Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гаврилюк, Класс аффинно эквивалентных параллелоэдров Вороного, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 697–707

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9257>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:09:47

Класс аффинно эквивалентных параллелоэдров Вороного

А. А. Гаврилюк

Для произвольного параллелоэдра P рассматривается множество всех параллелоэдров, аффинно ему эквивалентных – его *аффинный класс* $\mathcal{A}(P)$. Содержит ли аффинный класс хотя бы один параллелоэдр Вороного, т.е. параллелоэдр, который является областью Дирихле для некоторой решетки – это открытый на протяжении более чем ста лет вопрос, более известный как гипотеза Вороного. В данной статье показано, что в случае, когда подмножество параллелоэдров Вороного из $\mathcal{A}(P)$ непусто, оно является орбифолдом, и его размерность (как вещественного многообразия с особенностями) определяется исключительно комбинаторным типом – она равна числу компонент связности так называемого *подграфа Венкова* данного параллелоэдра. Тем не менее, структура этого орбифолда зависит не только от комбинаторных, но и от аффинных свойств параллелоэдра.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm9257

1. Введение. Основные определения. *Параллелоэдр* размерности d определяется как выпуклый евклидов многогранник, который своими параллельными копиями разбивает пространство $\mathbb{E}^d$ нормальным образом, т.е. так, что любое непустое пересечение двух многогранников является их общей целой гранью некоторой размерности.

Понятие *параллелоэдра* и сам термин были введены кристаллографом Федоровым [1] (1885) в случае трехмерного пространства как одно из основных понятий кристаллографии – науки изучающей структуру кристаллов. Важный вклад в теорию параллелоэдров внес Минковский [2]. Он доказал теорему, дающую необходимые условия того, что многогранник является параллелоэдром. Венков [3] показал, что те же условия являются и достаточными. Позднее теорема Венкова была переоткрыта в работе [4]. В работах [5], [6] было доказано более общее утверждение из которого теорема Венкова легко следует.

Вороной [7] построил теорию параллелоэдров специального типа, которые теперь называют *параллелоэдрами Вороного*. Под параллелоэдром Вороного P_V мы понимаем область в $\mathbb{E}^d$, построенную по некоторой d -мерной решетке $\Lambda \subset \mathbb{E}^d$ и состоящую из точек, для которых данный узел решетки $\mathbf{p} \in \Lambda$ является ближайшим среди всех

узлов решетки. То есть

$$P_V = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{E}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| \text{ для всех } \mathbf{q} \in \Lambda \}.$$

Такая область является d -мерным многогранником в $\mathbb{E}^d$ и действительно является параллелеэдром. Вороной построил алгоритм перечисления всех комбинаторных типов параллелеэдров Вороного. Однако нахождение алгоритма, перечисляющего для данной размерности комбинаторные типы всех параллелеэдров, – эта одна из основных задач теории параллелеэдров – остается нерешенной.

Вороной высказал гипотезу о том, что любой параллелеэдр аффинно эквивалентен некоторому параллелеэдру Вороного. Он сам доказал свою гипотезу для примитивных параллелеэдров (у которых в каждой i -мерной грани сходятся в точности $(d + 1 - i)$ параллелеэдров). Житомирский [8] усилил теорему Вороного, доказав гипотезу для более широкого класса – для примитивных в $(d - 2)$ -мерных гранях (в каждой $(d - 2)$ -мерной грани которых сходятся ровно 3 параллелеэдра). Более детальное исследование схождений параллелеэдров в гранях коразмерности 3 привело к двум различным усилениям результата Житомирского – см. работы [9] и [10]. Совершенно другой подход, по сравнению с упомянутыми работами, предложен в [11], где приводится доказательство гипотезы Вороного для параллелеэдров, которые являются зоноэдрами.

В [12] было доказано, что в случае примитивного параллелеэдра аффинно эквивалентный параллелеэдр Вороного будет единственным, что добавило к теореме существования (Вороной, 1909) теорему единственности. В работе [13] эта теорема была усилена, геометрически простое доказательство см. в [14]. Долбилин поставил общую задачу описания множества всех параллелеэдров Вороного, аффинно эквивалентных произвольному параллелеэдру (при условии, что это множество не пусто). Описание таких множеств представлено в данной работе.

Поясним некоторые термины. Пусть в d -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^d$ дан k -мерный многогранник Q . Будем говорить, что многогранник Q' является *параллельной копией* (или *транслятом*) многогранника Q , если Q' можно получить из Q при помощи параллельного переноса.

