Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Лапин, Равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируруемыми начальными условиями, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 393–404

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9259>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:17:21

Равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируруемыми начальными условиями

К. С. Лапин

Работа посвящена развитию теории ограниченности по части переменных решений систем дифференциальных уравнений, которая фактически является вариантом прямого метода Ляпунова в теории устойчивости.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm9259

В классической работе Йосидзавы [1] при изучении условий существования периодических движений динамических систем была разработана теория различных видов ограниченности решений систем дифференциальных уравнений. Основным средством исследования ограниченности решений в работе [1] является метод, который в своей сущности аналогичен прямому методу Ляпунова в теории устойчивости. Исследования различных видов ограниченности решений систем дифференциальных уравнений по части переменных и, в частности, равномерной ограниченности решений по части переменных, впервые были проведены Румянцевым и Озиранером [2]. С другой стороны, в работе Воротникова и Мартышенко [3] было разработано новое направление в теории устойчивости по Ляпунову относительно части переменных, а именно, в [2] была разработана теория частичной устойчивости положения равновесия, у которого часть координат контролируется. В связи с этим возникает интересный вопрос о возможности создания в теории ограниченности решений по части переменных методов, которые были бы в идейном плане аналогичны методам указанной выше теории устойчивости по части переменных частичного положения равновесия.

В настоящей работе введено понятие равномерной ограниченности решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями. Это новое понятие является в идейном плане родственным понятию равномерной устойчивости относительно части переменных частичного положения равновесия из работы [3]. В терминах верхней производной Дини получен критерий равномерной ограниченности решений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями. Проведено сравнение этого критерия с критерием равномерной ограниченности решений систем по части

переменных [2]. Далее в работе введено понятие тотальной ограниченности (или, по-другому, ограниченности при постоянно действующих возмущениях) решений системы дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируруемыми начальными условиями. В терминах верхней производной Дини получен достаточный признак тотальной ограниченности решений систем по части переменных с частично контролируруемыми начальными условиями. Приведены примеры на применение полученных в работе результатов к исследованию равномерной (соответственно тотальной) ограниченности решений конкретных систем по части переменных с контролируемой частью начальных условий. Перейдем теперь к точным определениям и формулировкам.

Пусть задана произвольная система дифференциальных уравнений от n переменных

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad F(t, x) = (F^1(t, x), \dots, F^n(t, x)), \quad (1)$$

правая часть которой является переменным векторным полем в $\mathbb{R}^n$, определенным и непрерывным в области $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : 0 \leq |x| < \infty, t \geq 0\}$. Далее везде будет предполагаться, что каждое решение $x = x(t)$ системы (1) продолжимо на всю полуось $t \geq 0$.

Для любого вектора $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, где $1 \leq k \leq n$, обозначим через $|x|_k$ следующее число:

$$|x|_k = |y| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^k)^2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2]. Говорят, что решения системы (1) *равномерно ограничены по переменным* $y = (x^1, \dots, x^k)$ или, более кратко, *равномерно y -ограничены*, если для любого неотрицательного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ существует такое положительное число $\beta(\alpha) \in \mathbb{R}$, что для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$, $|x_0| \leq \alpha$, выполнено условие $|x(t, x_0, t_0)|_k < \beta$ при $t \geq t_0$, где $x = x(t, x_0, t_0)$ – произвольное решение системы (1), проходящее через точку (t_0, x_0) .

Легко видеть, что на геометрическом языке равномерная y -ограниченность решений системы (1) означает, что решения этой системы, стартующие в произвольный момент времени из точек n -мерного шара $B_n(\mathcal{O}, \alpha)$ радиуса α с центром в начале системы координат $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$, будут во все последующие моменты времени находиться в n -мерном полном бесконечном цилиндре $B_k(\mathcal{O}, \beta(\alpha)) \times \mathbb{R}^{n-k}$, радиус сечения которого $\beta(\alpha)$ не зависит от момента времени старта решений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что решения системы (1) *равномерно ограничены по части переменных* $y = (x^1, \dots, x^k)$ *с контролируемой частью начальных условий* $y_0 = (x_0^1, \dots, x_0^k)$ или, более кратко, *равномерно y -ограничены с y_0 -контролем*, если для каждого неотрицательного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ существует такое положительное число $\beta(\alpha) \in \mathbb{R}$, что для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$, $|x_0|_k \leq \alpha$, выполнено условие $|x(t, x_0, t_0)|_k < \beta$ при $t \geq t_0$, где $x = x(t, x_0, t_0)$ – любое решение системы (1), проходящее через точку (t_0, x_0) .

