраических групп G_k , определенных над полем K , с центрами Z_k , одним из утверждений которой являлось существование K -изоморфизма $G_j/Z_j \rightarrow G_k/Z_k$, $1 \leq j < k \leq n$. Под K -изоморфизмом понимался изоморфизм, задаваемый на многообразиях G_j , G_k рациональными функциями с коэффициентами из поля K . Далее в качестве G_k , $k = 1, \dots, n$, брались группы Галуа соответствующих дифференциальных уравнений, совпадающих, как было показано, с $\mathrm{SL}(q, \mathbb{B})$. Центры Z_k этих групп состоят из конечного числа элементов – единичных матриц, умноженных на корни степени q из единицы. Соотношения (8) выводились из того, что все K -автоморфизмы группы $\mathrm{SL}(q, K)$ имеют вид $x \rightarrow BxB^{-1}$ либо $x \rightarrow B(x^{-1})^T B^{-1}$, где $B \in \mathrm{GL}(q, K)$. Поэтому для доказательства леммы 6 достаточно дополнить рассуждения Е. Р. Колчина доказательством невозможности существования $\mathbb{C}$ -изоморфизма $G_j/Z_j \rightarrow G_k/Z_k$ при $q_j \neq q_k$. Последнее вытекает из того, что группы G_j и G_k как многообразия имеют разные размерности, $\mathbb{C}$ -изоморфизм непрерывен в обычной евклидовой топологии, Z_j и Z_k конечны, а известная теорема Брауэра утверждает о негомеоморфности топологических многообразий разных размерностей. Лемма 6 доказана.

Заметим, что автоморфизмами $x \rightarrow BxB^{-1}$ исчерпываются также все автоморфизмы групп $\mathrm{Sp}(2k, \mathbb{C})$ и $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$, $n \geq 3$, $n \neq 8$ [8; п. 1.8.1]. Для этих групп имеет место обобщение утверждения леммы 6 [8; предложение 1.8.2]. В неявном виде аналог леммы 6 для групп Галуа, содержащих $\mathrm{SL}(m)$, $\mathrm{Sp}(2k)$, использовался в статье [6] при доказательстве теоремы 2.3.

Полагая в лемме 6 $\mathbb{F} = \mathbb{C}(z)$ и изменяя при необходимости нумерацию уравнений, равенства (8) можно записать в виде

$$\Phi_1 = A\Phi_2 C, \quad \Phi_1 = A(\Phi_2^{-1})^T C, \quad (9)$$

где A – матрица, элементы которой являются аналитическими функциями, вообще говоря, неоднозначными.

Пусть A_1 и A_2 – матрицы коэффициентов систем, соответствующих дифференциальным уравнениям с номерами 1 и 2. Тогда, дифференцируя первое из равенств (9), получим $A_1 \Phi_1 = (A' + AA_2)\Phi_2 C$, что вместе с $A_1 \Phi_1 = A_1 A \Phi_2 C$ дает

$$A' = A_1 A - AA_2. \quad (10)$$

Если справедливо второе из равенств (9), то, поскольку Φ_2 и $(\Phi_2^{-1})^T$ являются фундаментальными матрицами сопряженных систем (доказательство воспроизведено в [6; § 1]), равенство (10) переходит в $A' = A_1 A + A(A_2)^T$.

ЛЕММА 7. Если при условиях леммы 6 $\mathbb{F} = \mathbb{C}(z)$, $A_j \in M(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$, $j = 1, \dots, n$, то в равенствах (9) $A = z^r B$, $B \in \mathrm{GL}(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$, $r \in \mathbb{Q}$, $rq \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условиях леммы 7 элементы матрицы A согласно лемме 6 являются алгебраическими функциями, а ввиду (10) – компонентами решения системы линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой голоморфны в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому они также не имеют особенностей в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, откуда получаем утверждение леммы.

Для применения лемм 6 и 7 к уравнениям (6), где $p = q - l$, а в (7), следовательно, $W_2 = e^{\alpha z} W_1$, понадобятся три следующие леммы.