Далее, *разбиение* пространства $\mathbb{E}^d$ на многогранники – это семейство замкнутых d -многогранников $\{P_\alpha\}$, так расположенных в пространстве, что

$$\bigcup P_\alpha = \mathbb{E}^d, \quad \text{Int } P_i \cap \text{Int } P_j = \emptyset.$$

Многогранники из этого семейства называются *ячейками* разбиения. Разбиение называется *нормальным* (*грань-в-грань*), если для каждой пары его ячеек P_i и P_j их пересечение $P_i \cap P_j$ является гранью каждой из них или пусто. Если d -многогранник P допускает нормальное разбиение пространства $\mathbb{E}^d$ на свои параллельные копии, то многогранник называют *параллелеэдром*. Нормальное разбиение на параллелеэдры обозначим через $\mathcal{T}$. Решеткой центров разбиения $\mathcal{T}$ называется целочисленная решетка Λ , которую образуют центры ячеек данного разбиения.

В теории параллелеэдров получен ряд фундаментальных результатов, в частности, теоремы Минковского и Венкова.

ТЕОРЕМА (Минковский [2]). *Всякий d -мерный параллелеэдр P удовлетворяет следующим трем условиям:*

- 1) P центрально симметричен;
- 2) все его гиперграни центрально симметричны;
- 3) проекция P вдоль каждой его $(d - 2)$ -грани либо параллелограмм, либо центрально симметричный шестиугольник.

ТЕОРЕМА (Венков [3]–[6]). *Выпуклый многогранник, удовлетворяющий условиям 1)–3) теоремы Минковского, является параллелоэдром.*

Примитивной n -гранью F^n ($0 \leq n \leq d - 2$) параллелоэдра P называется n -грань, в которой сходятся ровно $d - n + 1$ параллелоэдров разбиения (минимальное число для данных d и n). Из минимальности можно вывести, что все грани параллелоэдра, содержащие примитивную грань F^n как подгрань, также являются примитивными.

В [14], [15] было введено понятие *стандартной* грани параллелоэдра, т.е. грани, которую можно представить в виде пересечения некоторых двух параллелоэдров разбиения $\mathcal{T}$. Показано, что стандартная грань центрально симметрична и ее центр является центром симметрии всего разбиения $\mathcal{T}$.

В частности, в силу нормальности разбиения всякая гипергрань является стандартной и, следовательно, центрально симметричной (см. также п. 2 теоремы Минковского). Рассмотрим произвольную $(d - 2)$ -грань F_1^{d-2} параллелоэдра P : в ней сходятся ровно 2 гиперграни P : $F_1 \cap F_2 = F_1^{d-2}$. Отразив F_1^{d-2} в центре гиперграни F_2 , мы получим другую $(d - 2)$ -грань F_2^{d-2} параллелоэдра P . В F_2^{d-2} также сходятся гиперграни F_2, F_3 данного параллелоэдра. Отразив F_2^{d-2} в центре гиперграни F_3 , перейдем к гиперграням F_4 и т.д. Продолжая таким образом, получим циклически замкнутую последовательность гиперграней $F_1, F_2, \dots, F_m$, называемую *поясом* $(d - 2)$ -грани F_1^{d-2} (или любой из ей параллельных). По теореме Минковского (п. 3), каждый пояс содержит либо 4, либо 6 гиперграней. В первом случае $(d - 2)$ -грани $F_1^{d-2}, \dots, F_6^{d-2}$ будут примитивными, и в каждой из них будут сходитьсь ровно 3 гиперграни разбиения $\mathcal{T}_P$. В случае 4-пояса $(d - 2)$ -грани $F_1^{d-2}, \dots, F_4^{d-2}$ будут стандартными, и в каждой из них будут сходитьсь ровно 4 гиперграни данного разбиения.

2. Граф и подграф Венкова. *Антиподальными* будем называть пары граней параллелоэдра P , симметричные относительно его центра. Согласно только что сказанному, каждый пояс параллелоэдра состоит из двух или трех пар антиподальных гиперграней. Для произвольного параллелоэдра P определим *граф Венкова* V_P (см. [9]). Вершины этого графа соответствуют парам антиподальных гиперграней, а ребра соединяют те и только те пары вершин, которые соответствуют гиперграням из одного пояса в P . Кроме того, определим покраску ребер графа V_P в два цвета: если ребро соответствует гиперграням из одного 6-пояса, то оно окрашено в *красный* цвет; иначе ребро соответствует гиперграням из одного 4-пояса и окрашено в *синий*. Из следующей леммы вытекает, что смежным вершинам графа V_P соответствуют 4 гиперграни, для которых существует ровно один общий пояс, а значит покраска определяется корректно и однозначно.