На геометрическом языке, по сравнению с определением равномерной y -ограниченности, равномерная y -ограниченность с y_0 -контролем решений системы (1) означает, что решения этой системы, стартующие в произвольный момент времени из точек n -мерного полного бесконечного цилиндра $B_k(\mathcal{O}, \alpha) \times \mathbb{R}^{n-k}$ радиуса сечения α ,

будут во все последующие моменты времени находится в n -мерном полном бесконечном цилиндре $B_k(\mathcal{O}, \beta(\alpha)) \times \mathbb{R}^{n-k}$, радиус сечения которого $\beta(\alpha)$ не зависит от момента времени старта решений.

Таким образом, различие понятий равномерной y -ограниченности и равномерной y -ограниченности с y_0 -контролем заключается в том, что при исследовании решений системы на равномерную y -ограниченность интересуются всеми координатами точек, из которых стартуют решения, а при исследовании решений системы на равномерную y -ограниченность с y_0 -контролем интерес представляет лишь контролируемая часть координат точек старта решений.

Ясно, что если решения системы (1) равномерно y -ограничены с y_0 -контролем, то решения этой системы являются и просто равномерно y -ограниченными, поскольку множество $B_\alpha^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \alpha\}$ является подмножеством множества $B_\alpha^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_k \leq \alpha\}$. Обратное, вообще говоря, неверно, т.е. из равномерной y -ограниченности решений системы (1), вообще говоря, не следует равномерная y -ограниченность с y_0 -контролем решений этой системы.

Напомним теперь [1], что *верхней производной Дини функции* $G(t, x)$ в силу системы (1) называется функция $G_{F(t,x)}'^+(t, x)$, которая определяется следующей формулой:

$$G_{F(t,x)}'^+(t, x) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(\sup_{h \in (0; \alpha]} \frac{G(t+h, x+F(t, x)h) - G(t, x)}{h} \right). \quad (2)$$

Легко видеть, что для любой фиксированной точки (t, x) предел (2) существует всегда, но может обращаться в бесконечность. Поэтому условие существования верхней производной Дини $G'^+(t, x)$ в силу системы (1) как функции от (t, x) со значениями в $\mathbb{R}$ равносильно условию не обращения в бесконечность предела (2) для любой точки (t, x) .

Для функции $G(t, x)$, заданной в некоторой области $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, будем употреблять запись $G(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$, если для любого ограниченного подмножества $B \subset E$, замыкание которого принадлежит E , выполнено условие Липшица по переменным t и x , т.е. существует такая постоянная Липшица L , зависящая от B , что для любых точек $(t, x), (t', x') \in B$ справедливо следующее неравенство:

$$|G(t, x) - G(t', x')| \leq L(|t - t'| + |x - x'|).$$

В случае, когда функция $G(t, x)$ имеет непрерывные частные производные по переменным $t, x^1, \dots, x^n$ (соответственно по переменным $x^1, \dots, x^n$), будем употреблять запись $G(t, x) \in \mathcal{D}(t, x)$ (соответственно запись $G(t, x) \in \mathcal{D}(x)$).

Отметим, что если $G(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$ то производная Дини $G_{F(t,x)}'^+(t, x)$ существует как функция со значениями в $\mathbb{R}$, т.е. функция $G_{F(t,x)}'^+(t, x)$ не обращается в бесконечность ни в одной точке из области своего определения. Действительно, так как $G(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$ и $|F(t, x)| < +\infty$ для любой точки (t, x) , получаем

$$\begin{aligned} |G_{F(t,x)}'^+(t, x)| &\leq \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(\sup_{h \in (0; \alpha]} \frac{|G(t+h, x+V(t, x)h) - G(t, x)|}{h} \right) \\ &\leq \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(\sup_{h \in (0; \alpha]} \frac{L(h + |V(t, x)|h)}{h} \right) = L(1 + |V(t, x)|) < +\infty. \end{aligned}$$

Напомним утверждение из работы [1], которое связывает верхнюю производную Дини $G'_{F(t,x)}(t, x)$ с решениями системы (1).

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольной функции $G(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, условие $G'_{F(t,x)}(t, x) \leq 0$ выполнено тогда и только тогда, когда для любого решения $x = x(t)$ системы (1) функция $G(t, x(t))$ от переменной t является невозрастающей функцией.*

Сформулируем и докажем теперь достаточный признак равномерной y -ограниченности с y_0 -контролем решений системы (1) в терминах верхней производной Дини в силу этой системы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для системы (1) имеется такая неотрицательная функция $V(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$, определенная в области $t \geq 0$, $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$, $|y| \geq R_0$, где $R_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, для которой выполнены следующие условия:*

- 1) $b(|y|) \leq V(t, y) \leq a(|y|)$, где $a(r) > 0$, $b(r) \geq 0$ – непрерывные возрастающие функции и $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$;
- 2) $V'_{F(t,x)}(t, x) \leq 0$ внутри области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|_k \geq R_0$.