ЛЕММА 8. Пусть Φ_1, Φ_2, Φ_3 – фундаментальные матрицы, отвечающие наборам функций $\{v_1, \dots, v_q\}$, $\{z^\beta v_1, \dots, z^\beta v_q\}$ и $\{e^{\gamma z} v_1, \dots, e^{\gamma z} v_q\}$ соответственно, $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\Phi_1 = z^{-\beta} B \Phi_2, \quad \Phi_1 = e^{-\gamma z} B_0 \Phi_3,$$

где $B \in \text{SL}(q, \mathbb{C}[z^{-1}])$, $B_0 \in \text{SL}(q, \mathbb{C})$, причем матрицы B, B_0 являются нижнетреугольными с единицами на главной диагонали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью формулы Лейбница и элементарных преобразований строк матрицы Φ_2 имеем $B_{q-1} \cdots B_1 z^{-\beta} \Phi_2 = \Phi_1$, где B_k , $1 \leq k \leq q-1$, – нижнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали, у которой остальные ненулевые элементы находятся в k -м столбце и имеют вид $b_{s,k} = c_{s,k} z^{k-s}$, $c_{s,k} = -\binom{s-1}{k-1} \beta \cdots (\beta - s + k + 1)$, $s = k+1, \dots, q$. Положив $B = B_{q-1} \cdots B_1$, убеждаемся, что B обладает требуемыми свойствами. Аналогично вычисляется матрица B_0 .

Из леммы 8 и следствия 2.2 леммы 2 вытекает

ЛЕММА 9. Пусть $\vec{v} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geq 2$, $1 \leq s \leq q$ и Φ_1, Φ_2 – произвольные фундаментальные матрицы, соответствующие уравнениям $L(\vec{v}; \vec{\lambda})y = 0$ и $L(\vec{v} - \lambda_s + 1; \vec{\lambda} - \lambda_s + 1)y = 0$. Тогда

$$\Phi_1 = z^{1-\lambda_s} B \Phi_2 C,$$

где B – нижнетреугольная матрица из $\text{SL}(q, \mathbb{C}[z^{-1}])$ с единицами на главной диагонали, $C \in \text{GL}(q, \mathbb{C})$.

ЛЕММА 10. Пусть имеем $\vec{v} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geq \max(2, l)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{N}$, $\Phi = \|w_s^{(i)}\|_{s=1, \dots, q; i=0, \dots, q-1}$, $\Psi = \|v_s^{(i)}\|$ – фундаментальные матрицы операторов $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; z)$ и $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)$ соответственно, $W = |\Phi|$, $W^\circ = |\Psi|$. Тогда равенство

$$\deg \text{tr}_{\mathbb{C}(z, W)} \mathbb{C}\langle z, w_1, \dots, w_q \rangle = q^2 - 1 \quad (11)$$

равносильно равенству

$$\deg \text{tr}_{\mathbb{C}(z, W^\circ)} \mathbb{C}\langle z, v_1, \dots, v_q \rangle = q^2 - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как α не влияет на степень трансцендентности, то положим $\alpha = 1$. Пусть G – группа Галуа уравнения $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; z)y = 0$. Равенство (11) равносильно тому, что группа Галуа того же уравнения над $\mathbb{C}(z, W)$ совпадает с $\text{SL}(q, \mathbb{C})$ (см. [15; с. 1158]). С другой стороны, она равна $G \cap \text{SL}(q, \mathbb{C})$ [10; лемма 6.2], откуда $\text{SL}(q, \mathbb{C}) \subseteq G$. Так как для любого $p \in \mathbb{N}$ группа Галуа уравнения $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; z^p)y = 0$ является нормальной подгруппой конечного индекса в G [6; доказательство предложения 2.4], размерности этих групп равны. Поэтому группа Галуа уравнения $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; z^p)y = 0$ как над $\mathbb{C}(z)$, так и над $\mathbb{C}(z, W^\circ)$ содержит подгруппу $\text{SL}(q, \mathbb{C})$ размерности $q^2 - 1$. Отсюда следует утверждение леммы.

Если группа Галуа уравнения $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; z)y = 0$ содержит $\text{SL}(q, \mathbb{C})$, то из рассуждений доказательства леммы 10 получаем, что выполняется равенство (11), откуда

$$\deg \text{tr}_{\mathbb{C}(z)} \mathbb{C}\langle z, w_1 W^{-1/q}, \dots, w_q W^{-1/q} \rangle = q^2 - 1.$$

Таким образом, из лемм 2, 7, 8, 10 следует, что лемму 6 можно распространить на случай $z^{\beta_k} e^{\gamma_k z} |\Phi_k| \in \mathbb{C}(z)$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}(z)$, если равенства (8) заменить на

$$\Phi_j = z^r e^{\gamma z} B \Phi_k C, \quad \Phi_j = z^r e^{\gamma z} B (\Phi_k^{-1})^T C, \quad (12)$$

где $r, \gamma \in \mathbb{C}$, $B \in \text{GL}(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$. В случае, когда Φ_k соответствуют уравнениям (6) и $l < q - 1$, можно положить $\gamma = 0$.