ЛЕММА 1. *Пусть все гиперграни выпуклого d -мерного многогранника M центрально симметричны. Тогда любые его два пояса (определенные так же, как поясы параллелоэдра) либо не имеют общих гиперграней, либо содержат ровно одну пару антиподальных граней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Александрова–Шепарда [16] такой многогранник M является центрально симметричным. Его центр симметрии обозначим $O(M)$. Каждая гипергрань пояса параллельна аффинной оболочке $(d-2)$ -грани, задающей данный пояс. Произвольный пояс симметричен относительно $O(M)$. Рассмотрим пару поясов, у которых есть общие гиперграни. Каждая из этих гиперграней содержит образующие $(d-2)$ -грани для обоих поясов. Значит, с одной стороны, сумма линейных оболочек этих образующих содержится в линейной оболочке общей гиперграни и имеет размерность не более $(d-1)$. С другой стороны, слагаемые различны и имеют размерность $(d-2)$; следовательно, их сумма имеет размерность не менее $(d-1)$, т.е. в точности равна $(d-1)$. Получаем, что все общие для поясов гиперграни имеют одинаковое $(d-1)$ -мерное направление; значит, таких гиперграней в M не более двух и они разбиваются на пары антиподальных.

Подграфом Венкова G_P параллелоэдра P будем называть подграф графа V_P Венкова, который содержит все вершины из V_P и только красные ребра из V_P . Иными словами, две вершины G_P соединены ребром тогда и только тогда, когда им соответствуют гиперграни из одного 6-пояса.

Смежными будем называть гиперграни параллелоэдра P , у которых есть общая $(d-2)$ -грань. Будем говорить, что гиперграни F_1 и F_2 принадлежат одной компоненте (комбинаторной) связности на поверхности P , если для данных гиперграней $F_1, F_2 \subset P$ существует цепочка $F_1 = E_1, E_2, \dots, E_k = F_2$ гиперграней параллелоэдра P , в которой каждая пара соседних смежна по примитивной $(d-2)$ -грани.

ЛЕММА 2. *Если компонента связности параллелоэдра содержит более одной гиперграни, то она центрально симметрична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что данная компонента содержит более одной гиперграни, и F – любая из этих гиперграней. Ясно, что среди $(d-2)$ -граней в F есть хотя бы одна примитивная. Эта $(d-2)$ -грань порождает 6-пояс, все гиперграни которого принадлежат той же компоненте, что F . В частности, гипергрань, антиподальная гиперграни F , также принадлежит данной компоненте.

Из леммы 2 немедленно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Подграф Венкова G_P данного параллелоэдра P содержит ровно k компонент связности тогда и только тогда, когда множество гиперграней P распадается в точности на k классов, где каждый класс либо центрально симметричная компонента, либо пара антиподальных изолированных гиперграней, каждая из которых составляет отдельную компоненту.*

Орбифолдом называется топологическое пространство, локально являющееся факторпространством $\mathbb{R}^d$ по модулю конечной группы (см. [18]). В частности, многообразие является орбифолдом, так как локально оно является фактором $\mathbb{R}^d$ по тривиальной группе $\{\text{id}\}$.

Сформулируем основной результат этой работы, отвечающий, с учетом предложения 3, на поставленную ранее задачу [13].

ТЕОРЕМА 1 (о размерности орбифолда параллелоэдров Вороного). *Пусть в аффинном классе $\mathcal{A}(P)$ параллелоэдра P имеется хотя бы один параллелоэдр Вороного, и пусть подграф Венкова G_P имеет ровно k компонент связности. Тогда множество параллелоэдров Вороного в $\mathcal{A}(P)$ является орбифолдом размерности k .*

Параллелоэдры Вороного, входящие в орбифолд, рассматриваются с точностью до конгруэнтности (т.е. конгруэнтные параллелоэдры представлены одной и той же точкой орбифолда). Описание этого орбифолда будет дано в доказательстве теоремы 1.

3. Критерий для параллелоэдров Вороного. Для каждой гиперграни F параллелоэдра P определим *фацетный вектор* $\mathbf{f} = \mathbf{f}(F)$ как направленный отрезок с началом в центре P и концом в центре смежного по F параллелоэдра P_F : $P \cap P_F = F$. Множество всех фацетных векторов параллелоэдра P обозначим $\mathcal{V}$.

Рассмотрим d -мерный параллелоэдр Вороного P_V , т.е. параллелоэдр, являющийся областью Дирихле для некоторой решетки Λ^d . Для произвольной пары точек $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{E}^d$ обозначим через H_{pq} плоскость, заданную уравнением $|\mathbf{x} - \mathbf{p}| = |\mathbf{x} - \mathbf{q}|$, т.е. срединную перпендикулярную гиперплоскость к отрезку $\mathbf{pq}$, а через H_{pq}^- — то из замкнутых полупространств в $\mathbb{E}^d$, ограниченных гиперплоскостью H_{pq} , что содержит точку $\mathbf{p}$. Тогда для произвольных $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{E}^d$, в частности, имеем $H_{pq}^- \cap H_{qp}^- = H_{pq}$, $H_{pq}^- \cup H_{qp}^- = \mathbb{E}^d$. Из определения следует, что

$$P_V = \bigcap_{\mathbf{c} \in \Lambda, \mathbf{q} \neq \mathbf{c}} H_{cq}^-$$

где $\mathbf{c}$ — центр параллелоэдра P . Отсюда легко выводится следующий полезный критерий для параллелоэдров Вороного.