Тогда решения системы (1) равномерно y -ограничены с y_0 -контролем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать, что для каждого $\alpha > 0$ существует такое $\beta(\alpha) > 0$, что для любых $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|x_0|_k \leq \alpha$, выполнено условие $|x(t, x_0, t_0)|_k < \beta$ при всех $t \geq t_0$. Сразу отметим, что без ограничения общности доказательство достаточно провести только для тех решений $x = x(t, x_0, t_0)$, которые при $|x_0|_k \geq R_0$ удовлетворяют условию $|x(t, x_0, t_0)|_k \geq R_0$, и для тех $\alpha > 0$, которые удовлетворяют условию $\alpha > R_0$. Приступим теперь к доказательству. Пользуясь условием 1) из формулировки доказываемой теоремы, получаем, что для любого решения $x = x(t, x_0, t_0)$ системы (1) имеет место неравенство $b(|x(t, x_0, t_0)|_k) \leq V(t, x(t, x_0, t_0))$. Из условия 2) доказываемой теоремы следует, что для любого решения $x = x(t, x_0, t_0)$ системы (1) функция $V(t, x(t, x_0, t_0))$ от переменной t является невозрастающей. Из этого при $t \geq t_0$ получаем неравенство $V(t, x(t, x_0, t_0)) \leq V(t_0, x_0)$. Так как при $|x_0|_k = |y| \leq \alpha$ справедливо неравенство $V(t_0, x_0) \leq a(\alpha)$, имеем неравенства

$$b(|y(t, x_0, t_0)|) \leq V(t, x(t, x_0, t_0)) \leq V(t_0, x_0) \leq a(\alpha).$$

Пользуясь теперь условием $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, выберем такое число β , которое зависит от α , но не зависит от t_0 , что $a(\alpha) < b(\beta)$. Из этого получаем неравенство $b(|y(t, x_0, t_0)|) < b(\beta)$. Так как функция $b(r)$ является непрерывной и возрастающей, для этой функции имеется обратная функция, которая также является возрастающей функцией. Применяя эту обратную функцию к неравенству $b(|y(t, x_0, t_0)|) < b(\beta)$, получим неравенство $|x(t, x_0, t_0)|_k < \beta$. Таким образом, показано, что решения системы (1) равномерно y -ограничены с y_0 -контролем.

Отметим, что если $V(t, x) \in \mathcal{D}(t, x)$, то условие 2) из теоремы 2 равносильно условию

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot F(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i} F^i(t, x) \leq 0,$$

ПОСКОЛЬКУ В ЭТОМ СЛУЧАЕ ИМЕЕТ МЕСТО СЛЕДУЮЩЕЕ ОЧЕВИДНОЕ РАВЕНСТВО:

$$V_{F(t,x)}^+(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot F(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i} F^i(t,x).$$

ПРИМЕР 1. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx^1}{dt} = -(x^1)^{2m_1-1} f_1(t, x^1, \dots, x^n), \\ \dots \dots \dots \frac{dx^k}{dt} = -(x^k)^{2m_k-1} f_k(t, x^1, \dots, x^n), \\ \dots \dots \dots \frac{dx^{k+1}}{dt} = -\sin(2x^{k+1}) f_{k+1}(t, x^1, \dots, x^n), \\ \dots \dots \dots \frac{dx^n}{dt} = -\sin(2x^n) f_n(t, x^1, \dots, x^n), \end{array} \right.$$

где $f_i(t, x^1, \dots, x^n)$, $1 \leq i \leq n$, – любые непрерывные неотрицательные функции, заданные в области $\Omega = \{(t, x) \mid t \geq 0, x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n\}$, и числа $m_1, \dots, m_k$ в показателях степеней являются любыми целыми положительными числами. Покажем, пользуясь теоремой 2, что решения этой системы дифференциальных уравнений равномерно ограничены по части переменных $y = (x^1, \dots, x^k)$ с контролируемой частью начальных условий $y_0 = (x_0^1, \dots, x_0^k)$, $1 \leq k \leq n$. Рассмотрим для любого фиксированного $1 \leq k \leq n$ неотрицательную функцию

$$V(t, x) = V(t, x^1, \dots, x^n) = (x^1)^2 + \dots + (x^k)^2 + \sin^2(x^{k+1}) + \dots + \sin^2(x^n).$$