Если равенства (12) выполняются, то говорят, соответственно, о коградиентности и контрградиентности уравнений или систем. В статьях [6], [7] эти термины использовались, когда $B \in M(q, \mathbb{C}(z))$, а вместо $z^r e^{\gamma z}$ бралась функция $Q(z)$, $Q'(z)/Q(z) \in \mathbb{C}(z)$. Сравнивая рассуждения статьи [7] с доказательством ниже следующей леммы 14, можно убедиться, что утверждение леммы 14 (как и леммы 16) справедливо также для коградиентности и контрградиентности, понимаемых в смысле статьи [6].

Нетрудно проверить, что коградиентность систем является отношением эквивалентности. Так же легко проверяется

ЛЕММА 11. *Если системы (A_1) и (A_2) контрградиентны, то системы (A_1) и (A_3) контрградиентны тогда и только тогда, когда (A_2) и (A_3) коградиентны.*

Если $F = F(z)$ – гипергеометрическая функция (1), то функции

$$F(\nu_k \pm) = F(\nu_1, \dots, \nu_k \pm 1, \dots, \nu_l; \lambda_1, \dots, \lambda_q; z)$$

и аналогично определяемые $F(\lambda_k \pm)$ называются смежными (или ассоциированными) с F . Смежные функции и их производные выражаются в виде линейных комбинаций с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ от функций $F, F', \dots, F^{(q-1)}$ (см., например, [1; пп. 5.2.2, 7.3.2], [16; формула (12)]). Коэффициент при $F(\nu_k \pm)$ (или $F(\lambda_k \pm)$) для некоторых допустимых значений параметров функций может тождественно по z равняться нулю. В таких случаях соответствующие дифференциальные уравнения линейно приводимы. Необходимым и достаточным для линейной приводимости является при $\nu_i \notin \mathbb{Z}^-$ условие $\nu_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq q$, или существование делителя $d > 1$ чисел l и q такого, что $(\vec{\nu}; \vec{\lambda}) + 1/d \sim (\vec{\nu}; \vec{\lambda})$ (см. [17; теорема 8]). Соотношения смежности можно записать в виде $\{\varphi_1\} = A\{\varphi\} + \vec{c}$, где $\{f\} = (f, f', \dots, f^{(q-1)})^T$, $A \in M(q, \mathbb{C}(z))$, $\vec{c} \in (\mathbb{C}(z))^q$, $\varphi = {}_1\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$, φ_1 – функция $\varphi(\nu_k \pm)$ или $\varphi(\lambda_k \pm)$.

В следующей лемме рассматривается вопрос о коградиентности уравнений, параметры которых различаются на целые числа, а также приводится алгоритм для нахождения соотношений смежности.

ЛЕММА 12. *Пусть $\vec{\nu}_i \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda}_i \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$, $q \geq \max(2, l + 1)$, $\varphi_i = {}_1\varphi_q(\vec{\nu}_i; \vec{\lambda}_i; z)$, уравнение $L_i y = L(\vec{\nu}_i; \vec{\lambda}_i; z) y = 0$ линейно неприводимо, Φ_i – произвольная фундаментальная матрица этого уравнения, $i = 1, 2$, $(\vec{\nu}_1; \vec{\lambda}_1) \sim (\vec{\nu}_2; \vec{\lambda}_2)$. Тогда существуют матрицы $A \in \text{GL}(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$, $C \in \text{GL}(q, \mathbb{C})$ и вектор $\vec{c} \in (\mathbb{C}[z^{\pm 1}])^q$ такие, что*

$$\{\varphi_1\} = A\{\varphi_2\} + \vec{c}, \quad \Phi_1 = A\Phi_2 C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно ограничиться случаем, когда $\nu_{1,j} = \nu_{2,j} = \nu_j$, $\lambda_{1,t} = \lambda_{2,t} = \lambda_t$ для всех параметров, кроме одного, различающегося на 1. Допустим, что это параметр ν_k , $1 \leq k \leq l$.

Пусть Ψ – фундаментальная матрица некоторой линейной однородной системы $\vec{y}' = \Omega \vec{y}$, $A = A(z)$ – произвольная матрица того же размера, $|A| \neq 0$. Элементарные вычисления показывают, что $\Psi_1 = A\Psi$ является фундаментальной матрицей системы $\vec{y}' = B\vec{y}$, где $B = (A' + A\Omega)A^{-1}$. Обозначив $\vec{\psi}_1, \vec{\psi}$ первые столбцы матриц Ψ_1, Ψ соответственно, из равенства $\vec{\psi}_1 = A\vec{\psi}$ в случае $A \in \text{GL}(q, \mathbb{C}(z))$ при условии линейной неприводимости рассматриваемых систем получаем для B то же самое выражение.