ЛЕММА 4 (критерий). *Параллелоэдр P является параллелоэдром Вороного тогда и только тогда, когда каждая его гипергрань F перпендикулярна соответствующему ей фацетному вектору $\mathbf{f}(F)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если P является параллелоэдром Вороного (с центром $\mathbf{c}$), то каждая его гипергрань содержится в соответствующей гиперплоскости H_{cq} .

Обратно, если все фацетные вектора P ортогональны соответствующим гиперграням, то $P = \bigcap_{\mathbf{q} \in M, \mathbf{q} \neq \mathbf{c}} H_{cq}^-$, где M — множество центров всех параллелоэдров, смежных с P по гиперграням. Рассмотрим разбиение $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ на трансляты P и решетку Λ^d центров ячеек этого разбиения. Для данной решетки определен параллелоэдр Вороного $P_V = \bigcap_{\mathbf{q} \in \Lambda, \mathbf{q} \neq \mathbf{c}} H_{cq}^-$. Так как $M \subset \Lambda^d$, то $P_V \subset P$. Однако, и P , и P_V являются фундаментальными областями для Λ^d , а значит имеют равный объем. Отсюда следует, что $P = P_V$ и, значит, P также является параллелоэдром Вороного.

4. Разложение параллелоэдра. Напомним, что суммой *Минковского* множеств $Q_1, Q_2, \dots, Q_k \subset \mathbb{R}^n$ называется множество точек

$$Q = \sum_{i=1}^k Q_i := \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i \in Q_i \right\}.$$

Нас будет интересовать случай, когда каждое Q_i — это выпуклый многогранник некоторой размерности. Известно, что сумма Минковского выпуклых многогранников является выпуклым многогранником. Сумма Минковского центрально симметричных многогранников также является центрально симметричным многогранником, центр которого является суммой центров слагаемых.

Рассмотрим прямую сумму Минковского многогранников (многогранники расположены в трансверсальных подпространствах). Для прямой суммы $Q := \bigoplus_{i=1}^k Q_i$ известно [17], что $\dim Q = \sum_{i=1}^k \dim Q_i$, а также, что каждая грань $F \in Q$ является прямой суммой соответствующих граней слагаемых: $F = \bigoplus_{i=1}^k F_i$. В частности, все гипергрani в Q имеют вид $Q_1 \oplus \cdots \oplus F_i \oplus \cdots \oplus Q_k$, где ровно одно из слагаемых Q_i заменено на некоторую свою гипергрань F_i .

Многогранник $Q = Q_1 \oplus Q_2$ называется *разложимым*. Нам понадобится следующее предложение (для определенности, в этом предложении и далее следует считать, что центры всех слагаемых и суммарных параллелоэдров находятся в начале координат. Это будет либо явно предполагаться конструкцией, либо легко достигаться параллельным переносом центров всех слагаемых в начало координат).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (свойства разложимости). 1) Если параллелоэдр P разложим в сумму $P = Q_1 \oplus Q_2$, то многогранники Q_1 и Q_2 также являются параллелоэдрами соответствующей размерности.

2) Для всякого параллелоэдра P однозначно (с точностью до порядка слагаемых) определено неприводимое разложение в сумму неразложимых параллелоэдров

$$P = \bigoplus_{i=1}^k Q_i, \quad k \geq 1.$$

3) Пусть Q_i – набор параллелоэдров, расположенных в попарно трансверсальных пространствах и задающих решетки центров Λ_i . Тогда $P := \bigoplus_{i=1}^k Q_i$ является параллелоэдром и задает решетку центров $\Lambda = \bigoplus \Lambda_i$.

Отсюда, в частности, следует, что гипергрani параллелоэдра $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$ разбиваются на k семейств $\mathcal{F}_i = \{P_1 \oplus \cdots \oplus F_i \oplus \cdots \oplus P_k\}$, $1 \leq i \leq k$. Напомним, что в семействе $\mathcal{F}_i$ грань F_i пробегает множество всех гиперграней d_i -параллелоэдра Q_i . Множество фацетных векторов, соответствующих гиперграням из $\mathcal{F}_i$, обозначим $\mathcal{V}_i$. Набор внешних нормалей к гиперграням из $\mathcal{F}_i$ будем обозначать $\mathcal{N}_i$. Для произвольного набора векторов $\mathcal{S}$ его линейную оболочку обозначим через $\langle \mathcal{S} \rangle$.