Ясно, что $V(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$. Легко проверяется, что для функции $V(t, x)$ имеет место двойное неравенство

$$b(|y|) \leq V(t, x) \leq a(|y|),$$

где $y = (x^1, \dots, x^k)$, $b(r) = r^2$ и $a(r) = r^2 + n - k + 1$. Так как функции $a(r) > 0$, $b(r) \geq 0$ являются возрастающими и $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, то для $V(t, x)$ выполнено условие 1) из теоремы 2. Проверим теперь, что для $V(t, x)$ выполнено условие 2) из теоремы 2. Так как функция $V(t, x)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по переменным $x^1, \dots, x^n$, получаем

$$\begin{aligned} V_{F(t,x)}^+ &= \frac{\partial V}{\partial x^1} \cdot (-(x^1)^{2m_1-1} f_1(t, x)) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x^k} \cdot (-(x^k)^{2m_k-1} f_k(t, x)) \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial x^{k+1}} \cdot (-\sin(2x^{k+1}) f_{k+1}(t, x)) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x^n} \cdot (-\sin(2x^n) f_n(t, x)) \\ &= -2(x^1)^{2m_1} f_1(t, x^1, \dots, x^n) - \cdots - 2(x^k)^{2m_k} f_k(t, x^1, \dots, x^n) \\ &\quad - \sin^2(2x^{k+1}) f_{k+1}(t, x^1, \dots, x^n) - \sin^2(2x^n) f_n(t, x^1, \dots, x^n) \leq 0, \end{aligned}$$

поскольку по условию $f_i(t, x^1, \dots, x^n) \geq 0$ для любого $1 \leq i \leq n$. Таким образом, условие 2) из теоремы 2 выполнено и, следовательно, решения заданной системы равномерно y -ограничены с y_0 -контролем.

Сформулируем и докажем теперь необходимый признак равномерной y -ограниченности с y_0 -контролем решений системы (1) в терминах верхней производной Дини в силу этой системы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для правой части $F(t, x)$ системы (1) выполнено условие $F(t, x) \in \mathcal{D}(x)$ и решения системы (1) равномерно y -ограничены с y_0 -контролем. Тогда в области $t \geq 0$, $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$, $|y| \geq R_0 = \beta(0)$, где $\beta(\alpha)$ – функция из определения 2, имеется неотрицательная функция $V(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $b(|y|) \leq V(t, x) \leq a(|y|)$, где $a(r) > 0$, $b(r) \geq 0$ – непрерывные возрастающие функции и $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.
- 2) $V_{F(t, x)}^+(t, x) \leq 0$ внутри области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|_k \geq R_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим сначала функцию $V(t, x)$. Рассмотрим на отрезке $0 \leq \tau \leq t$ произвольное решение $x = x(\tau, x, t)$ системы (1). Так как решение $x = x(\tau, x, t)$ продолжимо на всю полуось $\tau \geq 0$, это решение определяет функцию $|y(\tau, x, t)|^2 = |x(\tau, x, t)|_k^2$, которая непрерывна при изменении τ от $\tau = t$ до $\tau = 0$. Определим в области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ неотрицательную функцию $V(t, x)$, полагая

$$V(t, x) = \min\{|x(\tau, x, t)|_k^2 : 0 \leq \tau \leq t\}.$$

Проверим, что функция $V(t, x)$ обладает свойством 1). Из определения функции $V(t, x)$ видно, что $V(t, x) \leq |y|^2$. Таким образом, если в качестве функции $a(r)$ взять функцию $a(r) = r^2$, то получим $V(t, x) \leq a(|y|)$. По определению равномерной y -ограниченности с y_0 -контролем решений имеем $|x(t, x_0, t_0)|_k < \beta(\alpha)$ при $|x_0|_k \leq \alpha$. Без ограничения общности можно считать, что функция $\beta(\alpha)$ является непрерывной возрастающей функцией от α . В самом деле, если это не так, то функцию $\beta(\alpha)$ всегда можно заменить непрерывной возрастающей функцией $\gamma(\alpha)$, для которой выполнено условие $\beta(\alpha) \leq \gamma(\alpha)$. Итак, будем считать, что функция $\beta(\alpha)$ является непрерывной возрастающей функцией от α . Из неравенства $|x(t, x_0, t_0)|_k < \beta(\alpha)$ при $|x_0|_k \leq \alpha$, где $\beta(\alpha)$ – непрерывная возрастающая функция от α , получаем неравенство

$$|x(t, x_0, t_0)|_k^2 < (\beta(\alpha))^2 \quad \text{при} \quad |x_0|_k \leq \alpha.$$