Если $\lambda_1 \neq 1$, то сделаем в уравнении $L_i y = 0$ замену $y \rightarrow z^{\lambda_1 - 1} y$. Фундаментальная матрица Φ_i нового уравнения согласно лемме 8 связана с Φ_i равенством $\bar{\Phi}_i = z^{\lambda_1 - 1} A \Phi_i$, где $A \in \text{GL}(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$. Принимая во внимание следствие 2.2 из леммы 2, можно рассмотреть матрицы Φ_i такие, что первый столбец матрицы $\bar{\Phi}_i$ равен $\{F_i\}$, где

$$F_i = {}_i F_{q-1}(\vec{\nu}_i - \lambda_1 + 1; \vec{\lambda}_i - \lambda_1 + 1; z), \quad i = 1, 2.$$

Дифференцируя тождество

$$\nu F(\nu +) = (\delta + \nu)F = \nu F + zF', \quad \nu = \nu_k - \lambda_1 + 1$$

(см. [1; п. 5.2.2] или доказательство леммы 1), $j - 1$ раз, $1 \leq j \leq q$, находим, что j -я строка матрицы $\bar{A}$ такова, что $\nu\{F_1\} = \bar{A}\{F_2\}$, при $j \neq q$ содержит только два ненулевых элемента: $a_{j,j} = \nu + j - 1$, $a_{j,j+1} = z$, а элементы q -й строки получаются очевидным образом из коэффициентов уравнения $L(\vec{\nu}_i - \lambda_1 + 1; \vec{\lambda}_i - \lambda_1 + 1)y = 0$ и принадлежат $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$. Неравенство $\nu \neq 0$, а также $|\bar{A}| \neq 0$ следуют из линейной неприводимости рассматриваемых уравнений. Все вышесказанное означает, что $|\bar{A}| \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$, а в качестве $\nu\bar{\Phi}_1$ можно взять матрицу $\bar{A}\bar{\Phi}_2$. Тогда из равенств $\nu\bar{\Phi}_1 = \bar{A}\bar{\Phi}_2$ и (7) получаем, что $|\bar{A}| = az^n$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \{0, 1, -1\}$, $\bar{A} \in \text{GL}(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$. Далее, функция $g = z^{\lambda_1 - 1} \varphi_i$ удовлетворяет уравнению

$$L(\vec{\nu}_i - \lambda_1 + 1; \vec{\lambda}_i - \lambda_1 + 1)y = b, \quad b = (\lambda_1 - 1) \cdots (\lambda_q - 1)z^{\lambda_1 - 1}$$

(следствие 1.1 леммы 1), и тождеству

$$\nu_k g(\nu_k +) = (\nu_k - \lambda_1 + 1)g + zg'$$

(см. доказательство леммы 1). Повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\nu_k \{g(\nu_k +)\} = \bar{A}\{g\} + (0, \dots, 0, b)^T.$$

Таким образом, в случае увеличения (а потому и уменьшения) ν_k на 1 утверждение леммы справедливо.

Заметим, что для практического нахождения матрицы A и вектора $\vec{c}$ нет необходимости вычислять $\bar{A}$: достаточно воспользоваться тождеством

$$\nu \varphi_2(\nu +) = \nu \varphi_2 + z\varphi_2'$$

и аналогично предыдущему сразу написать ее элементы. При этом, очевидно, $\vec{c} = (0, \dots, 0, (\lambda_1 - 1) \cdots (\lambda_q - 1)/(\nu_k z^{q-1}))^T$.

Если в наборах параметров $(\vec{\nu}_1; \vec{\lambda}_1), (\vec{\nu}_2; \vec{\lambda}_2)$ не совпадает значение λ_k , $1 \leq k \leq q$, рассуждения проводятся аналогично с использованием тождества

$$(\lambda_k - 1)z^\gamma F(\lambda_k -) = (\lambda_k - \gamma - 1)z^\gamma F + z(z^\gamma F)'$$

Лемма 12 доказана.

ЛЕММА 13. Равенство $P_0 + P_1 \ln z + \dots + P_n \ln^n z = Pz^c$, где $P, P_0, \dots, P_n$ – однозначные аналитические функции на множестве $0 < |z| < R$, $P_n P \neq 0$, $c \in \mathbb{C}$, возможно только в случае $n = 0$, $c \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко проводится индукцией по n .