ЛЕММА 6. Если $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$, то $P \cap \langle \mathcal{V}_i \rangle = P_i$ (совпадает с точностью до параллельного переноса).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы считаем, что центры P и всех P_i (возможно, после параллельного переноса) совпадают с началом координат в $\mathbb{E}^d$. Тогда $P_i = P \cap \text{aff } P_i$. Из третьего свойства предложения 5 имеем, что $\mathcal{V}_i$ как множество направленных отрезков совпадает с множеством $\mathcal{V}(P_i)$ фацетных векторов параллелоэдра P_i . Поэтому

$$P \cap \langle \mathcal{V}_i \rangle = P \cap \langle \mathcal{V}(P_i) \rangle = P \cap \text{aff } P_i = P_i.$$

ЛЕММА 7. Пусть $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$. Тогда для любой пары различных индексов из диапазона $0 < i, j \leq k$ выполнено $\langle \mathcal{N}_i \rangle \perp \langle \mathcal{V}_j \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую нормаль $\mathbf{n}_i \in \mathcal{N}_i$, соответствующую ей гипергрань $P_1 \oplus \cdots \oplus F_i \oplus \cdots \oplus P_k$ и любой индекс $j \neq i$, $0 < j \leq k$. Имеем $\mathbf{n}_i \perp P_1 \oplus \cdots \oplus F_i \oplus \cdots \oplus P_k$; значит $\mathbf{n}_i \perp P_j$, т.е. $\mathbf{n}_i \perp \text{aff } P_j = \langle \mathcal{V}_j \rangle$. В частности, $\mathbf{n}_i \perp \mathbf{f}_j$ для произвольного $\mathbf{f}_j \in \mathcal{V}_j$.

Следующая теорема связывает свойство разложимости параллелоэдра со строением его графа Венкова.

ТЕОРЕМА 2 (о разложимости [9]). Пусть, P является прямой суммой параллелоэдров P_1 и P_2 . Пусть V_1 и V_2 – подграфы графа Венкова V_P на вершинах вида $\pm F_1 \oplus P_2$ и $P_1 \oplus \pm F_2$ соответственно, где F_1 – произвольная гипергрань P_1 , F_2 – произвольная гипергрань P_2 . Тогда

- 1) отображение из V_{P_i} в V_i , при котором вершина $\pm F_i$ переходит в $\pm F_i \oplus P_j$, является изоморфизмом графов при $\{i, j\} = \{1, 2\}$;
- 2) каждая вершина подграфа V_1 соединена с каждой вершиной подграфа V_2 ребром синего цвета;
- 3) если граф Венкова V_P несвязен по красным ребрам, то параллелоэдр P разложим.

Индукцией по количеству компонент связности подграфа Венкова можно получить обобщение теоремы 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. 1) Подграф Венкова параллелоэдра P содержит ровно k компонент связности $G_P = \bigsqcup_{i=1}^k G_i$ тогда и только тогда, когда P представим в виде суммы k неразложимых параллелоэдров $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$.

2) Пусть $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$. Отображение, переводящее вершину $\pm F_i$ подграфа Венкова G_{P_i} в вершину $P_1 \oplus \dots \oplus P_{i-1} \oplus \pm F_i \oplus P_{i+1} \oplus \dots \oplus P_k$ подграфа Венкова G_P , задает изоморфизм между графом G_{P_i} и компонентой связности G_i .

Из этого предложения, в частности, следует, что для данного параллелоэдра такое разложение единственно (с точностью до порядка слагаемых). Следующая лемма говорит о том, что класс параллелоэдров Вороного замкнут относительно операции прямой суммы в ортогональных подпространствах.

ЛЕММА 9. Пусть некоторый параллелоэдр P представляется в виде прямой суммы некоторых многогранников меньших размерностей $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$. Параллелоэдр P является параллелоэдром Вороного тогда и только тогда, когда каждый из многогранников P_i является параллелоэдром Вороного, а аффинные оболочки слагаемых ортогональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По первому свойству разложимости все слагаемые P_i данной прямой суммы являются параллелоэдрами. Докажем лемму в случае $k = 2$, т.е. $P = P_1 \oplus P_2$. Рассмотрим произвольную гипергрань F'_1 параллелоэдра P_1 и ее фацетный вектор $\mathbf{f}'_1$. Ей соответствует гипергрань $F_1 = F'_1 \oplus P_2$ параллелоэдра P с фацетным вектором $\mathbf{f}_1$. Из третьего свойства разложимости следует, что $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}'_1$ как направленные отрезки совпадают.