Очевидно, что $(\beta(\alpha))^2$ является непрерывной возрастающей функцией от α . Обратная функция $\xi(r) \geq 0$ к функции $(\beta(\alpha))^2$ определена на множестве $r \geq (\beta(0))^2$. При помощи функции $\xi(r)$ из указанного выше неравенства $|x(t, x_0, t_0)|_k^2 < (\beta(\alpha))^2$ получаем для каждого $|x|_k^2 \geq (\beta(0))^2$ неравенство $\xi(|x|_k^2) \leq V(t, x)$. Если теперь в качестве $b(r) \geq 0$ взять функцию $\xi(r^2)$, которая определена при $r \geq R_0$, где $R_0 = \beta(0)$, то для каждого $x \in \mathbb{R}^n$, $|y| = |x|_k \geq R_0$ получим неравенство $b(|y|) \leq V(t, x)$. Ясно, функция $b(r)$ является возрастающей функцией и $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Также ясно, что полученное выше для любого $x \in \mathbb{R}^n$ неравенство $V(t, x) \leq a(|y|)$ является справедливым и для каждого $x \in \mathbb{R}^n$, $|y| = |x|_k \geq R_0$. Очевидно, что $a(r) = r^2 > 0$ при $r \geq R_0$. Таким образом, проверка того, что неотрицательная функция $V(t, x)$, рассматриваемая в области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|_k = |y| \geq R_0$, обладает свойством 1) завершена.

Для доказательства справедливости условия $V(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$ заметим сначала, что для любой точки (t, x) из области определения функции $V(t, x)$ найдется такое $0 \leq \tau' \leq t$, что имеет место равенство $V(t, x) = |x(\tau', t, x)|_k^2$. Действительно, в силу

компактности отрезка $[0; t]$ и непрерывности функции $|x(\tau, x, t)|_k^2$ на этом отрезке такое $0 \leq \tau' \leq t$ всегда существует. Покажем теперь, что $V(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$. Рассмотрим сначала разность $V(t, x) - V(t, x')$. Пусть $V(t, x') = |x(\tau_1, x', t)|_k^2$. Тогда имеем

$$V(t, x) - V(t, x') \leq |x(\tau_1, x, t)|_k^2 - |x(\tau_1, x', t)|_k^2 \leq A|x - x'|.$$

Здесь A – некоторая константа в δ -окрестности $U(P, \delta)$ точки $P = (t, x)$, где $(x', t) \in U(P, \delta)$, определяемая условием существования непрерывных частных производных функции $|x(\tau, x, t)|_k^2$ по переменным $x^1, \dots, x^n$ в этой окрестности. Пусть теперь $V(t, x) = |x(\tau_2, x, t)|_k^2$. Тогда имеем

$$V(t, x) - V(t, x') \geq |x(\tau_2, x, t)|_k^2 - |x(\tau_2, x', t)|_k^2 \geq -A|x - x'|.$$

Таким образом, в окрестности $U(P, \delta)$ точки $P = (t, x)$ справедливо следующее неравенство:

$$|V(t, x) - V(t, x')| \leq A|x - x'|. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим $V(t, x) - V(t', x)$ при $t < t'$. Пусть $V(t', x) = |x(\tau', x, t')|_k^2$, где $0 \leq \tau' \leq t$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} V(t, x) - V(t', x) &\leq |x(\tau', x, t)|_k^2 - |x(\tau', x, t')|_k^2 \\ &= |x(\tau', x, t)|_k^2 - |x(\tau', X, t)|_k^2 \leq A|x - X| \leq C_1|t - t'|, \end{aligned}$$

где $X = x(t, x, t')$. Здесь C_1 – некоторая константа в δ -окрестности $U(P, \delta)$ точки $P = (t, x)$, где $(t', x) \in U(P, \delta)$, определяемая условием непрерывной дифференцируемости функции $|x(\tau, x, t)|_k^2$ по переменной t в этой окрестности. Аналогично получаем неравенство $V(t, x) - V(t', x) \geq -C_1|t - t'|$. Пусть теперь $V(t, x) = |x(\tau'', x, t)|_k^2$ и равенство $V(t', x) = |x(\tau', x, t')|_k^2$ выполнено при $t < \tau' \leq t'$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} V(t, x) - V(t', x) &= |x(\tau'', x, t)|_k^2 - |x(\tau', x, t')|_k^2 \\ &\leq |x(t, x, t)|_k^2 - |x(t, x, t')|_k^2 + |x(t, x, t')|_k^2 - |x(\tau', x, t')|_k^2 \\ &\leq A|x - X| + C_2|t - \tau'| \leq C_1|t - t'| + C_2|t - t'| = C|t - t'|, \end{aligned}$$