ЛЕММА 14. Для коградиентности линейно неприводимых уравнений

$$L(\vec{\nu}_1; \vec{\lambda}_1; \alpha_1 z)y = 0, \quad L(\vec{\nu}_2; \vec{\lambda}_2; \alpha_2 z)y = 0,$$

где $\vec{\nu}_i \in \mathbb{C}^{l_i}$, $\vec{\lambda}_i \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^{q_i}$, $q_i \geq \max(2, l_i + 1)$, $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$, необходимо и достаточно условие

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 = q, \quad l_1 = l_2 = l, \\ \alpha_1 = \alpha_2, \quad (\vec{\nu}_2; \vec{\lambda}_2) - \lambda_{2,1} \sim (\vec{\nu}_1; \vec{\lambda}_1) - \lambda_{1,s}, \quad 1 \leq s \leq q, \end{aligned}$$

а для контрградиентности – условие

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 = q, \quad l_1 = l_2 = l, \\ \alpha_1 = (-1)^{q-l} \alpha_2, \quad (\vec{\nu}_2; \vec{\lambda}_2) - \lambda_{2,1} \sim \lambda_{1,s} - (\vec{\nu}_1; \vec{\lambda}_1), \quad 1 \leq s \leq q. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $q_1 = q_2$ следует непосредственно из определений коградиентности и контрградиентности. Согласно леммам 11 и 9 без уменьшения общности можно ограничиться случаем $\lambda_{1,1} = \lambda_{2,1} = 1$.

Достаточность условий леммы 14 следует из лемм 5, 9, 11 и 12.

Перейдем к доказательству необходимости условий леммы. Если в уравнении (1) среди $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ имеется $m \geq 1$ параметров, отличающихся от $\lambda \in \mathbb{C}$ на целое число, то этим параметрам соответствуют m решений

$$y_s = z^{-\lambda} \sum_{k=0}^{s-1} P_{k,s} \ln^k z, \quad s = 1, \dots, m,$$

где $P_{0,s}, \dots, P_{s-1,s}$ – однозначные аналитические функции в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (см. [12; гл. 16], [18; п. 18.2]). Следовательно, $\Phi_i = \tilde{\Phi}_i D_i$, где

$$D_i = \text{diag}(1, z^{-\lambda_{i,2}}, \dots, z^{-\lambda_{i,q}}), \quad i = 1, 2,$$

а элементы матриц $\tilde{\Phi}_i, \tilde{\Phi}_i^{-1}$ являются многочленами от $\ln z$ с однозначными коэффициентами.

Условие коградиентности $\Phi_1 = z^r e^{\gamma z} B \Phi_2 C$ эквивалентно

$$z^r D_2 C D_1^{-1} = \tilde{\Phi}_2^{-1} B^{-1} \tilde{\Phi}_1 e^{-\gamma z},$$

где $r \in \mathbb{C}$, откуда согласно лемме 13 произведение

$$z^r \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{-\lambda_{2,2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^{-\lambda_{2,q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q,1} & \dots & c_{q,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{\lambda_{1,2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^{\lambda_{1,q}} \end{pmatrix}$$

принадлежит $M(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}])$. Так как $|C| \neq 0$, существует перестановка π чисел $1, \dots, q$ такая, что $c_{1,\pi(1)} \dots c_{q,\pi(q)} \neq 0$. Следовательно, $r - \lambda_{2,k} + \lambda_{1,\pi(k)} \in \mathbb{Z}$, $k = 1, \dots, q$. Полагая $k = 1$, получим $r + \lambda_{1,\pi(1)} \in \mathbb{Z}$, откуда $\vec{\lambda}_2 \sim \vec{\lambda}_1 - \lambda_{1,s}$, где $1 \leq s \leq q$.

Условие контргradientности $\Phi_1 = z^r e^{\gamma z} B(\Phi_2^{-1})^T C$ эквивалентно

$$z^r (D_2^{-1})^T C D_1^{-1} = \tilde{\Phi}_2^T B^{-1} \tilde{\Phi}_1 e^{-\gamma z},$$

которое, в свою очередь, аналогично условию коgradientности, если в нем заменить $\vec{\lambda}_2$ на $-\vec{\lambda}_2$. Следовательно, $\vec{\lambda}_2 \sim \lambda_{1,s} - \vec{\lambda}_1$, $r = -\lambda_{1,s}$, где $1 \leq s \leq q$.

В случае, если $\nu_i - \nu_j \notin \mathbb{Z}$, $1 \leq i < j \leq l$, в [6; предложение 4.1] указан полный набор линейно независимых формальных решений уравнения (1) при $z = \infty$, состоящий из l асимптотических разложений

$$z^{-\nu_\tau} {}_q F_{l-1} \left(\nu_\tau + 1 - \vec{\lambda}; \nu_\tau + 1 - \vec{\nu}; \frac{1}{z} \right), \quad \tau = 1, \dots, l,$$

и $q - l$ разложений

$$\exp((l - q)\zeta^\tau t) t^\mu \sum_{j=0}^{\infty} M_j (\zeta^\tau t)^{-j}, \quad M_j \in \mathbb{C}, \quad -\frac{q-l}{2} \leq \tau < \frac{q-l}{2},$$