Пусть P является параллелоэдром Вороного; тогда по критерию 4 имеем, что все его фацетные вектора являются нормальными к соответствующим гиперграням, т.е. $\mathcal{N}_1 = \mathcal{V}_1$, $\mathcal{N}_2 = \mathcal{V}_2$. Согласно лемме 7 нормали к гиперграням одной компоненты ортогональны фацетным векторам другой компоненты, т.е. в данном случае $\mathcal{V}_1 \perp \mathcal{V}_2$. Так как $\text{aff } P_1 = \langle \mathcal{V}_1 \rangle$, $\text{aff } P_2 = \langle \mathcal{V}_2 \rangle$, то $\text{aff } P_1 \perp \text{aff } P_2$. Таким образом, ортогональность аффинных оболочек доказана. Так как $\mathbf{f}_1 \perp F_1 = F'_1 \oplus P_2$ и $\mathbf{f}'_1 = \mathbf{f}_1$, то $\mathbf{f}'_1 \perp F'_1$. В силу произвольности выбора фацетного вектора $\mathbf{f}'_1$ по критерию имеем, что P_1 является параллелоэдром Вороного. Аналогично доказывается, что P_2 – параллелоэдр Вороного.

Обратно, если P_1, P_2 – параллелоэдры Вороного и $\text{aff } P_1 \perp \text{aff } P_2$, то выполнено $\mathbf{f}'_1 \perp F'_1$, $\mathbf{f}_1 \perp \langle \gamma_2 \rangle = \text{aff } P_2$; следовательно, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}'_1 \perp (F'_1 \oplus P_2) = F_1$, т.е. $\mathbf{f}_1 \perp F_1$. Таким образом, все фасетные вектора параллелоэдра P ортогональны соответствующим гиперграням. Значит, по критерию P – параллелоэдр Вороного. В случае $k = 2$ теорема доказана. Общее доказательство получается применением этого случая к суммам

$$P_1 \oplus P_2, \quad (P_1 \oplus P_2) \oplus P_3, \quad \dots, \quad \left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} P_i \right) \oplus P_k.$$

5. Покомпонентное растяжение. В работе [13] доказана следующая теорема, которая усиливает результат [12].

ТЕОРЕМА 3 (новая редакция, N. Dolbilin, J. Itoh, C. Nara [13], [14]). *Если у параллелоэдра P его подграф Венкова G_P связан, то аффинный класс $\mathcal{A}(P)$ содержит не более одного (с точностью до подобия) параллелоэдра Вороного (размерность орбифолда параллелоэдров Вороного, если он не пуст, равна 1).*

Далее нам потребуется следствие из теоремы 3:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Если два неприводимых параллелоэдра Вороного аффинно эквивалентны и имеют равный объем, то они конгруэнтны.*

Пусть P и P' – два d -мерных параллелоэдра Вороного. Допустим существует аффинное преобразование φ , переводящее P в P' : $\varphi(P) = P'$. Пусть неприводимое разложение для P имеет вид

$$P = \bigoplus_{i=1}^k P_i. \quad (*)$$

Тогда в силу невырожденности преобразования φ имеем

$$P' = \varphi(P) = \varphi(P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_k) = \varphi(P_1) \oplus \varphi(P_2) \oplus \dots \oplus \varphi(P_k).$$

Согласно лемме 9 каждое слагаемое $\varphi(P_i)$ является параллелоэдром Вороного, и линейные оболочки любых двух слагаемых взаимно ортогональны. Из предложения 8 следует, что данное разложение параллелоэдра P' неприводимо. Из теоремы 3 следует, что каждое ограничение $\varphi_i := \varphi|_{\text{aff } P_i}$ преобразования φ является преобразованием подобия. Таким образом доказана лемма, которая по существу описывает структуру аффинных преобразований параллелоэдров Вороного.

ЛЕММА 11. *Пусть P и P' – d -мерные параллелоэдры Вороного, а φ – аффинное преобразование, переводящее P в P' . Пусть P_i – произвольное неприводимое слагаемое из разложения P в прямую сумму. Тогда ограничение $\varphi|_{\text{aff } P_i}$ этого отображения на слагаемое P_i является преобразованием подобия.*

Обратно, рассмотрим произвольный параллелоэдр Вороного $P \in \mathbb{E}^d$ с неприводимым разложением $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$. Для произвольного набора ненулевых коэффициентов $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ в каждом из подпространств $\text{aff } P_i$ рассмотрим гомотетию с коэффициентом λ_i . По лемме 9 сумма таких преобразованных компонент

$$P' := \bigoplus_{i=1}^k \lambda_i P_i$$

также является параллелоэдром Вороного. Кроме того, в силу центральной симметрии параллелоэдров P_i мы можем считать $\lambda_i > 0$. Замечательно то, что все аффинные образы P , являющиеся параллелоэдрами Вороного, задаются в таком виде. Это следует из предложения 12.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть два параллелоэдра Вороного P' и P'' аффинно эквивалентны некоторому параллелоэдру Вороного P ($P' = \varphi'(P)$, $P'' = \varphi''(P)$) с неприводимым разложением $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$, и пусть для каждого индекса i ограничения $\varphi'|_{\text{aff } P_i}$ и $\varphi''|_{\text{aff } P_i}$ (являющиеся преобразованиями подобия) имеют равные (по модулю) коэффициенты. Тогда P' и P'' конгруэнтны.