где $C = C_1 + C_2$. Здесь C_2 – некоторая константа, определяемая условием непрерывной дифференцируемости функции $|x(t, x, t')|_k^2$ по переменной t . Аналогично получаем, что $V(t, x) - V(t', x) \geq -C|t - t'|$. Итак, в окрестности $U(P, \delta)$ точки $P = (t, x)$ справедливо следующее неравенство:

$$|V(t, x) - V(t', x)| \leq C|t - t'|. \quad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) в окрестности $U(P, \delta)$ точки $P = (t, x)$ получаем

$$\begin{aligned} |V(t, x) - V(t', x')| &= |V(t, x) - V(t', x) + V(t', x) - V(t', x')| \\ &\leq C|t - t'| + A|x - x'| \leq L(|t - t'| + |x - x'|), \end{aligned}$$

где $L = \max(C, A)$. Таким образом, доказано, что $V(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$. Из этого, как было показано выше, следует, что для функции $V(t, x)$ внутри области $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$, существует верхняя производная Дини $V_{F(t, x)}^{'+}(t, x)$ в силу системы (1).

Докажем теперь, что $V_{F(t,x)}^{'+}(t,x) \leq 0$ внутри области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Для этого заметим сначала, что для любого решения $x = x(t)$ системы (1), проходящего через точку (t_0, x_0) , $t_0 \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, функция $V(t, x(t))$ является невозрастающей функцией. В самом деле, пусть заданы любые $0 \leq t_1 < t_2$. Тогда имеем

$$V(t_1, x(t_1)) = \min_{0 \leq \tau \leq t_1} |x(\tau, x(t_1), t_1)|_k^2 \geq \min_{0 \leq \tau \leq t_2} |x(\tau, x(t_2), t_2)|_k^2 = V(t_2, x(t_2)).$$

Применяя теперь к функции $V(t, x)$ теорему 1, получаем, что $V_{F(t,x)}^{'+}(t, x) \leq 0$ внутри области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, проверка того, что неотрицательная функция $V(t, x)$, рассматриваемая в области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, обладает свойством 2) завершена.

Объединяя теперь утверждения теорем 2 и 3 получаем следующий критерий равномерной y -ограниченности с y_0 -контролем решений системы (1) в терминах верхней производной Дини в силу этой системы.

ТЕОРЕМА 4 (Критерий равномерной y -ограниченности с y_0 -контролем решений системы дифференциальных уравнений). *Для того, чтобы решения системы (1), где $F(t, x) \in \mathcal{D}(x)$, были равномерно y -ограничены с y_0 -контролем необходимо и достаточно существование неотрицательной функции $V(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$, определенной в области $t \geq 0$, $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$, $|x|_k = |y| \geq R_0$, где $R_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, которое обладает следующими свойствами:*

- 1) $b(|y|) \leq V(t, x) \leq a(|y|)$, где $a(r) > 0$, $b(r) \geq 0$ – непрерывные возрастающие функции и $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$;
- 2) $V_{F(t,x)}^{'+}(t, x) \leq 0$ внутри области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|_k \geq R_0$.

Проведем теперь сравнение полученного выше критерия со следующим критерием равномерной y -ограниченности решений системы из работы [2].

ТЕОРЕМА 5 (Критерий равномерной y -ограниченности решений системы дифференциальных уравнений). *Для того, чтобы решения системы (1) были равномерно y -ограничены необходимо и достаточно существование неотрицательной функции $V(t, x)$, определенной в области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|_k \geq R_0$, где $R_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, которое обладает следующими свойствами:*

- 1) $b(|y|) \leq V(t, x) \leq a(|x|)$, где $x = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $a(r) > 0$, $b(r) \geq 0$ – непрерывные возрастающие функции и $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$;
- 2) для любого удовлетворяющего условию $|x(t)|_k \geq R_0$ решения $x = x(t)$ системы (1), функция $V(t, x(t))$ является невозрастающей функцией.

Представляется важным указать на то, что в работе [2] не рассматривался вопрос о том, можно ли выбрать функцию $V(t, x)$ в теореме 5 так, чтобы она удовлетворяла условию Липшица $V(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$. Если рассмотреть этот вопрос, то можно показать, что при выполнении условия $F(t, x) \in \mathcal{D}(x)$ ответ на него положительный. Действительно, аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 3, доказывается, что функцию $V(t, x)$ в теореме 5 можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла условию $V(t, x) \in \mathcal{L}(t, x)$, из которого следует существование $V_{F(t,x)}^{'+}(t, x)$. Как следствие получаем утверждение, которое уточняет теорему 5.