где $t^{q-l} = z$, ζ – примитивный корень степени $q - l$ из единицы,

$$\mu = \sum_{1 \leq j \leq l} \nu_j - \sum_{1 \leq j \leq q} \lambda_j - \frac{l - q - 1}{2}.$$

Поэтому справедливы асимптотические разложения $\Phi_i \asymp \hat{\Phi}_i \hat{D}_i S_i$, где $i = 1, 2$, $S_i \in \text{GL}(q, \mathbb{C})$,

$$\hat{D}_i = \text{diag}(z^{-\nu_{i,1}}, \dots, z^{-\nu_{i,l_i}}, \exp(\alpha_{i,1} t_i) t_i^{\mu_i}, \dots, \exp(\alpha_{i,q-l_i} t_i) t_i^{\mu_i}),$$

$t_i^{q-l_i} = z$, $\alpha_{i,j} = (l_i - q) \zeta_i^j (\alpha_i)^{1/(q-l_i)}$, $\hat{\Phi}_i$ – матрица, элементы которой в первых l_i столбцах являются формальными рядами по отрицательным степеням z , а в остальных столбцах – по отрицательным степеням t_i . Очевидно, что числа $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,q-l_i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и попарно различны.

Подставляя в равенство $\Phi_1 = z^r e^{\gamma z} B \Phi_2 C$ разложения $\Phi_i \asymp \hat{\Phi}_i \hat{D}_i S_i$, получим

$$z^r e^{\gamma z} \hat{D}_2 S \hat{D}_1^{-1} = \hat{\Phi}_2^{-1} B^{-1} \hat{\Phi}_1, \quad (13)$$

где $r = -\lambda_{1,s}$, $S \in \text{GL}(q, \mathbb{C})$.

Пусть $0 \leq l_2 \leq l_1 < q - 1$. Тогда в (12) и (13) $\gamma = 0$, а элементы матрицы $z^r e^{\gamma z} \hat{D}_2 S \hat{D}_1^{-1}$, стоящие в первых l_1 столбцах и последних $q - l_2$ строках, имеют вид

$$s_{l_2+i,j} z^r z^{\nu_{1,j}} \exp(\alpha_{2,i} t_2) t_2^{\mu_2} = s_{l_2+i,j} \exp(\alpha_{2,i} t_2) t_2^{\beta_{i,j}}, \quad \beta_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, $s_{i,j} = 0$ при $i = l_2 + 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, l_1$. Аналогично доказывается, что $s_{i,j} = 0$ при $i = 1, \dots, l_2$, $j = l_1 + 1, \dots, q$. Так как $|S| \neq 0$, отсюда следует, что $l_1 = l_2$.

Допустим теперь, что $0 \leq l_2 < l_1 = q - 1$. Тогда в (12) и (13) $\gamma = \alpha_1/q \neq 0$. Кроме того, $\alpha_{2,k}t_2 \neq \pm\gamma z$, $k = 1, \dots, q - l_2$. Отсюда следует равенство нулю всех элементов матрицы S , стоящих в первых $q - 1$ столбцах, что невозможно. Таким образом, доказано, что $l_1 = l_2 = l$, а матрица S имеет блочно-диагональный вид. Аналогичные рассуждения проводились Черепневым [7]. Другое доказательство равенства $l_1 = l_2$ в случае $l_1, l_2 < q - 1$ состоит в том, что при $l_1 \neq l_2$ компоненты первых столбцов матриц Φ_1 , Φ_2 являются целыми функциями разного порядка, а согласно (12) это невозможно.

Равенство (13) равносильно равенству $z^r e^{\gamma z} \widehat{\Phi}_2 \widehat{D}_2 S \widehat{D}_1^{-1} = B^{-1} \widehat{\Phi}_1$, которое запишем в виде

$$z^r e^{\gamma z} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1,1} & 0 \\ 0 & T_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix},$$

где

$$r = -\lambda_{1,s},$$

$$T_{1,1} = \|s_{i,j} z^{-\nu_{2,i} + \nu_{1,j}}\|_{i,j=1,\dots,l}, \quad T_{2,2} = \|s_{l+i,l+j} \exp(\alpha_{2,i}t - \alpha_{1,j}t) t^{\mu_2 - \mu_1}\|_{i,j=1,\dots,q-l},$$