6. Доказательство основной теоремы. Теперь приведем доказательство основного результата этой работы – теоремы 1. Доказательство представим в виде цепочки утверждений. Рассмотрим множество $\mathcal{A}_V(P)$ параллелоэдров Вороного из аффинного класса $\mathcal{A}(P)$. По условию теоремы оно непусто. Нормированным мы будем называть такой параллелоэдр Вороного, у которого все неприводимые слагаемые в разложении (*) имеют единичный объем (соответствующей размерности).

ЛЕММА 13. Для произвольного параллелоэдра P , если класс $\mathcal{A}_V(P)$ непуст, то он содержит ровно один нормированный параллелоэдр P^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Параллелоэдры из одного аффинного класса имеют изоморфные подграфы Венкова. Подграф G_P содержит k компонент связности, поэтому подграф Венкова для P_V также состоит из k компонент. Согласно предложению 8 параллелоэдр P_V распадается в прямую сумму (*). Посредством гомотетий $P_i^* = \lambda_i P_i$, действующих на каждом из этих слагаемых отдельно, добьемся, чтобы объем (соответствующей размерности) слагаемого P_i^* равнялся единице: $\text{Vol}_{d_i}(P_i^*) = 1$. Таким образом, каждое слагаемое P_i^* является нормированным. Очевидно, что $P^* = \bigoplus_{i=1}^k P_i^*$ принадлежит $\mathcal{A}_V(P)$ и является нормированным и, как следствие, имеет единичный объем.

Нормированные параллелоэдры удобны в силу следующего предложения, которое следует из леммы 11 и предложения 12.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Каждый параллелоэдр P_V из $\mathcal{A}_V(P)$ представляется в виде $P_V = \lambda_1 P_1^* \oplus \dots \oplus \lambda_k P_k^*$ и, соответственно, полностью описывается набором k положительных коэффициентов $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

Однако, такая параметризация, вообще говоря, неоднозначна: могут существовать 2 различных набора $\{\lambda_i^1\}$, $\{\lambda_j^2\}$, которые, тем не менее, задают конгруэнтные параллелоэдры. В этом случае целесообразно использовать приведенное представление в виде следующей прямой суммы:

$$P = \bigoplus_{g=1}^m \bigoplus_{j=1}^{k_g} P_{g,j} = (P_{1,1} \oplus \dots \oplus P_{1,k_1}) \oplus \dots \oplus (P_{m,1} \oplus \dots \oplus P_{m,k_m}),$$

где слагаемые неприводимы, в каждой группе $\{P_{g,1}, \dots, P_{g,k_g}\}$ все слагаемые попарно аффинно эквивалентны, а в разных группах они аффинно не эквивалентны.

Приведенное представление для P^* , очевидно, имеет такой же вид

$$P^* = \bigoplus_{g=1}^m \bigoplus_{j=1}^{k_g} P_{g,j}^*.$$

Так как параллелоэдры $P_{g,j}^*$ нормированы, из теоремы 3 следует, что произвольные два слагаемых из одной группы данного разложения подобны друг другу, а из предложения 10 следует, что они конгруэнтны друг другу. Таким образом доказана

ЛЕММА 15. *Внутри каждой группы слагаемых приведенного представления нормированного параллелоэдра все слагаемые попарно конгруэнтны.*

Рассмотрим перестановку σ индексов $1, \dots, k$, которая сохраняет приведенное представление, т.е. каждая группа при σ переходит в себя: для любого индекса i слагаемые P_i и $P_{\sigma(i)}$ принадлежат одной и той же группе.

ЛЕММА 16. *Два набора $\{\lambda_i\}$, $\{\lambda'_j\}$ по k положительных коэффициентов в каждом задают конгруэнтные параллелоэдры Вороного из $\mathcal{A}_V(P)$ тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга перестановкой σ , сохраняющей приведенное представление.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если два набора коэффициентов отличаются указанной перестановкой, то движение пространства $\mathbb{R}^d$, переставляющее соответствующие подпространства $\text{Aff}(P_i^*)$ и $\text{Aff}(P_{\sigma(i)}^*)$, переводит параллелоэдр с набором $\{\lambda_i\}$ в параллелоэдр с набором $\{\lambda'_j\}$.