ТЕОРЕМА 6. Для того, чтобы решения системы (1), где $F(t, x) \in \mathcal{D}(x)$, были равномерно y -ограничены необходимо и достаточно существование неотрицательной функции $V(t, x)$, определенной в области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|_k \geq R_0$, где $R_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, которая обладает следующими свойствами:

- 1) $b(|y|) \leq V(t, x) \leq a(|x|)$, где $x = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $a(r) > 0$, $b(r) \geq 0$ – непрерывные возрастающие функции и $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$;
- 2) $V_{F(t,x)}^{'+}(t, x) \leq 0$ внутри области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|_k \geq R_0$.

Сравнивая теперь теоремы 4 и 6, а также пользуясь очевидным неравенством $|x|_k \leq |x|$, получаем следующее утверждение, которое устанавливает связь между равномерной y -ограниченностью решений системы (1) и равномерной y -ограниченностью с y_0 -контролем решений этой системы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть решения системы (1), где $F(t, x) \in \mathcal{D}(x)$, равномерно y -ограничены. Решения этой системы будут равномерно y -ограничены с y_0 -контролем тогда и только тогда, когда функцию $V(t, x)$ из теоремы 6 можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла условию $V(t, x) \leq a(|x|_k)$, где $a(r) > 0$ – некоторая непрерывная возрастающая функция.

Ведем теперь понятие тотальной ограниченности (или, по другому, ограниченности при постоянно действующих возмущениях) решений системы (1) по части переменных с контролируемой частью начальных условий. Пусть вместе с системой (1) задана еще одна система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) + H(t, x), \quad H(t, x) = (H^1(t, x), \dots, H^n(t, x)), \quad (5)$$

где $F(t, x)$ – правая часть системы (1) и $H(t, x)$ – переменное векторное поле в $\mathbb{R}^n$, называемое *возмущением* системы (1), которое является определенным и непрерывным в области $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : 0 \leq |x| < \infty, t \geq 0\}$. Далее везде будет предполагаться, что все решения системы (5), проходящие через произвольную точку (t_0, x_0) , продолжимы на всю полуось $t \geq t_0$.

Систему (5) удобно для последующих рассуждений записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Y(t, y, z) + M(t, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = Z(t, y, z) + N(t, y, z), \end{cases}$$

где $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $1 \leq k \leq n$, и

$$\begin{aligned} Y(t, y, z) &= (F^1(t, x), \dots, F^k(t, x)), & Z(t, y, z) &= (F^{k+1}(t, x), \dots, F^n(t, x)), \\ M(t, y, z) &= (H^1(t, x), \dots, H^k(t, x)), & N(t, y, z) &= (H^{k+1}(t, x), \dots, H^n(t, x)). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что решения системы (1) *тотально ограничены по части переменных* $y = (x^1, \dots, x^k)$ с контролируемой частью начальных условий $y_0 = (x_0^1, \dots, x_0^k)$ или, более кратко, *тотально y -ограничены с y_0 -контролем*, если для любого неотрицательного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ существуют такие положительные числа $\beta(\alpha), \gamma(\alpha) \in \mathbb{R}$, что для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$, $|x_0|_k \leq \alpha$ выполнено условие $|x(t, x_0, t_0)|_k < \beta$ при $t \geq t_0$, где $x = x(t, x_0, t_0)$ – произвольное решение системы (5), удовлетворяющей при $\alpha \leq |x|_k \leq \beta$ неравенству $|M(t, x)| = |H(t, x)|_k \leq \gamma$.

Для функции $G(t, y)$, $t \geq 0$, $y \in E$, где E – некоторая область в $\mathbb{R}^k$, далее будем употреблять запись $G(t, y) \in \mathcal{L}_t(y)$, если для любого ограниченного подмножества $B \subset E$, замыкание которого принадлежит E , существует такая постоянная Липшица L , зависящая от B , что для каждого $t \geq 0$ и любых $y, y' \in B$ справедливо следующее неравенство:

$$|G(t, y) - G(t, y')| \leq L|y - y'|.$$

Отметим, что из справедливости условия $G(t, y) \in \mathcal{L}(t, y)$, вообще говоря, не следует справедливость условия $G(t, y) \in \mathcal{L}_t(y)$.

Сформулируем и докажем теперь достаточный признак тотальной y -ограниченности с y_0 -контролем решений системы (1) в терминах верхней производной Дини в силу этой системы.