$A_{1,1}$, $B_{1,1}$ – матрицы размера $l \times l$ с элементами, являющимися формальными рядами по отрицательным степеням z , $A_{2,2}$, $B_{2,2}$ – матрицы размера $(q - l) \times (q - l)$ с элементами, являющимися формальными рядами по отрицательным степеням t . Отсюда $\gamma = 0$, $z^r A_{1,1} T_{1,1} = B_{1,1}$, $z^r A_{2,2} T_{2,2} = B_{2,2}$. Так как $|T_{1,1}| |T_{2,2}| \neq 0$, существуют перестановка π чисел $1, \dots, l$ и хотя бы одна пара $j, k \in \{1, \dots, q - l\}$ такие, что $-\nu_{2,i} + \nu_{1,\pi(i)} - \lambda_{1,s} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, l$, и $\alpha_{2,j} - \alpha_{1,k} = 0$. Поэтому $\vec{\nu}_2 \sim \vec{\nu}_1 - \lambda_{1,s}$, $\alpha_1 = \alpha_2$.

В случае контргradientности, подставляя в равенство $\Phi_1 = z^r e^{\gamma z} B(\Phi_2^{-1})^T C$, где $r = -\lambda_{1,s}$, асимптотические разложения $\Phi_i \asymp \widehat{\Phi}_i \widehat{D}_i S_i$, получим

$$z^r e^{\gamma z} (\widehat{D}_2^{-1})^T S \widehat{D}_1^{-1} = \widehat{\Phi}_2^T B^{-1} \widehat{\Phi}_1.$$

Рассуждая, как и в случае коgradientности, заключаем, что матрица S блочно-диагональна, $l_1 = l_2$, а последнее равенство записывается в виде

$$z^r e^{\gamma z} \begin{pmatrix} T_{1,1} & 0 \\ 0 & T_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix},$$

откуда $\vec{\nu}_2 \sim \lambda_{1,s} - \vec{\nu}_1$, $\alpha_1 = (-1)^{q-l} \alpha_2$.

В случае, если $\nu_{i,j} - \nu_{i,k} \in \mathbb{Z}$ для некоторых $i \in \{1, 2\}$, $1 \leq j < k \leq l_i$, для получения утверждений о $\vec{\nu}_1$ и $\vec{\nu}_2$ надо использовать линейно независимые асимптотические разложения из статьи [17] (фактически достаточно уточнить выкладки в статье [7]).

Лемма 14 доказана.

Заметим, что при замене z на z^{q-l} функция ${}_l F_{q-1}(z)$ превращается в E-функцию. Имеет место

ЛЕММА 15 (см. [6; теоремы 2.2 и 2.4]). Пусть $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}' = B\vec{y}$ – неприводимые системы линейных однородных дифференциальных уравнений размера $n \times n$, $n \geq 2$, с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, $p \in \mathbb{N}$, (A_p) , (B_p) – системы дифференциальных уравнений, полученные из систем (A) , (B) заменой $z = z^p$. Тогда если системы (A_p) , (B_p) коgradientны или контргradientны, то это же условие выполняется для систем (A) , (B) .

Обобщением леммы 14 является

ЛЕММА 16. *Для коградиентности и контрградиентности неприводимых уравнений $L(\vec{v}_i; \vec{\lambda}_i; \alpha_i z^{p_i})y = 0$, где $p_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, необходимо и достаточно, чтобы $p_1 = p_2$ и выполнялись условия, сформулированные в лемме 14.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что рассматриваемые уравнения коградиентны или контрградиентны. Повторяя доказательство леммы 14, получаем, что $q_1 = q_2 = q$, $l_1 = l_2 = l$, $p_1 = p_2$. Ввиду леммы 15 отсюда следует коградиентность (соответственно контрградиентность) уравнений $L(\vec{v}_i; \vec{\lambda}_i; \alpha_i z)y = 0$. Применение леммы 14 завершает доказательство.

Заметим, что при замене z на αz , $\alpha \in \mathbb{C}$, сохраняется как неприводимость уравнения $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; z^{p_0})y = 0$, так и алгебраическая независимость совокупностей элементов его фундаментальной матрицы. Кроме того, если уравнения $L(\vec{v}_k; \vec{\lambda}_k; \alpha_k z^{p_k})y = 0$, $k = 1, \dots, n$, попарно некоградиентны и неконтрградиентны, то согласно лемме 16 это же утверждение справедливо для множества $2n$ уравнений $L(\vec{v}_k; \vec{\lambda}_k; \alpha_k z^{p_k})y = 0$, $L(\vec{v}_k; \vec{\lambda}_k; \alpha_k \beta z^{p_k})y = 0$, где $\beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha_k \beta| \neq |\alpha_k|$. Отсюда, воспользовавшись леммой 6 (соответственно теоремами 2.2 и 2.3 из [6]), а также доказательством утверждения 2° леммы 10 из [4; гл. 9], делаем вывод об алгебраической независимости над $\mathbb{C}$ элементов фундаментальных матриц рассматриваемых дифференциальных уравнений и функций