Обратно, если два набора задают конгруэнтные параллелоэдры, то каждому слагаемому $\lambda_i P_i^*$ первого параллелоэдра отвечает конгруэнтное слагаемое $\lambda'_{\sigma(i)} P_{\sigma(i)}^*$ второго параллелоэдра. Таким образом, параллелоэдры P_i^* и $P_{\sigma(i)}^*$ гомотетичны друг другу (а так как оба нормированы, то и конгруэнтны). Значит, P_i^* и $P_{\sigma(i)}^*$ принадлежат одной группе слагаемых. Поэтому перестановка σ сохраняет приведенное представление.

Перестановка σ определяет ортогональное преобразование положительного ортанта $\mathbb{R}_+^k$, параметризованного $\{\lambda_i\}$, в себя, при котором каждая ось Ox_i переходит в соответствующую ось $Ox_{\sigma(i)}$. Такие перестановки образуют группу $N = S_1 \times \dots \times S_m$, где S_{k_g} — это группа всех перестановок на k_g элементах g -й группы приведенного представления: $\{P_{g,1}, \dots, P_{g,k_g}\}$. Таким образом, множество $\mathcal{A}_V(P)$ гомеоморфно $\mathbb{R}_+^k/N$. Значит множество всех параллелоэдров Вороного из $\mathcal{A}(P)$ является орбиолдом размерности k .

Автор выражает глубокую благодарность Н. П. Долбилину за постановку задачи и помощь в работе, А. И. Гарберу и А. Н. Магазину за плодотворные обсуждения. Автор также благодарен Р. Эрдалу за приглашение посетить Университет Квинс (г. Кингстон, Канада) и оказанное гостеприимство, а также Филдсовскому институту (г. Торонто) за приглашение участвовать в конференции по дискретной геометрии. В стенах этих центров была написана значительная часть работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*, Санкт-Петербург, 1885.

- [2] H. Minkowski, “Allgemeine Lehrsätze über konvexe Polyeder”, *Göott. Nachr.*, **1897** (1897), 198–219.
- [3] Б. А. Венков, “Об одном классе эвклидовых многогранников”, *Вестн. Ленинградск. ун-та. Сер. матем., физ., хим.*, 1954, №9, 11–31.
- [4] P. McMullen, “Convex bodies which tile space by translation”, *Mathematika*, **27**:1 (1980), 113–121.
- [5] N. P. Dolbilin, “The extension theorem”, *Discrete Math.*, **221**:1-3 (2000), 43–59.
- [6] Н. П. Долбилин, В. С. Макаров, “Теорема о продолжении в теории правильных разбиений и ее приложения”, *Дискретная геометрия и геометрия чисел*, Тр. МИАН, **239**, Наука, М., 2002, 146–169.
- [7] G. Voronoi, “Nouvelles applications des paramètres continus á la theorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les paralléloédres primitifs”, *J. für Math.*, **136** (1909), 67–178.
- [8] O. Zitomirskij, “Vershärfung eines Satzes von Woronoï”, *Журн. Ленинградск. физ.-матем. об-ва*, **2**:2 (1929), 131–151.
- [9] A. Ordine, *Proof of the Voronoi conjecture on parallelotopes in a new special case*, PhD Thesis, Queen’s University, Kingston, 2005.
- [10] A. Garber, A. Gavriljuk, A. Magazinov, “The Voronoi conjecture for parallelohedra with simply connected δ -surface”, *Discrete Comput. Geom.*, arXiv:math.MG/1212.1019v1 (to appear).
- [11] R. M. Erdahl, “Zonotopes, dicings, and Voronoi’s conjecture on parallelohedra”, *European J. Combin.*, **20**:6 (1999), 527–549.
- [12] L. Michel, S. S. Ryshkov, M. Senechal, “An extension of Voronoi’s theorem on primitive parallelotopes”, *European J. Combin.*, **16** (1995), 59–63.
- [13] N. Dolbilin, J.-I. Itoh, C. Nara, “Affine equivalent classes of parallelohedra”, *Computational Geometry, Graphs and Applications*, Lecture Notes in Comput. Sci., **7033**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011, 55–60.
- [14] Н. П. Долбилин, “Параллелоэдры: ретроспектива и новые результаты”, Тр. ММО, **73**, МЦНМО, М., 2012, 259–276.
- [15] Н. П. Долбилин, “Свойства граней параллелоэдров”, *Геометрия, топология и математическая физика. II*, Тр. МИАН, **266**, МАИК, М., 2009, 112–126.
- [16] G. C. Shephard, “Polytopes with centrally symmetric faces”, *Canad. J. Math.*, **19** (1967), 1206–1213.
- [17] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer-Verlag, New-York, 1995.
- [18] W. P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, Princeton Univ. Lectures Notes, Princeton Univ., 1980.

А. А. Гаврилюк

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,

г. Москва

E-mail: agavriljuk.research@gmail.com

Поступило

29.09.2011