ТЕОРЕМА 7. Пусть для системы (1) существует такая непрерывная и неотрицательная функция $V(t, y)$, определенная в области $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^k$, $|y| \geq R_0$, где $R_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, что $V(t, y) \in \mathcal{L}(t, y)$ и $V(t, y) \in \mathcal{L}_t(y)$. Кроме того, пусть для указанной выше функции $V(t, y)$ выполнены следующие условия:

- 1) $b(|y|) \leq V(t, y) \leq a(|y|)$, где $a(r) > 0$, $b(r) \geq 0$ – непрерывные возрастающие функции и $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$;
- 2) $V_{F(t,x)}'^+(t, x) \leq -c(|y|)$ внутри области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|y| = |x|_k \geq R_0$, где $c(r)$ – некоторая непрерывная функция, являющаяся положительной при $r > 0$.

Тогда решения системы (1) тотально y -ограничены с y_0 -контролем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При помощи условия 1) точно так же, как это было сделано в доказательстве теоремы 2, выберем для произвольного $\alpha > 0$ такое число $\beta > \alpha$, что $b(\beta) > a(\alpha)$. Теперь требуется показать существование такого γ , что решения системы (5), правая часть которой в области $\alpha \leq |y| \leq \beta$ удовлетворяет условию $|H(t, y, z)|_k \leq \gamma$, являются равномерно y -ограниченными с y_0 -контролем. Из теоремы 2 следует, что указанное выше число γ можно найти из требования справедливости условия $V_{F(t,x)+H(t,x)}'^+(t, x) \leq 0$. Действительно, при $\alpha \leq |y| \leq \beta$ имеем

$$\begin{aligned} V_{F(t,x)+H(t,x)}'^+(t, x) &= V_{Y(t,x)+M(t,x)}'^+(t, x) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(\sup_{h \in (0; \alpha]} \frac{V(t+h, y + (Y(t, x) + M(t, x))h) - V(t, y)}{h} \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(\sup_{h \in (0; \alpha]} \frac{V(t+h, y + Y(t, x)h + M(t, x)h) - V(t+h, y + Y(t, x)h)}{h} \right. \\ &\quad \left. + \frac{V(t+h, y + Y(t, x)h) - V(t, y)}{h} \right). \end{aligned}$$

Так как $V(t, y) \in \mathcal{L}_t(y)$, получаем

$$\frac{V(t+h, y + Y(t, x)h + M(t, x)h) - V(t+h, y + Y(t, x)h)}{h} \leq L|M(t, x)|,$$

где $b(r) = r^2 \geq 0$, $a(r) = r^2 + 1 > 0$ являются непрерывными возрастающими функциями и $b(r) = r^2 \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, условие 1) из теоремы 7 выполнено. Проверим теперь, что для функции $V(t, y) = |y|^2$ выполнено условие 2) из теоремы 7. Так как для рассматриваемой функции $V(t, y)$ существуют непрерывные частные производные первого порядка по переменным $x^1, \dots, x^k$, получаем

$$\begin{aligned} V_{F(t,x)}^{\prime+}(t, x) &= \frac{\partial V}{\partial x^1} \cdot (-x^1 f_1(t, x^1, \dots, x^n)) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x^k} \cdot (-x^k f_k(t, x^1, \dots, x^n)) \\ &= -2(x^1)^2 f_1(t, x^1, \dots, x^n) - \dots - 2(x^k)^2 f_k(t, x^1, \dots, x^n) \\ &\leq -2((x^1)^2 + \dots + (x^k)^2) = -2(|y|^2), \end{aligned}$$

поскольку по условию $f_i(t, x^1, \dots, x^n) \geq 1$ для любого $1 \leq i \leq k$. Легко видеть, что для функции $c(r) = 2r^2$ имеем $c(r) > 0$ при $r > 0$ и $V_{F(t,x)}^{\prime+}(t, x) \leq -c(|y|)$. Таким образом, условие 2) из теоремы 7 выполнено и, следовательно, решения заданной системы тотально y -ограничены с y_0 -контролем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Т. Yoshizawa, “Liapunovs function and boundedness of solutions”, *Funkcial. Ekvac.*, **2** (1959), 95–142; рус. пер.: *Сб. пер. Математика*, **5** (1965), 95–127.
- [2] В. В. Румянцев, А. С. Озиранер, *Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных*, Наука, М., 1987.
- [3] В. И. Воротников, Ю. Г. Мартышенко, “К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем”, *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2010, № 5, 23–31.
- [4] Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа, *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*, Мир, М., 1980.

К. С. Лапин

Мордовский государственный университет

им. Н. П. Огарева, г. Саранск

E-mail: klapin@mail.ru

Поступило

16.09.2011