$$e^{\gamma_1 z}, \dots, e^{\gamma_m z}, z^{\beta_1}, \dots, z^{\beta_p}, \quad (14)$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, как и $\beta_1, \dots, \beta_p$ – числа из $\mathbb{C}$, линейно независимые над $\mathbb{Q}$, $\beta_1 \in \mathbb{Q}$. Таким образом, теоремы 1 и 2 доказаны.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Для дифференциального оператора L вида (5) справедливо тождество Лагранжа

$$uLv - v\bar{L}u = \frac{d}{dz} \psi(v, u) = \frac{d}{dz} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k v^{(i-1-k)} (a_i u)^{(k)} \right),$$

где u, v – произвольные аналитические функции (см., например, [13; гл. 2, § 5], [18; п. 17.6]). Отсюда следует

ЛЕММА 17. *Если $L \in \mathbb{C}[z, d/dz]$ – дифференциальный оператор порядка m , а u, v – аналитические функции такие, что $Lu = 0$, $\bar{L}v = 0$, то $\psi(u, v) = c(u, v) \in \mathbb{C}$.*

Аналог утверждения леммы 17 для производных вида $\delta = zd/dz$ при менее общих условиях доказан в статье [16] (формула (27)).

Леммы 5 и 17 показывают, что условие 2° теоремы 3, исключающее контрградиентность рассматриваемых уравнений, существенно. Коградиентность же уравнений, вообще говоря, допустима, так как если $(\vec{v}_k; \vec{\lambda}_k) \sim (\vec{v}_s; \vec{\lambda}_s) - \lambda_{s,j}$, $j \in \{2, \dots, q_s\}$, $\alpha_k = \alpha_s$, но $(\vec{v}_k; \vec{\lambda}_k) \not\sim (\vec{v}_s; \vec{\lambda}_s)$, то функции $F_s(z)$, $z^{1-\lambda_{s,j}} F_k(z)$ с учетом возможности изменения параметров на целые числа принадлежат фундаментальной системе решений одного уравнения (см. (2)) и алгебраически независимы. Нужно только, чтобы количество таких функций не превышало $q_s - 1$ – иначе они составят полную фундаментальную систему решений и вместе со своими производными будут связаны соотношением Лиувилля.

Суммируя сказанное, получаем, что теорема 3 следует из теоремы 2, леммы 17 и основной теоремы А. Б. Шидловского [4; гл. 3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. Люк, *Специальные математические функции и их аппроксимации*, Мир, М., 1980.
- [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1965.
- [3] C. L. Siegel, “Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen”, *Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl.*, 1929, № 1, 1–70.
- [4] А. Б. Шидловский, *Трансцендентные числа*, Наука, М., 1987.
- [5] В. Х. Салихов, “Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E -функций”, *Acta Arith.*, **53**:5 (1990), 453–471.
- [6] F. Beukers, W. D. Brownawell, G. Heckman, “Siegel normality”, *Ann. of Math. (2)*, **127**:2 (1988), 279–308.
- [7] М. А. Черепнев, “Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E -функций”, *Матем. заметки*, **57**:6 (1995), 896–912.
- [8] N. M. Katz, *Exponential Sums and Differential Equations*, Ann. of Math. Stud., **124**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1990.
- [9] F. Beukers, “Some new results on algebraic independence of E -functions”, *New Advances in Transcendence Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988, 56–67.
- [10] И. Капланский, *Введение в дифференциальную алгебру*, ИЛ, М., 1959.
- [11] E. R. Kolchin, “Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations”, *Ann. of Math. (2)*, **49**:1 (1948), 1–42.
- [12] Э. Л. Айнс, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Харьков, 1939.
- [13] Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Т. 1, ИЛ, М., 1953.
- [14] В. А. Горелов, “Об алгебраических тождествах между обобщенными гипергеометрическими функциями”, *Матем. заметки*, **88**:4 (2010), 511–516.
- [15] E. R. Kolchin, “Algebraic groups and algebraic dependence”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1151–1164.
- [16] Г. Г. Вискина, В. Х. Салихов, “Алгебраические соотношения между гипергеометрической E -функцией и ее производными”, *Матем. заметки*, **71**:6 (2002), 832–844.
- [17] В. Х. Салихов, “Формальные решения линейных дифференциальных уравнений и их применение в теории трансцендентных чисел”, *Тр. ММО*, **51**, Издательство Моск. ун-та, М., 1988, 223–256.
- [18] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1961.

В. А. Горелов

Московский энергетический институт
(технический университет)
E-mail: gorelov.va@mail.ru

Поступило

29.09.2011

Исправленный вариант

17.05.2012